UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Bojana Bačko

Zakoni velikih brojeva za fazi brojeve i fazi slučajne promenljive

master rad

Novi Sad, 2015.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографски рад
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални штампани материјал
Врста рада, **ВР**:	мастер рад
Аутор, **АУ**:	Бојана Бачко
Ментор, **МН**:	др Славица Медић
Наслов рада, **НР**:	Закони великих бројева за фази бројеве и фази случајне промењливе
Језик публикације, **ЈП**:	српски (латиница)
Језик извода, **ЈИ**:	српски/енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Република Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Војводина
Година, **ГО**:	2015.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/цитата/табела/ слика/графика/прилога)	4/57/22/0/17/0/0
Научна област, **НО**:	Примењена математика
Научна дисциплина, **НД**:	Фази вероватноћа
Предметна одредница/ Кључне речи, **ПО**:	закони великих бројева, фази бројеви, фази случајне промењливе
УДК	
Чува се, **ЧУ**:	Библиотека Факултета техничких наука, Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	У овом дипломском мастер раду дати су уводни појмови из теорије вероватноће, као и слаби и јаки закони великих бројева за случајне промењливе. Затим су дати основни појмови теорије фази скупова и закони великих бројева за симетричне троугаоне фази бројеве. Закони великих бројева за фази случајне промењливе су представљени у последњем делу рада.
Датум прихватања теме, **ДП**:	
Датум одбране, **ДО**:	29.10.2015.

Чланови комисије, **КО**:	Председник:	др Татјана Грбић	
	Члан:	др Сања Рапајић	
	Члан:	др Сандра Бухмилер	Потпис ментора
	Члан, ментор:	др Славица Медић	

Образац **Q2.НА.04-05-**Издање 1

UNIVERSITY OF NOVI SAD • FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES
21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:		
Identification number, **INO**:		
Document type, **DT**:	Monograph documentation	
Type of record, **TR**:	Textual printed material	
Contents code, **CC**:	Master thesis	
Author, **AU**:	Bojana Bačko	
Mentor, **MN**:	Slavica Medić, PhD	
Title, **TI**:	Laws of large numbers for fuzzy numbers and fuzzy random variables	
Language of text, **LT**:	Serbian (Latin)	
Language of abstract, **JA**:	Serbian/English	
Country of publication, **CP**:	Republic of Serbia	
Locality of publication, **LP**:	Vojvodina	
Publication year, **PY**:	2015	
Publisher, **PB**:	Author's reprint	
Publication place, **PP**:	Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad	
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref/tables/ pictures/graphs/appendixes)	4/57/22/0/17/0/0	
Scientific field, **SF**:	Applied athematics	
Scientific discipline, **SD**:	Fuzzy probability	
Subject/Key words, **S/KW**:	law of large numbers, fuzzy number, fuzzy random variable	
UC		
Holding data, **HD**:	The Library of the Faculty of Technical Sciences, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6	
Note, **N**:		
Abstract, **AB**:	In this master thesis, the introduction to the probability theory as well as weak and strong laws of large numbers for random variables are presented. It contains the basic concepts of fuzzy sets theory and the laws of large numbers for symmetric triangular fuzzy numbers. The laws of large numbers for fuzzy random variables are presented in the last part of the thesis.	
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		
Defended on, **DE**:	29/10/2015	
Defended board, **DB**: President:	Tatjana Grbić, PhD	
Member:	Sanja Rapajić, PhD	
Member:	Sandra Buhmiler, PhD	Menthor's sign
Member, Menthor:	Slavica Medić, PhD	

Predgovor

Predmet izučavanja ovog master rada su zakoni velikih brojeva. U teoriji verovatnoće, zakoni velikih brojeva razmatraju konvergenciju niza slučajnih promenljivih ka nekoj konstanti. U zakonima velikih brojeva su dati uslovi pod kojima ukupno dejstvo slučajnih uticaja dovodi do rezultata za koji može da se kaže da ne zavisi od slučaja.

U prvoj glavi rada dati su osnovni pojmovi teorije verovatnoće potrebni za razumevanje rada u celini. Zakoni velikih brojeva za slučajne promenljive dati su u drugoj glavi rada. Izučavaju se dve vrste zakona velikih brojeva, slabi zakoni i jaki zakoni velikih brojeva. Prezentovani su zakoni velikih brojeva Čebiševa i Hičina, koji spadaju u slabe zakone velikih brojeva, kao i zakon velikih brojeva Kolmogorova, koji je jaki zakon velikih brojeva. Pored zakona velikih brojeva za slučajne promenljive, u ovom radu izučavaju se i zakoni velikih brojeva za fazi brojeve. Zakon velikih brojeva za niz simetričnih fazi brojeva predstavljen je u trećoj glavi. Navedeni su i primeri koji pokazuju da zakon velikih brojeva za niz simetričnih trougaonih fazi brojeva ne važi uvek. Pored zakona velikih brojeva za slučajne promenljive i fazi brojeve, u četvrtoj glavi rada, izučavaju se i zakoni velikih brojeva za fazi slučajne promenljive, koje se smatraju jednim od uopštenja slučajnih promenljivih. Na kraju rada dat je jaki zakon velikih brojeva za niz nezavisnih fazi slučajnih promenljivih koje imaju istu raspodelu.

* * *

Izuzetnu zahvalnost dugujem svom mentoru dr Slavici Medić, kao i predsedniku komisije dr Tatjani Grbić, na ukazanom poverenju, pruženom znanju, svim savetima i sugestijama koji su mi olakšali izradu ovog rada. Takođe, zahvaljujem se i članovima komisije, dr Sanji Rapajić i dr Sandri Buhmiler.

Posebnu zahvalnost dugujem svojim roditeljima i sestri, kao i svim svojim prijateljima, koji su mi pružili podršku tokom dosadašnjeg školovanja.

Bojana Bačko

Sadržaj

Glava 1

Prostor verovatnoće

U ovom delu rada predstavljeni su osnovni pojmovi teorije verovatnoće. Polazi se od definicije slučajnog događaja i verovatnoće slučajnog događaja, uz koje su navedeni primeri. Definisane su slučajne promenljive, jednodimenzionalne i višedimezionalne, njihove osnovne raspodele i transformacije slučajnih promenljivih. Za potrebe ovog rada izdvajaju se brojne karakteristike slučajnih promenljivih, matematičko očekivanje i disperzija. Nejednakosti Markova, Čebiševa i Kolmogorova, koje procenjuju svojstva slučajnih promenljivih, neophodne su u dokazima zakona velikih brojeva.

Rezultati teorije verovatnoće prikazani u ovom delu mogu se opširnije naći u [5, 8, 9, 13, 18, 19, 20].

1.1 Slučajan događaj

Eksperiment (opit) koji kada se odvija pod istim uslovima ne dovodi do jedinstvenog ishoda je polazni pojam teorije verovatnoće. Takvi eksperimenti se nazivaju *verovatnosni (stohastički) eksperimenti.* Pored njih postoje i tzv. deterministički eksperimenti, i najčešće eksperiment ima i stohastičku i determinističku stranu. *Skup svih mogućih ishoda* nekog eksperimenta označavamo sa Ω, a elemente skupa Ω nazivamo *elementarnim događajima* i obeležavamo ih sa $\omega, \omega_1, \omega_2, \dots$. *Slučajan događaj* je podskup skupa elementarnih događaja Ω, obeležavamo ga velikim latiničnim slovima sa početka abecede. Kažemo da se događaj A realizovao ako se realizovao neki od elementarnih događaja koji mu pripadaju. Skup Ω je događaj koji se uvek realizuje i naziva se *siguran događaj.* Prazan skup $\emptyset$ je *nemoguć događaj* i on se nikada ne može realizovati.

Primer 1.1 *Baca se kockica za igru. Opisati skup elementarnih događaja Ω i događaj A „pašće paran broj tačkica na kockici”.*

Rešenje: Skup elementarnih događaja je

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

gde je sa $\omega_i,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, označen događaj da se na gornjoj strani kockice nalazi i tačkica.
Događaj A se realizuje ako se na gornjoj strani kockice pojavi 2, 4 ili 6 tačkica, tj.

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}.$$

Primer 1.2 *Baca se novčić tri puta i beleži strana koja se vidi. Opisati skup elementarnih događaja Ω i događaj B „u prvom i drugom bacanju pašće glava”.*

Rešenje: Skup elementarnih događaja je

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(P_1,P_2,P_3),(P_1,P_2,G_3),(P_1,G_2,P_3),(G_1,P_2,P_3),\\ &\quad (P_1,G_2,G_3),(G_1,P_2,G_3),(G_1,G_2,P_3),(G_1,G_2,G_3)\},\end{aligned}$$

gde je P_i događaj da će u $i-$tom po redu bacanju pasti pismo, a G_i događaj da će u $i-$tom po redu bacanju pasti glava, $i = 1, 2, 3$.
Događaj B se realizuje kada u prvom i drugom bacanju padne glava, tj.

$$B = \{(G_1,G_2,P_3),(G_1,G_2,G_3)\}.$$

Uobičajeno je da se skup Ω kraće piše

$$\Omega = \{(P,P,P),(P,P,G),(P,G,P),(G,P,P),(P,G,G),(G,P,G),(G,G,P),(G,G,G)\}.$$

1.2 σ - polje događaja

Aksioma 1.1 ***(Aksioma σ-polja)*** *Neka je $\Omega \neq \emptyset$ skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta. Neprazan podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ je* σ-polje *nad Ω ako važe uslovi:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. *ako $A \in \mathcal{F}$, onda $A^c \in \mathcal{F}$, gde je A^c komplement skupa A,*
3. *ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, onda $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.*

Elementi klase $\mathcal{F}$ se nazivaju *događaji*, a uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se *prostor događaja.*

Direktno iz definicije slede važne osobine σ-polja $\mathcal{F}$:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. ako $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$, onda $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$,
3. ako $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$, onda $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$,
4. ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, onda $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Komplement događaja A, $\Omega \backslash A$, naziva se *suprotan događaj* i obeležavamo ga sa A^c ili $\bar{A}$. Događaj A^c se realizuje ako i samo ako se događaj A ne realizuje.

Primer 1.3 *Suprotan događaj događaja A „pašće paran broj tačkica na kockici” iz Primera 1.1 je događaj A^c „pašće neparan broj tačkica na kockici”, tj.*

$$A^c = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}.$$

Primer 1.4 *Kada se baca novčić (Primer 1.2) događaji P „pašće pismo” i G „pašće glava” su suprotni događaji i možemo pisati $P = G^c$ (ili $G = P^c$).*

Presek događaja A i B, u oznaci AB, je događaj koji se realizuje ako i samo ako se realizuju oba događaja A i B.

Događaji A i B se međusobno isključuju ako su skupovi A i B disjunktni što pišemo $AB = \emptyset$. Konačna (prebrojiva) familija događaja je *disjunktna u parovima* ako je $A_iA_j = \emptyset$, za svako $i \neq j$.

Unija događaja A i B, u oznaci $A \cup B$, je događaj koji se realizuje ako i samo ako se realizuje bar jedan od događaja A i B. Ako su A i B disjunktni događaji uniju označavamo sa $A + B$. Unija familije u parovima disjunktnih događaja $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ označava se sa $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

1.3 Verovatnoća slučajnog događaja

Aksioma 1.2 *Neka je Ω skup elementarnih događaja nekog eksperimenta i $\mathcal{F}$ σ-polje nad skupom Ω. Funkcija $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ naziva se* verovatnoća *na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako zadovoljava uslove:*

1. *$P(\Omega) = 1$,*
2. *ako je $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ familija događaja disjunktnih u parovima tada je*

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Prostor verovatnoće je uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gde je Ω skup svih elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ je σ-polje, a P verovatnoća na prostoru događaja $(\Omega, \mathcal{F})$.

Lema 1.1 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće i $P(\cdot)$ verovatnoća na $(\Omega, \mathcal{F})$. Tada:*

1. *$P(\emptyset) = 0$,*
2. *ako je $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$, $A_iA_j = \emptyset$, $i \neq j$, $j = 1, 2, \dots, n$, tada*

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

3. *$P(A^c) = 1 - P(A)$,*
4. *ako je $A \subset B$, onda je $P(A) \leq P(B)$,*
5. *$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,*
6. *$P\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum\limits_{i} P(A_i) - \sum\limits_{i<j} P(A_iA_j) + \sum\limits_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n)$.*

1.4 Jednodimenzionalne slučajne promenljive

Izučavanje prostora verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ može biti veoma komplikovano usled čega se javlja potreba da se sa apstraktnog prostora verovatnoće pređe na realnu osu $\mathbb{R}$ koja ima bogatu matematičku strukturu. Taj postupak prelaska omogućava se uvođenjem pojma slučajne promenljive u teoriju verovatnoće. Svakom elementarnom događaju $\omega \in \Omega$ dodeljuje se realan broj $X(\omega)$ i na taj način opisuje se rezultat nekog eksperimenta pomoću realne funkcije $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Funkcija X preslikava skup svih mogućih ishoda eksperimenta Ω u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ i potrebno je da to preslikavanje bude merljivo.

Definicija 1.1 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće i $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Preslikavanje X je* slučajna promenljiva *ako $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ za svako $S \in \mathcal{B}$, gde je $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelovo σ-polje.*[1]

Primer 1.5 *Baca se novčić tri puta i beleži strana koja se vidi, kao u Primeru 1.2.*

a) Slučajna promenljiva $X : \Omega \to \mathbb{R}$ koja predstavlja broj palih pisama u tri bacanja data je sa

$$X(P,P,P) = 3,\ X(P,P,G) = 2,\ X(P,G,P) = 2,\ X(G,P,P) = 2,$$

$$X(P,G,G) = 1,\ X(G,P,G) = 1,\ (G,G,P) = 1,\ X(G,G,G) = 0.$$

b) Slučajna promenljiva $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ koja dodeljuje broj 1 ako je u tri bacanja pao paran broj pisama, i 0 inače, data je sa

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{paran broj pisama} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Na osnovu prethodnog primera možemo zaključiti da na istom skupu Ω možemo posmatrati više slučajnih promenljivih.

Skup slika slučajne promenljive X označavamo sa $\mathcal{R}_X$ i nazivamo ga *skup vrednosti* slučajne promenljive. Ako je $\mathcal{R}_X$ konačan ili prebrojiv skup, slučajna promenljiva X je *diskretnog* tipa, $\mathcal{R}_X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Ako je $\mathcal{R}_X$ neprebrojiv skup (interval, ili čitava realna prava), slučajna promenljiva X je *apsolutno neprekidnog* tipa.

Napomena 1.1 *Osim slučajnih promenljivih diskretnog i apsolutno neprekidnog tipa postoje i slučajne promenljive* mešovitog *tipa [13].*

Definicija 1.2 *Neka je X slučajna promenljiva. Funkcija $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definisana sa*

$$F_X(x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) < x) = P(X < x)$$

naziva se funkcija raspodele *slučajne promenljive X.*

[1] $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ najmanje σ-polje koje sadrži sve skupove koji se dobijaju kao konačne ili prebrojive unije ili preseci ili komplementi familije poluotvorenih intervala $[a, b),\ a, b \in \mathbb{R}$ [19, 20].

Teorema 1.1 *Za funkciju raspodele F_X slučajne promenljive X važe sledeće osobine:*

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = 0$,
2. $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = F_\infty(x) = 1$,
3. *funkcija raspodele je monotono neopadajuća funkcija, tj. ako je $x_1 < x_2$, tada je $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$,*
4. *funkcija raspodele je neprekidna sa leve strane, tj.*
$$\lim_{x\to a^-} F_X(x) = F_X(a),$$
5. $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$, *za sve $a, b \in \mathbb{R}$.*

U teoriji verovatnoće izdvajaju se tri tipa funkcija raspodele: diskretne, apsolutno neprekidne i singularne [13].

Definicija 1.3 *Neka je X slučajna promenljiva diskretnog tipa i $\mathcal{R}_X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$, skup vrednosti slučajne promenljive X. Tada se sa*
$$p_X(x_i) = P(X = x_i),$$
za svako $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ označava verovatnoća događaja $(X = x_i)$.

Primetimo da je $\Omega = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} (X = x_i)$, pa sledi da je $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} p_X(x_i) = P(\Omega) = 1$.

Diskretna slučajna promenljiva je zadata ako su poznati:

1. skup vrednosti $\mathcal{R}_X$ slučajne promenljive X,
2. odgovarajuće verovatnoće $p_X(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$.

Skup vrednosti diskretne slučajne promenljive zajedno sa odgovarajućim verovatnoćama naziva se *zakon raspodele* slučajne promenljive X koji se najčešće predstavlja šematski:
$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_X(x_1) & p_X(x_2) & \dots \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Na osnovu Definicije 1.2 sledi da se funkcija raspodele za slučajne promenljive diskretnog tipa može izraziti
$$F_X(x) = \sum_{i:x_i<x} p_X(x_i).$$

Definicija 1.4 *Slučajna promenljiva X je apsolutno neprekidnog tipa ako postoji nenegativna, integrabilna funkcija $\varphi_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ tako da važi*
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)dt.$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ naziva se gustina raspodele verovatnoća *slučajne promenljive X ili kraće* gustina.

Teorema 1.2 *Za slučajnu promenljivu X apsolutno neprekidnog tipa važe sledeće osobine:*

1. $\varphi_X(x) = F'_X(x)$, *u svim tačkama $x \in \mathbb{R}$ u kojima je φ_X neprekidna,*

2. $F_X(+\infty) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(x)dx = 1,$

3. $P(X = a) = 0$, *za svako $a \in \mathbb{R}$,*

4. $P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} \varphi_X(x)dx$, *za svako $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

Definicija 1.5 *Neka je F_X funkcija raspodele slučajne promenljive X. Ako izvod F'_X postoji i jednak je nuli skoro svuda (osim na skupu mere nula), tada se ta funkcija naziva* singularna funkcija raspodele *[13].*

Osim navedenih tipova funkcija raspodele postoje funkcije raspodele koje ne pripadaju grupi navedenih tipova. Sledeća teorema, čiji se dokaz može pronaći u [13], opisuje odnos među funkcijama raspodele.

Teorema 1.3 *Svaka funkcija raspodele može se predstaviti u obliku*

$$F(x) = \alpha F_1(x) + \beta F_2(x) + (1 - \alpha - \beta)F_3(x), \quad \alpha, \beta \geq 0,$$

gde je F_1 funkcija raspodele slučajne promenljive diskretnog tipa, F_2 funkcija raspodele slučajne promenljive apsolutno neprekidnog tipa i F_3 singularna funkcija rapodele.

1.5 Transformacija slučajne promenljive

Neka je X slučajna promenljiva koja preslikava prostor verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija, tj. zadovoljava uslov da je $g^{-1}(S) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ za svako $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tada je kompozicija preslikavanja g i X, $(X \circ g)(\omega) = g(X(\omega))$, $\omega \in \Omega$, nova slučajna pomenljiva nad istim prostorom verovatnoće i kraće pišemo $Y = g(X)$. Ako je poznata raspodela slučajne promenljive X i funkcija g, može se odrediti raspodela slučajne promenljive $Y = g(X)$.

Transformacijom slučajne promenljive X diskretnog tipa sa zakonom raspodele (1.1) dobija se slučajna promenljiva $Y = g(X)$ takođe diskretnog tipa. Skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots\}$ tj. $g : \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \to \{y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots\}$ i odgovarajuće verovatnoće $p_Y(y_j)$ se računaju

$$p_Y(y_j) = \sum_{i:g(x_i)=y_j} p_X(x_i).$$

Slučajna promenljiva $Y = g(X)$ ima zakon raspodele

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots \\ p_Y(y_1) & p_Y(y_2) & \ldots \end{pmatrix}.$$

Kod transformacije slučajne promenljive X apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom φ_X i funkcijom raspodele F_X potrebno je obratiti pažnju na monotonost funkcije g i raspodelu slučajne promenljive $Y = g(X)$ je najbolje tražiti preko definicije funkcije raspodele, tj.

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y).$$

1.6 Osnovne raspodele slučajnih promenljivih

Bernulijeva raspodela: Posmtaramo eksperiment sa dva ishoda: događaj A se realizovao ili događaj A se nije realizovao. Neka je $X = 1$ ako se A realizovao i $X = 0$ ako se realizovao suprotan događaj od A označen sa A^c. Ako je $P(A) = p$ i $P(A^c) = 1 - p$, dalje sledi

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= p, \\ P(X = 0) &= 1 - p. \end{aligned}$$

Ove jednakosti opisuju *Bernulijevu* slučajnu promenljivu X sa parametrom $p \in (0, 1)$. Bernulijeva slučajna promenljiva ima značajnu ulogu u razvoju teorije verovatnoće i predstavlja osnovu za definisanje binomne slučajne promenljive.

Primer 1.6 *Indikator događaja $A \in \mathcal{F}$, u oznaci I_A, jeste slučajna promenljiva sa Bernulijevom raspodelom i definiše se na sledeći način:*

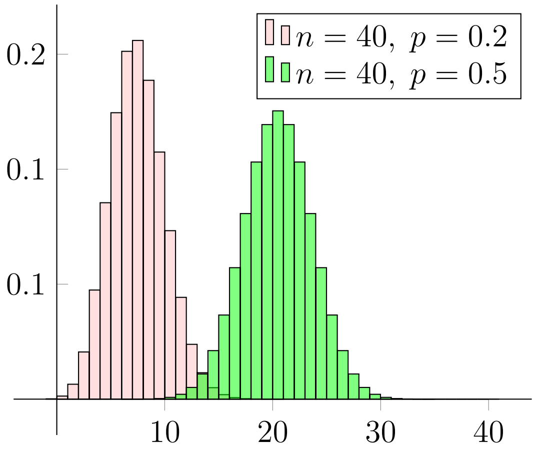
$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad \omega \in A \\ 0 & , \quad \omega \in A^c \end{cases}.$$

Binomna raspodela: Eksperiment ponavljamo n puta u nepromenjenim uslovima i rezultati ponavljanja ne zavise jedan od drugog. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj pozitivnih ishoda eksperimenta u n ponavljanja. Moguć broj pozitivne realizacije eksperimenta je $\{0, 1, \ldots, n\}$, a verovatnoća da se u n ponavljanja pozitivan ishod realizuje tačno k puta je

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{1.2}$$

Za svaku slučajnu promenljivu čija je verovatnoća određena sa (1.2) kažemo da ima binomnu raspodelu sa parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $p \in (0, 1)$ i zapisujemo

$$X : \mathcal{B}(n, p).$$



Slika 1.1: Binomne raspodele $\mathcal{B}(40, 0.2)$ i $\mathcal{B}(40, 0.5)$

Specijalno, za $n = 1$ binomna raspodela je Bernulijeva raspodela.

Primer 1.7 *Verovatnoća da se u jednoj porodici rodi dete muškog pola je* 0.5. *Ako ta porodica ima desetoro dece, naći raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj rođenih sinova.*

Rešenje: Kako broj rođene dece mouškog pola u toj porodici može biti $0, 1, \ldots, 10$, to je skup vrednosti slučajne promenljive X, $\mathcal{R}_X = \{0, 1, \ldots, 10\}$. Verovatnoća da od desetoro dece njih k budu muškog pola je

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{10-k}, \quad k = 1, \ldots, 10,$$

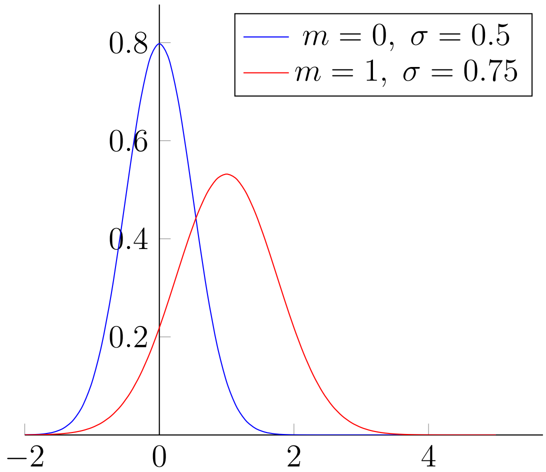
pa slučajna promenljiva X ima binomnu raspodelu $X : \mathcal{B}(10, 0.5)$.

Bernulijeva i binomna raspodela spadaju u diskretne slučajne promenljive, a u nastavku je navedena jedna od osnovnih slučajnih promenljivih apsolutno neprekidnog tipa.

Normalna raspodela: Normalna raspodela je važna raspodela apsolutno neprekidnog tipa sa širokom lepezom primena kako u teoriji, tako i u praksi. Mnoga fizička merenja, kao i prirodni procesi imaju raspodelu ovog oblika.

Slučajna promenljiva X ima normalnu $\mathcal{N}(m, \sigma)$ raspodelu sa parametrima m i σ, gde je $m \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, ako je njena gustina

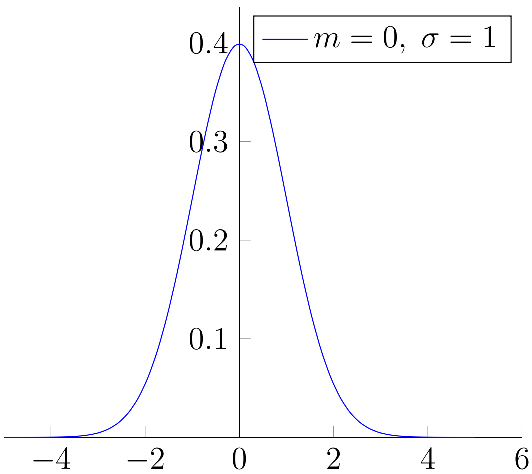
$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Slika 1.2: Normalne raspodele $\mathcal{N}(0, 0.5)$ i $\mathcal{N}(1, 0.75)$

U slučaju kada su parametri normalne raspodele $m = 0$ i $\sigma = 1$ dobijamo normalnu $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelu koja se naziva *standardizovana* normalna raspodela ili *Gausova* raspodela i veoma često se koristi kako u teoriji verovatnoće, tako i u matematičkoj statistici. Gustina raspodele za slučajnu promenljivu Z sa standardizovanom normalnom raspodelom je

$$\varphi_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z \in \mathbb{R}.$$



Slika 1.3: Gausova raspodela $\mathcal{N}(0, 1)$

1.7 Višedimenzionalne slučajne promenljive

Definicija 1.6 *Preslikavanje* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *je* n-dimenzionalna slučajna promenljiva *na prostoru verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ako za svako* $S \in \mathcal{B}_n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *važi* $\boldsymbol{X}^{-1}(S) \in \mathcal{F}$, *gde je* $\mathcal{B}_n$ *Borelovo* σ*-polje*[2] *dimenzije* n.

[2] $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je generisano skupovima oblika $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^2 : a_i \le x_i < b_i,\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}$ [19].

Teorema 1.4 *Preslikavanje $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je n-dimenzionalna slučajna promenljiva ako i samo ako je svaka koordinata X_i, $i = 1, \ldots, n$ jednodimenzionalna slučajna promenljiva.*

Definicija 1.7 *Funkcija raspodele n-dimenzionalne slučajne promenljive $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ je*

$$F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n) = P((X_1 < x_1), \ldots, (X_n < x_n)),$$

i pomoću nje se može odrediti funkcija raspodele svake koordinate X_k, $k = 1, \ldots, n$,

$$F_{X_k}(x_k) = F_{\boldsymbol{X}}(\infty, \ldots, \infty, x_k, \infty, \ldots, \infty).$$

Tako dobijene funkcije raspodela zovu se marginalne funkcije rapodela.

Definicija 1.8 *Neka su X_i, $i = 1, \ldots, n$, diskretne slučajne promenljive definisane nad istim prostorm verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada je n-dimenzionalna slučajna promenljiva $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ diskretnog tipa i*

$$p_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n).$$

Radi jednostavnosti dalje posmatramo samo slučaj $n = 2$ tj. dvodimenzionalnu diskretnu slučajnu promenljivu.

Zakon raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y) čine *skup vrednosti* slučajene promenljive (X, Y)

$$\mathcal{R}_{X,Y} = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_2, y_1), \ldots\} \subset \mathbb{R}^2, \tag{1.3}$$

i odgovarajuće *verovatnoće*

$$p_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j),\ i, j = 1, 2, \ldots. \tag{1.4}$$

Marginalne verovatnoće za slučajne promenljive X i Y u ovom slučaju su

$$p_X(x_i) = \sum_j p_{X,Y}(x_i, y_j) \quad \text{i} \quad p_Y(y_j) = \sum_i p_{X,Y}(x_i, y_j).$$

Definicija 1.9 *Slučajna promenljiva $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ je* n-dimenzionalna slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa *ako postoji integrabilna funkcija $\varphi_{\boldsymbol{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takva da za svako $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ važi*

$$P\big((X_1, \ldots, X_n) \in S\big) = \int \cdots \int_{\{(x_1, \ldots, x_n) \in S\}} \varphi_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Funkcija $\varphi_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ je gustina raspodele verovatnoće *slučajne promenljive $\boldsymbol{X}$.*

I u slučaju n-dimenzionalne slučajne promenljive apsolutno neprekidnog tipa, radi jednostavnosti, dalje posmatramo samo slučaj $n = 2$ tj. dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu apsolutno neprekidnog tipa.

Neka je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom $\varphi_{X,Y}(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Marginalne gustine za slučajne promenljive X i Y su

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{X,Y}(x, y)dy \quad \text{i} \quad \varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{X,Y}(x, y)dx.$$

Definicija 1.10 *Neka je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva. Kažemo da su X i Y* nezavisne slučajne promenljive *ako za svako $x, y \in \mathbb{R}$ važi*

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

Teorema 1.5 *Slučajne promenljive X i Y su nezavisne ako i samo ako*

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x_i, y_j) &= p_X(x_i)p_Y(y_j) \quad \textit{za sve} \quad i, j = 1, 2, \ldots, \\ \varphi_{X,Y}(x, y) &= \varphi_X(x)\varphi_Y(y) \quad \textit{za sve} \quad x, y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

za diskretne i apsolutno neprekidne slučajne promenljive, respektivno.

Definicija 1.11 *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ sličajne promenljive definisane nad istim prostorom verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ako važi*

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \ldots F_{X_n}(x_n),$$

za svako $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, onda su slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne.

Transformacija višedimenzionalne slučajne promenljive posebno je interesantan problem sa stanovišta primene. Transformacijom jedne (Poglavlje 1.5) ili više slučajnih promenljivih dobija se nova slučajna promenljiva. Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive i funkcija $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija, onda se može odrediti raspodela slučajne promenljive $Z = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Radi jednostavnosti, razmotrićemo slučaj dvodimenzionalne slučajne promenljive.

Ako je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija, tada uređeni par (X, Y) transformišemo u jednu slučajnu promenljivu $Z = g(X, Y)$ diskretnog tipa. Skup vrednosti slučajne promenljive (X, Y) i odgovarajuće verovatnoće dati su sa (1.3) i (1.4), a sa $\mathcal{R}_Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ označavamo skup različitih vrednosti slučajne promenljive Z, gde je $z_k = g(x_i, y_j)$. Odgovarajuće verovatnoće $p_Z(z_k)$ date su sa

$$p_Z(z_k) = \sum_{i,j:g(x_i,y_j)=z_k} p_{X,Y}(x_i, y_j).$$

Ako je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija, tada kao rezultat kompozicije slučajne promenljive (X, Y) i funkcije g dobijamo slučajnu promenljivu $Z = g(X, Y)$. Funkcija raspodele F_Z slučajne promenljive Z data je sa

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(g(X, Y) < z) = \iint_{\{(x,y):g(x,y)<z\}} \varphi_{X,Y}(x, y)dxdy.$$

1.8 Matematičko očekivanje i disperzija slučajne promenljive

Definicija 1.12 *Neka je X slučajna promenljiva diskretnog tipa sa zakonom raspodele (1.1). Ako red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\ p_X(x_k)$ apsolutno konvergira,* matematičko očekivanje, *u oznaci $\mathbb{E}[X]$, slučajne promenljive X je*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\ p_X(x_k).$$

Definicija 1.13 *Neka je X slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom $\varphi_X(x)$. Ako integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\ \varphi_X(x)dx$ apsolutno konvergira,* matematičko očekivanje, *u oznaci $\mathbb{E}[X]$, slučajne promenljive X je*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ \varphi_X(x)dx.$$

Osobine matematičkog očekivanja:

1. $\mathbb{E}[c] = c$, gde je c konstanta,

2. $\mathbb{E}[cX] = c\,\mathbb{E}[X]$, gde je c konstanta,

3. ako slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n,\ n \in \mathbb{N}$, imaju matematička očekivanja, tada je
$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i],$$

4. ako je za svako $\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq 0$, tada je $\mathbb{E}[X] \geq 0$,

5. ako je $X \geq Y$ (za svako $\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq Y(\omega)$), tada je $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$,

6. ako su slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n,\ n \in \mathbb{N}$, nezavisne u parovima i imaju matematička očekivanja, tada važi
$$\mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{n} X_i\Big] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i],$$

7. $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] = 0$,

8. ako je slučajna promenljiva Y dobijena transformacijom slučajne promenljive X, tj. $Y = g(X)$ tada je
$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\ p_X(x_i),$$

za diskretnu slučajnu promenljivu X i

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ \varphi_X(x)dx,$$

za apsolutno neprekidnu slučajnu promenljivu X.

Specijalno, za $g(x) = x^\alpha$ važi

$$\mathbb{E}[X^\alpha] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^\alpha\ p_X(x_i),$$

kada je X diskretrna slučajna promenljiva i

$$\mathbb{E}[X^\alpha] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha\ \varphi_X(x)dx,$$

kada je X apsolutno neprekidna slučajna promenljiva.

Definicija 1.14 *Moment reda k, $k \in \mathbb{N}$, slučajne promenljive X je $\mathbb{E}[X^k]$. Centralni moment reda k, $k \in \mathbb{N}$, slučajne promenljive X je $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$.*

Iz prethodne definicije sledi da je matematičko očekivanje moment reda 1.

Definicija 1.15 *Centralni moment drugog reda slučajne promenljive X zove se* disperzija (varijansa) *slučajne promenljive X i označava sa $\mathbb{D}[X]$. Dakle,*

$$\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

Za izračunavanje disperzije često se koristi sledeći izraz:

$$\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Osobine disperzije:

1. $\mathbb{D}[X] \geq 0$,
2. $\mathbb{D}[X] = 0$ ako i samo ako je $X = const$,
3. ako je c konstanta, tada je
$$\mathbb{D}[cX] = c^2\ \mathbb{D}[X] \quad \text{i} \quad \mathbb{D}[X + c] = \mathbb{D}[X],$$
4. ako su slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, nezavisne i imaju disperziju, tada važi
$$\mathbb{D}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}[X_i].$$

Definicija 1.16 Standardno odstupanje (standardna devijacija) *slučajne promenljive X definiše se kao kvadratni koren iz disperzije tj. $\sqrt{\mathbb{D}[X]}$.*

Definicija 1.17 *Neka je X slučajna promenljiva sa matematičkim očekivanjem $\mathbb{E}[X]$ i disperzijom $\mathbb{D}[X]$.* Standardizovana (normalizovana) *slučajna promenljiva Z je*

$$Z = \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathbb{D}[X]}}.$$

Matematičko očekivanje i disperzija nekih slučajnih promenljivih:

1. **Bernulijeva raspodela.** Neka slučajna promenljiva X ima Bernulijevu raspodelu

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad p \in (0,1). \tag{1.5}$$

Tada

$$\mathbb{E}[X] = p, \quad \mathbb{D}[X] = p(1-p).$$

2. **Binomna raspodela.** Slučajna promenljiva $X : \mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$, može se predstaviti kao zbir n nezavisnih Bernulijevih slučajnih promenljivih, tj. $X = X_1 + \cdots + X_n$, gde su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa Bernulijevom raspodelom (1.5). Tada je

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np,$$

$$\mathbb{D}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$$

3. **Normalna raspodela.** Matematičko očekivanje i disperzija slučajne promenljive $Z : \mathcal{N}(0,1)$ su

$$\mathbb{E}[Z] = 0, \quad \mathbb{D}[Z] = 1.$$

Slučajna promenljiva $X : \mathcal{N}(m,\sigma)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ dobija se transformacijom $X = \sigma Z + m$, pa je

$$\mathbb{E}[X] = m, \quad \mathbb{D}[X] = \sigma^2.$$

Primer 1.8 *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(m,\sigma)$, i $\bar{X} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ njihova aritmetička sredina. Tada je*

$$\mathbb{E}[\bar{X}] = \mathbb{E}\Big[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\Big] = \frac{1}{n} nm = m,$$

$$\mathbb{D}[\bar{X}] = \mathbb{D}\Big[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\Big] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

1.9 Karakteristična funkcija

Osim funkcija raspodele, koje u potpunosti opisuju slučajne promenljive, po značaju se izdvajaju i karakteristične funkcije slučajnih promenljivih. Svakoj slučajnoj promenljivoj odgovara tačno jedna karakteristična funkcija i ona jedinstveno određuje raspodelu slučajne promenljive.

Definicija 1.18 Karakteristična funkcija *slučajne promenljive X, u oznaci $k_X(t)$, je funkcija $k_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zadata na sledeći način*

$$k_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ako je slučajna promenljiva X diskretnog tipa, tada je njena karakteristična funkcija

$$k_X(t) = \sum_j e^{itx_j}\, p_X(x_j).$$

Ako je slučajna promenljiva X apsolutno neprekidnog tipa, tada je njena karakteristična funkcija

$$k_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, \varphi_X(x)dx.$$

Osobine karakteristične funkcije:

1. $|k_X(t)| \leq 1$, gde je $|k|$ moduo kompleksne funkcije k,
2. $k_X(0) = 1$,
3. $k_X(-t) = \overline{k_X(t)}$, gde je $\overline{k}$ konjugovana funkcija za k,
4. $k_{aX+b}(t) = e^{itb}k_X(at)$,
5. ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je $k_{X+Y}(t) = k_X(t)k_Y(t)$.
6. ako za slučajnu promenljivu X postoje momenti reda n tj. postoji $\mathbb{E}[X^n]$, $n \in \mathbb{N}$, tada je
$$k_X(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(it)^r}{r!}\mathbb{E}[X^r] + o(t^n), \quad \lim_{t\to 0} \frac{o(t^n)}{t} = 0,$$
7. Ako postoji $\mathbb{E}[X^n]$, $n \in \mathbb{N}$, tada je $\mathbb{E}[X^r] = \frac{1}{i^r}x_X^{(r)}(0)$, $r = 1, \ldots, n$.

Sledeća teorema govori o neprekidnosti korespodencije između funkcija raspodele i karakterističnih funkcija.

Teorema 1.6 *Ako niz karakterističnih funkcija $k_{X_1}(t), k_{X_2}(t), \ldots$ konvergira ka $k(t)$ za svako $t \in \mathbb{R}$ i $k(t)$ je neprekidna u $t = 0$, tada niz odgovarajućih funkcija raspodele $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \ldots$ konvergira ka $F(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$, gde je $F(x)$ funkcija raspodele koja odgovara karakterističnoj funkciji $k(t)$.*

1.10 Nejednakosti Markova, Čebiševa i Kolmogorova

Nejednakosti Markova, Čebiševa i Kolmogorova predstavljaju važan alat u teoriji verovatnoće za procenu svojstva diskretnih i apsolutno neprekidnih slučajnih promenljivih kada je poznato matematičko očekivanje ili disperzija.

Teorema 1.7 ***(Nejednakost Markova)*** *Neka je X nenegativna slučajna promenljiva. Tada je za svako $\varepsilon > 0$*

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}. \tag{1.6}$$

Dokaz. Neka su $I_{\{X\geq\varepsilon\}}$ i $I_{\{X<\varepsilon\}}$ indikatori događaja $(X \geq \varepsilon)$ i $(X < \varepsilon)$, redom. Iz nenegativnosti slučajne promenljive X sledi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[XI_{(X\geq\varepsilon)}] + \mathbb{E}[X(1 - I_{(X\geq\varepsilon)})] \\
&\geq \mathbb{E}[XI_{(X\geq\varepsilon)}] \\
&\geq \mathbb{E}[\varepsilon I_{(X\geq\varepsilon)}] \\
&= \varepsilon\, P(X \geq \varepsilon).
\end{aligned}$$

□

Primer 1.9 *Radnici jedne firme koja se bavi anketiranjem stanovništva u proseku dnevno obave 10000 poziva. Odrediti verovatnoću da će radnici sutra obaviti preko 15000 poziva.*

Rešenje: Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj obavljenih poziva tokom jednog dana. Na osnovu pretpostavke primera je $\mathbb{E}[X] = 10000$. Na osnovu nejednakosti Markova (1.6) dobijamo

$$P(X \geq 15000) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{15000} = \frac{10000}{15000} = \frac{2}{3}.$$

Teorema 1.8 ***(Nejednakost Čebiševa)*** *Neka je X slučajna promenljiva sa konačnom disperzijom $\mathbb{D}[X]$. Tada je za svako $\varepsilon > 0$*

$$P\big(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\mathbb{D}[X]}{\varepsilon^2}. \tag{1.7}$$

Dokaz. Kako je $(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq 0$ možemo da primenimo nejednakost Markova (1.6) pa dobijamo

$$P\big((X - \mathbb{E}[X])^2 \geq a\big) \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}{a},\ \forall a > 0.$$

Iz jednakosti

$$P\big((X - \mathbb{E}[X])^2 \geq a\big) = P\big(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \sqrt{a}\big),$$

sledi

$$P\big(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \sqrt{a}\big) \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}{a},\ \forall a > 0.$$

Tada, $\forall\varepsilon > 0$ važi

$$P\big(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\mathbb{D}[X]}{\varepsilon^2}.$$

□

Primer 1.10 *Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj kišnih dana u Novom Sadu tokom jedne godine. Poznato je da je očekivani broj kišnih dana 128, a standardna devijacija 4. Proceniti verovatnoću da broj kišnih dana u Novom Sadu tokom jedne godine odstupa od očekivanog broja za 5 ili više dana.*

Rešenje: Da bi smo odredili traženu verovatnoću koristimo nejednakost Čebiševa (1.7). Kako je $\mathbb{E}[X] = 128$, $\varepsilon = 5$, i $\sqrt{\mathbb{D}[X]} = 4$, sledi

$$P\big(|X - 128| \geq 5\big) \leq \frac{16}{25} = 0.64.$$

Teorema 1.9 ***(Nejednakost Kolmogorova)*** *Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive takve da za $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ važi $\mathbb{E}[X_j] = 0$, $\mathbb{D}[X_j] < +\infty$ i neka je $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ važi*

$$P\Big(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{\mathbb{E}[S_n^2]}{\varepsilon^2}. \tag{1.8}$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Ako uvedemo sledeće oznake:

$$A = \{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\}, \quad A_1 = \{|S_1| \geq \varepsilon\},$$

$$A_k = \{|S_1| < \varepsilon, \ldots, |S_{k-1}| < \varepsilon, |S_k| \geq \varepsilon\}, \quad k \in \{2, \ldots, n\},$$

tada su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ međusobno disjunktni događaji i važi $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Sa I_k označimo indikator događaja A_k, pa sledi

$$\mathbb{E}[S_n^2] \geq \mathbb{E}[S_n^2 I_A] = \mathbb{E}\Big[S_n^2\Big(\sum_{k=1}^{n} I_k\Big)\Big] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[S_n^2 I_k].$$

Za svako $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^2 I_k] &= \mathbb{E}\big[(S_k + X_{k+1} + \cdots + X_n)^2 I_k\big] \\
&= \mathbb{E}[S_k^2 I_k] + 2\mathbb{E}\Big[S_k I_k \sum_{j=k+1}^{n} X_j\Big] + \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=k+1}^{n} X_j\Big)^2 I_k\Big].
\end{aligned}$$

Zbog nezavisnosti slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$ imamo

$$\mathbb{E}\Big[S_k I_k \sum_{j=k+1}^{n} X_j\Big] = \mathbb{E}[S_k I_k]\mathbb{E}\Big[\sum_{j=k+1}^{n} X_j\Big] = 0,$$

pa dalje sledi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^2 I_k] &= \mathbb{E}[S_k^2 I_k] + \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=k+1}^{n} X_j\Big)^2 I_k\Big] \geq \mathbb{E}[S_k^2 I_k], \\
\mathbb{E}[S_n^2] &\geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[S_k^2 I_k] \geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \varepsilon^2 P(A).
\end{aligned}$$

□

Glava 2

Zakoni velikih brojeva za slučajne promenljive

U ovom poglavlju definisane su četiri vrste konvergencije niza slučajnih promenljivih, kao i veze između njih. Formulisani su zakoni velikih brojeva Čebiševa i Hičina koji su primer slabih zakona velikih brojeva, i zakon velikih brojeva Kolmogorova, koji predstavlja jaki zakon velikih brojeva. Naveden je Bernštajnov dokaz Vajerštrasove teoreme koji predstavlja teorijsku primenu zakona velikih brojeva.

Literatura korišćena za izradu ovog poglavlja je [5, 13, 19].

2.1 Vrste konvergencija u teoriji verovatnoće

Neka su slučajna promenljiva X i niz slučajnih promenljivih $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definisani nad istim prostorom verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. U teoriji vreovatnoće razmatraju se četiri vrste konvergencije niza slučajnih promenljivih $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ka slučajnoj promenljivoj X.

Definicija 2.1 *Niz slučajnih promenljivih* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u verovatnoći *ka slučajnoj promenljivoj* X*, u oznaci* $X_n \xrightarrow{p} X,\ n \to \infty$*, ako za svako* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Definicija 2.2 *Niz slučajnih promenljivih* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ skoro sigurno konvergira (konvergira sa verovatnoćom 1) *ka slučajnoj promenljivoj* X*, u oznaci* $X_n \xrightarrow{s.s.} X,\ n \to \infty$*, ako važi*

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1.$$

Definicija 2.3 *Niz slučajnih promenljivih* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u srednjem stepena p*, gde je* $0 < p < \infty$*, ka slučajnoj promenljivoj* X*, u oznaci* $X_n \xrightarrow{L_p} X,\ n \to \infty$*, ako važi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[|X_n - X|^p\big] = 0.$$

Konvergencija u srednjem stepena 2 naziva se srednje kvadratna konvergencija *i označava* $X_n \xrightarrow{s.k.} X,\ n \to \infty.$

Definicija 2.4 *Niz slučajnih promenljivih* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u raspodeli *ka slučajnoj promenljivoj* X*, u oznaci* $X_n \xrightarrow{r} X,\ n \to \infty$*, ako za svaku ograničenu i neprekidnu funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *važi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)].$$

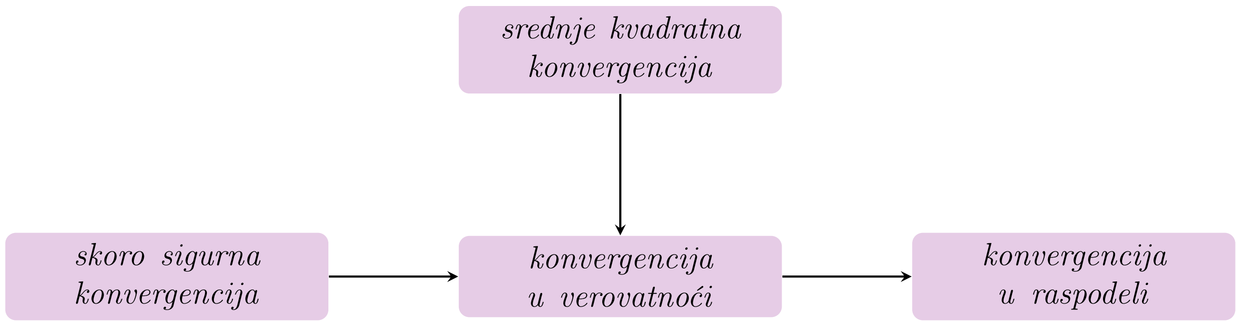
U nastavku su izložene teoreme koje prikazuju međusoban odnos navedenih tipova konvergencije. Teoreme su navedene bez dokaza, a oni se mogu videti u [13].

Teorema 2.1 *Ako* $X_n \xrightarrow{s.s.} X,\ n \to \infty$*, onda* $X_n \xrightarrow{p} X,\ n \to \infty$.

Teorema 2.2 *Ako* $X_n \xrightarrow{s.k.} X,\ n \to \infty$*, onda* $X_n \xrightarrow{p} X,\ n \to \infty$.

Teorema 2.3 *Ako* $X_n \xrightarrow{p} X,\ n \to \infty$*, onda* $X_n \xrightarrow{r} X,\ n \to \infty$.

Teorema 2.4 *Neka je* $0 < p < r$*. Tada, ako* $X_n \xrightarrow{L_r} X,\ n \to \infty$*, onda* $X_n \xrightarrow{L_p} X,\ n \to \infty$.



Slika 2.1: Međusobni odnos tipova konvergencije u teoriji verovatnoće

Skoro sigurna konvergencija se može ispitati i pomoću sledeće teoreme.

Teorema 2.5 *Niz nezavisnih slučajnih promenljivih* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *skoro sigurno konvergira ka slučajnoj promenljivoj* X*, kada* $n \to \infty$ *ako i samo ako je*

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) < +\infty.$$

Veza između konvergencije u verovatnoći i skoro sigurne konvergencije za diskretne slučajne promenljive data je u sledećoj teoremi.

Teorema 2.6 *Neka je* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz diskretnih slučajnih promenljivih koji konvergira u verovatnoći ka slučajnoj promenljivoj* X*. Tada niz* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira i skoro sigurno ka slučajnoj promenljivoj* X.

Sledeća teorema takođe govori o odnosu između konvergencije u verovatnoći i skoro sigurne konvergencije.

Teorema 2.7 *Ako* $X_n \xrightarrow{p} X,\ n \to \infty$*, onda postoji podniz* $\{n_k\} \subset \{n\}$ *takav da važi* $X_{n_k} \xrightarrow{s.s} X,\ n_k \to \infty$.

Konvergencija u raspodeli i konvergencija u verovatnoći ekvivalentne su u specijalnom slučaju, kada je u pitanju konvergencija ka konstanti.

Teorema 2.8 *Ako niz slučajnih promenljivih* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira u raspodeli ka* c*, gde je* c *konstanta, kada* $n \to \infty$*, onda taj niz konvergira i u verovatnoći ka* c*, kada* $n \to \infty$.

2.2 Zakoni velikih brojeva

Zakoni velikih brojeva bave se pitanjem konvergencije niza

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i], \quad n = 1, 2, \ldots$$

ka nuli, kada $n \to \infty$, gde je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoće.

2.2.1 Slabi zakon velikih brojeva

Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoće. Ako niz

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i], \quad n = 1, 2, \ldots$$

konvergira u verovatnoći ka slučajnoj promenljivoj X, onda za niz slučajnih promenljivih $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ važi *slabi zakon velikih brojeva.*

Zakon velikih brojeva Čebiševa

Teorema 2.9 *Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih i $C > 0$ konstanta takva da za svaki prirodan broj n važi $\mathbb{D}[X_n] \le C$. Ako je $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, onda važi*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow{p} 0, \quad n \to \infty.$$

Dokaz. Na osnovu nejednakosti Čebiševa (1.7), za svako $\varepsilon > 0$ dobijamo

$$P\Big(\Big|\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n}\Big| \ge \varepsilon\Big) \le \frac{\mathbb{D}[S_n]}{n^2\varepsilon^2} \le \frac{C}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

□

Napomena 2.1 *Kada slučajne promenljive X_n, $n = 1, 2, \ldots$, imaju Bernulijevu raspodelu datu sa (1.5), tada dobijamo* Bernulijev zakon velikih brojeva *koji je specijalan slučaj zakona velikih brojeva Čebiševa.*

Kako je

$$\mathbb{E}[S_n] = np \quad i \quad \mathbb{D}[S_n] = np(1-p),$$

sledi da je

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| \ge \varepsilon\Big) \le \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Zakon velikih brojeva Hičina

Teorema 2.10 *Neka je* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom i konačnim matematičkim očekivanjem* $\mathbb{E}[X_n] = m,\ n = 1, 2, \dots$ *Tada*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} m, \quad n \to \infty.$$

Dokaz. Kako je konvergencija u raspodeli ka konstanti ekvivalentna konvergenciji u verovatnoći ka toj konstanti (Teorema 2.8), dovoljno je dokazati da niz

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

konvergira u raspodeli ka m. Za karakterističnu funkciju $k_{X_j}(t)$ slučajne promenljive $X_j,\ j = 1, 2, \dots$ važi

$$k_{X_j}(t) = 1 + itm + o(t), \quad t \to 0.$$

Zato je

$$k_{\frac{S_n}{n}}(t) = \mathbb{E}\big[e^{it(\frac{S_n}{n})}\big] = \Big[k_{X_j}\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big]^n = \Big(1 + im\frac{t}{n} + o\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big)^n \longrightarrow e^{imt}, \quad n \to \infty.$$

Funkcija e^{imt} je neprekidna u $t = 0$, pa na osnovu Teoreme 1.6 sledi da funkcija raspodele slučajne promenljive $\frac{S_n}{n}$ konvergira ka funkciji raspodele slučajne promenljive sa karakterističnom funkcijom e^{imt}, za svako $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Kako je e^{imt} karakteristična funkcija konstante m sledi da $\frac{S_n}{n}$ konvergira u raspodeli ka m. □

Bez dokaza navodimo još jednu teoremu slabog zakona velikih brojeva koju su dokazali Kolmogorov i Feler.

Teorema 2.11 *Neka je* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz nezavisnih slučajnih promenljivih,* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz odgovarajućih funkcija raspodele,* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz realnih brojeva za koji važi* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ *i* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz brojeva dat sa* $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\le b_n} x\, dF_k(x)$. *Pretpostavimo da kada* $n \to \infty$ *važe jednakosti*

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>b_n} dF_k(x) = o(1), \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\le b_n} x^2\, dF_k(x) = o(1). \tag{2.2}$$

Tada važi

$$\frac{1}{b_n}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k - a_n\Big) \xrightarrow{p} 0, \quad n \to \infty. \tag{2.3}$$

Bernštajnov dokaz Vajerštrasove teoreme

Jedna teorijska primena slabih zakona velikih brojeva (u Čebiševljevoj formi) jeste konstruktivni dokaz poznate Vajerštrasove teoreme o aproksimaciji neprekidne funkcije polinomima.

Teorema 2.12 *Neka je* $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija za koju važi* $\sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f(x)| = M < +\infty$ *i neka je za svako* $n \in \mathbb{N}$

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

Bernštajnov polinom *n-tog reda pridružen funkciji* f. *Tada za svako* $\varepsilon > 0$ *važi nejednakost*

$$\sup_{0\leq x\leq 1} |B_n(f,x) - f(x)| \leq \omega(f;\varepsilon) + \frac{M}{2n\varepsilon^2},$$

gde je

$$\omega(f;\varepsilon) = \sup_{|x-y|\leq\varepsilon,\ x,y\in[0,1]} |f(x) - f(y)|.$$

Dokaz. Pretpostavi se da je $f \in C[0,1]$ i da se izvodi n nezavisnih eksperimenata sa verovatnoćom uspeha x. Neka je S_n broj uspešno završenih eksperimenata. Tada S_n ima $\mathcal{B}(n,x)$ raspodelu i

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

Za Bernštajnov polinom n-tog reda važi

$$B_n(f,x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right].$$

Za svako $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ važi

$$\begin{aligned}
|B_n(f,x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right]\right| \\
&\leq \omega(f;\varepsilon)\sum_{|\frac{k}{n}-x|\leq\varepsilon}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + 2M\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\varepsilon}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leq \omega(f;\varepsilon) + 2M\cdot P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \varepsilon\right) \\
&\leq \omega(f;\varepsilon) + 2M\cdot\frac{x(1-x)}{n\varepsilon^2} \\
&\leq \omega(f;\varepsilon) + \frac{M}{2n\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

□

2.2.2 Jaki zakon velikih brojeva

Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoće. Ako niz

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i], \quad n = 1, 2, \ldots$$

konvergira skoro sigurno ka slučajnoj promenljivoj X, onda za niz slučajnih promenljivih $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ važi *jaki zakon velikih brojeva.*

Zakon velikih brojeva Kolmogorova

Teorema 2.13 *Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih takav da važi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{D}[X_n]}{n^2} < +\infty$. Tada je*

$$P\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(X_k - \mathbb{E}[X_k]\big) = 0\Big) = 1.$$

Dokaz. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\mathbb{E}[X_j] = 0,\ \forall j$. Neka je

$$Y_n = \max_{1\le k\le 2^n}\Big|\sum_{j=1}^{k} X_j\Big|.$$

Za svako $k,\ 2^{n-1}\le k\le 2^n$ važi

$$\Big|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} X_j\Big| \le \frac{1}{2^{n-1}}\max_{1\le k\le 2^n}\Big|\sum_{j=1}^{k} X_j\Big| = \frac{Y_n}{2^{n-1}},$$

na osnovu čega sledi da je dovoljno dokazati da važi $P\Big(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Y_n}{2^n} = 0\Big) = 1$. Na osnovu nejednakosti Kolmogorova (1.8) sledi

$$P\left(\frac{Y_n}{2^n} > \varepsilon\right) = P(Y_n > 2^n\varepsilon) \le \frac{1}{2^{2n}\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{2^n}\mathbb{D}[X_j].$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{Y_n}{2^n} > \varepsilon\right) &\le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\sum_{j=1}^{2^n}\mathbb{D}[X_j] \\
&\le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{D}[X_j]\sum_{2^n>j}\frac{1}{4^n} \\
&\le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{D}[X_j]\frac{1}{j^2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} < +\infty,
\end{aligned}$$

pa na osnovu Teoreme 2.5 sledi $\frac{Y_n}{2^n}\xrightarrow{s.s.} 0.$ $\square$

Glava 3

Zakoni velikih brojeva za fazi brojeve

U ovom poglavlju predstavljeni su pojmovi potrebni za razumevanje zakona velikih brojeva za fazi brojeve. Pre svega, definisane su trougaone norme i trougaone konorme, kao i fazi skupovi i fazi brojevi, koji predstavljaju specijalan slučaj fazi skupova. Date su operacije na fazi skupovima zasnovane na trougaonim normama, kao i princip proširenja koji omogućuje da se aritmetičke operacije izvode na fazi brojevima. Poseban akcenat stavljen je na simetrične trougaone fazi brojeve za koje je dat zakon velikih brojeva, kao i primeri kada zakon velikih brojeva ne važi.

Tokom izrade ovog poglavlja korišćena je literatura [1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 15, 16, 17, 22].

3.1 Trougaone norme i konorme

Pojam trougaone norme prvenstveno se vezuje za teoriju probabilističkih metričkih prostora. U matematičku literaturu uveo ih je američki matematičar Karl Menger, a konačan skup aksioma za trougaone norme objavili su Švajcer i Sklar. Danas su našle primenu u mnogim oblastima teorijske i primenjene matematike, a pre svega u teoriji fazi skupova i fazi logike.

Rezultati teorije fazi skupova prikazani u ovom delu mogu se opširnije naći u [1, 16].

Definicija 3.1 Trougaona norma T (t-norma) *je funkcija* $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *takva da za svako* $x, y, z \in [0,1]$ *važi*

$(T1)$ $T(x,y) = T(y,x)$ *(komutativnost)*

$(T2)$ $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y),z)$ *(asocijativnost)*

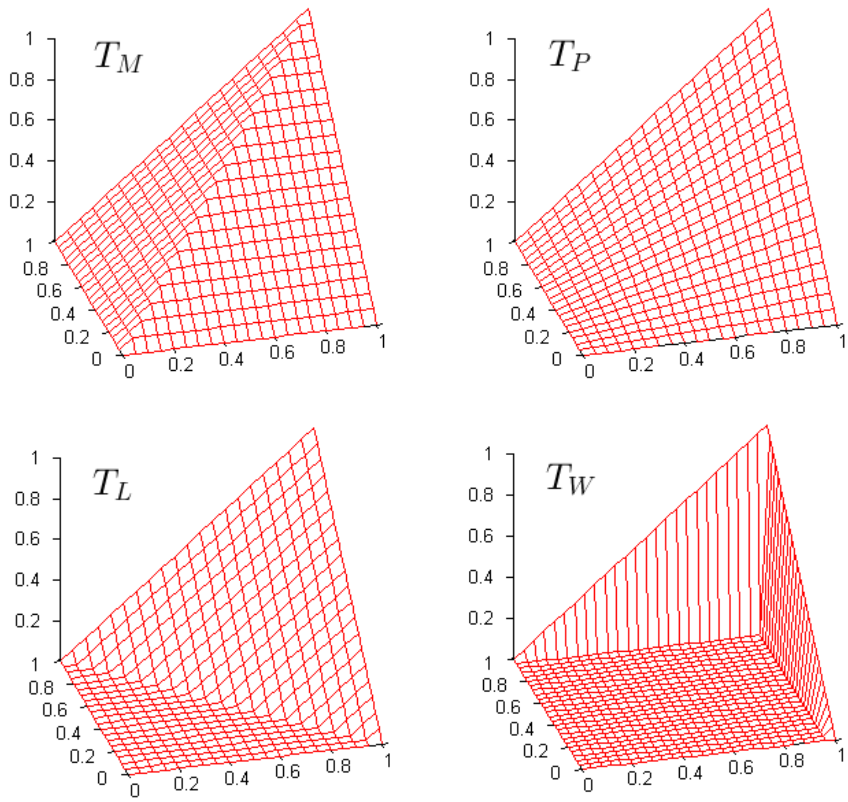
$(T3)$ $T(x,y) \leq T(x,z)$ *za* $y \leq z$ *(monotonost)*

$(T4)$ $T(x,1) = x$ *(rubni uslov).*

U sledeća dva primera navedene su osnovne trougaone norme.

Primer 3.1 *Sledeće četiri trougaone norme smatraju se najvažnijim t-normama:*

1. *Minimum t-norma:* $T_M(x,y) = \min(x,y)$,
2. *Proizvod t-norma:* $T_P(x,y) = xy$,
3. *Lukašijevičeva t-norma:* $T_L(x,y) = \max(0, x+y-1)$,
4. *Norma drastičnog preseka:* $T_W(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & , \quad \max(x,y)=1 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$.



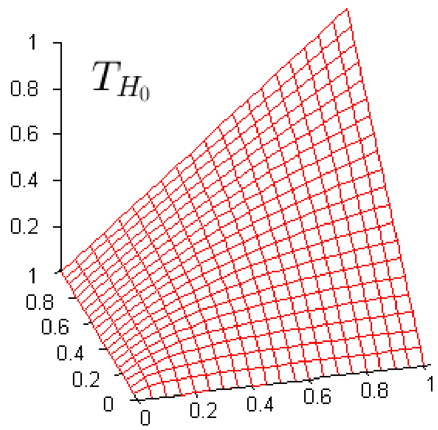
Slika 3.1: Grafički prikaz trougaonih normi T_M, T_P, T_L i T_W

Za zakon velikih brojeva koji se posmatra u ovom radu potrebno je definisati Hamaherovu t-normu.

Primer 3.2 *Hamaherova t-norma sa parametrom $\gamma > 0$, u oznaci T_{H_γ}, definisana je sa*

$$T_{H_\gamma} = \frac{xy}{\gamma + (1-\gamma)(x+y-xy)}.$$

Hamaherova t-norma za $\gamma = 0$ je $T_{H_0}(x,y) = \dfrac{xy}{x+y-xy}$.



Slika 3.2: Grafički prikaz Hamaherove trougaone norme T_{H_0}

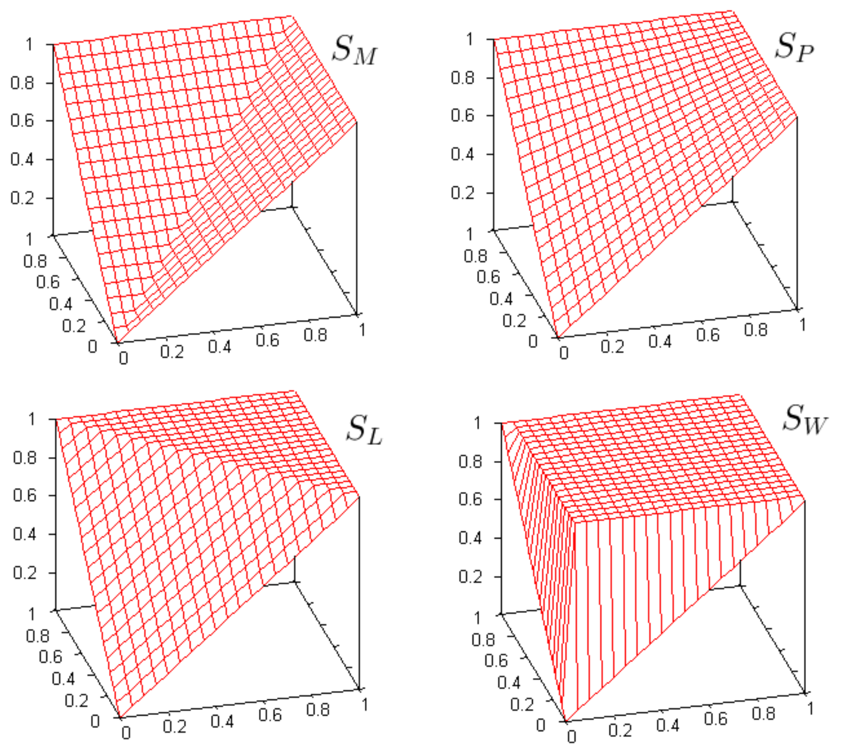
U nastavku navedena je definicija trougaone konorme, koja se od trougaone norme razlikuje samo po rubnom uslovu, kao i primeri najvažnijih trougaonih konormi koje su dualne t-normama iz Primera 3.1.

Definicija 3.2 Trougaona konorma S (t-konorma) *je funkcija* $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ *takva da je za svako* $x, y, z \in [0,1]$

$(S1)$	$S(x,y) = S(y,x)$	*(komutativnost)*
$(S2)$	$S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$	*(asocijativnost)*
$(S3)$	$S(x,y) \leq S(x,z)$ *za* $y \leq z$	*(monotonost)*
$(S4)$	$S(x,0) = x$	*(rubni uslov).*

Primer 3.3 *Sledeće četiri trougaone konorme smatraju se najvažnijim t-konormama:*

1. *Maksimum t-konorma:* $S_M(x,y) = \max(x,y)$,
2. *Suma verovatnoće:* $S_P(x,y) = x + y - xy$,
3. *Lukašijevičeva t-konorma:* $S_L(x,y) = \min(1, x+y)$,
4. *Drastična suma:* $S_W(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & , \quad \min(x,y) = 0 \\ 1 & , \quad \text{inače} \end{cases}$.



Slika 3.3: Grafički prikaz trougaonih konormi S_M, S_P, S_L i S_W

Švajcer i Sklar su trougaonu konormu S predstavili kao dualnu operaciju za datu trougaonu normu T. Ta veza između trougaonih normi i konormi opisana je u sledećoj teoremi.

Teorema 3.1 *Funkcija $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ je t-konorma ako i samo ako postoji t-norma $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ takva da za sve $x, y \in [0,1]$ važi*

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y).$$

3.1.1 Osobine t-normi

Teorema 3.2 *Trougaona norma T_M je jedina t-norma koja zadovoljava uslov*

$$T(x,x) = x \quad \textit{za svako } x \in (0,1).$$

Dokaz. Neka za trougaonu normu T važi $T(x,x) = x$ za sve $x \in (0,1)$. Tada za $y \leq x < 1$ na osnovu monotonosti trougaone norme T imamo

$$y = T(y,y) \leq T(x,y) \leq T_M = \min(x,y) = y.$$

Na osnovu komutativnosti i rubnog uslova trougaone norme T na kraju sledi $T = T_M$. $\square$

Teorema 3.3 *Trougaona norma T_W je jedina t-norma koja zadovoljava uslov*

$$T(x,x) = 0 \quad \textit{za svako } x \in (0,1).$$

Dokaz. Neka za trougaonu normu T važi $T(x,x) = 0$ za sve $x \in (0,1)$. Tada za svako $y \in [0,x)$ važi
$$0 \leq T(x,y) \leq T(x,x) = 0,$$
odakle dobijamo $T = T_W$. □

Definicija 3.3 *Trougaona norma T_1 je* slabija *od trougaone norme T_2, u oznaci $T_1 \leq T_2$, ako važi da je $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$, za svako $(x,y) \in [0,1]^2$. Takođe, kažemo da je trougaona norma T_2* jača *od trougaone norme T_1.*

U sledećoj teoremi opisan je poredak nekih trougaonih normi iz Primera 3.1.

Teorema 3.4 *Za svaku trougaonu normu T i za sve $(x,y) \in [0,1]^2$ važi*
$$T_W(x,y) \leq T(x,y) \leq T_M(x,y).$$

Dakle, t-norma T_M je najjača, a t-norma T_W najslabija i važi
$$T_W \leq T_L \leq T_P \leq T_M.$$

Kako je u Teoremi 3.1 trougaona konorma S definisana kao dualna operacija trougaone norme T, imamo obrnut poredak konormi iz Primera 3.3
$$S_M \leq S_P \leq S_L \leq S_W.$$

Znači, može se pokazati da važi sledeća teorema.

Teorema 3.5 *Za svaku trougaonu konormu S i za sve $(x,y) \in [0,1]^2$ važi*
$$S_M(x,y) \leq S(x,y) \leq S_W(x,y).$$

3.1.2 Neprekidnost i algebarski aspekt

Za normu drastičnog preseka T_W (Primer 3.1) i njoj dualnu konormu S_W (Primer 3.3) može se primetiti da nisu neprekidne. Osnovne t-norme T_M, T_P i T_L, kao i njihove dualne t-konorme S_M, S_P i S_L, jesu neprekidne.

U nastavku je izložena teorema o neprekidnosti t-normi u smislu neprekidnosti funkcije jedne promenljive, kao i definicja striktne t-norme koja je neprekidna u smislu neprekidnosti funkcije dve promenljive.

Teorema 3.6 *Trougaona norma $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ je* neprekidna *ako i samo ako je neprekidna kao funkcija jedne promenljive po svojoj prvoj (drugoj) komponenti, tj. ako je za svako $y_0 \in [0,1]$ ($x_0 \in [0,1]$) funkcija $T(\cdot, y_0) : [0,1] \to [0,1]$ ($T(x_0, \cdot) : [0,1] \to [0,1]$), $x \mapsto T(x,y_0)$ ($y \mapsto T(x_0,y)$) neprekidna.*

Definicija 3.4 *Trougaona norma $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ je* striktna *ako je neprekidna kao funkcija dve promenljive i ako važi*
$$T(x,y) < T(x,z), \quad \text{za svako } x > 0,\ y < z.$$

Definicija 3.5 *Neka je* $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *t-norma i* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. n-ti stepen $x_T^{(n)}$ elementa x *definisan je na sledeći način*

$$x_T^{(n)} = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ T(\overbrace{x, \ldots, x}^{n-puta}) & , \quad n \geq 1 \end{cases},$$

gde je $T(\overbrace{x, \ldots, x}^{n-puta}) = T(T(\overbrace{x, \ldots, x}^{(n-1)-puta}), x)$, $n \geq 3$.

Definicija 3.6 *Neka je* $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *proizvoljna t-norma.*

1. *Element* $a \in [0,1]$ *je* idempotentan element *za* T *ako* $T(a,a) = a$.

2. *Element* $a \in (0,1)$ *je* nilpotentan element *za* T *ako postoji* $n \in \mathbb{N}$ *takvo da* $a_T^{(n)} = 0$.

3. *Element* $a \in (0,1)$ *je* delitelj nule *za* T *ako postoji* $b \in (0,1)$ *takvo da* $T(a,b) = 0$.

Primer 3.4 *U slučaju minimum t-norme* T_M *svaki element je idempotentan, tj. za svako* $a \in [0,1]$ *važi* $T_M(a,a) = a$. *Minimum t-norma* T_M *nema nilpotentne elemente kao ni delitelje nule.*

Još neke klase t-normi su navedene u definiciji koja sledi.

Definicija 3.7 *Neka je* $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *proizvoljna t-norma.*

1. *t-norma* T *zadovoljava* zakon kancelacije *ako iz* $T(x,y) = T(x,z)$ *sledi da* $x = 0$ *ili* $y = z$.

2. *t-norma* T *je* arhimedovska *ako za svako* $(x,y) \in (0,1)^2$ *postoji* $n \in \mathbb{N}$ *takvo da* $x_T^{(n)} < y$.

3. *t-norma* T *ima* granično svojstvo *ako za svako* $x \in (0,1)$ *je* $\lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = 0$.

Za zakone velikih brojeva koji se posmatraju u ovom radu potrebno je definisati aditivni generator trougaone norme T.

Definicija 3.8 *Neka su* $[a,b]$ *i* $[c,d]$ *dva zatvorena podintervala od* $[-\infty, +\infty]$ *i neka je* $f : [a,b] \to [c,d]$ *monotona funkcija koja nije konstanta.* Pseudo-inverzna funkcija*, u oznaci* $f^{[-1]} : [c,d] \to [a,b]$, *definisana je sa*

$$f^{[-1]}(y) = \sup\{x \in [a,b] : (f(x) - f(y))(f(b) - f(a)) < 0\}.$$

Teorema 3.7 *Neka je* $f : [0,1] \to [0,\infty]$ *striktno opadajuća funkcija sa* $f(1) = 0$ *tako da* $f(x) + f(y) \in \mathrm{Range}(f) \cup [f(0^+), \infty]$ *za sve* $(x,y) \in [0,1]^2$. *Funkcija* $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *data sa*

$$T(x,y) = f^{[-1]}(f(x) + f(y))$$

je t-norma.

Ako je funkcija f iz prethodne definicije još i neprekidna sa desna u 0 onda je zovemo *aditivni generator* trougaone norme T.

Primer 3.5 *Funkcija* $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$ *je aditivni generator za Hamaherovu t-normu iz Primera 3.2, tj.* $T_{H_0}(x,y) = f^{[-1]}(f(x) + f(y))$.

3.2 Fazi skupovi

Karakteristična funkcija „običnog" skupa $A \subset U$, gde je U univerzalni skup, u oznaci χ_A, je preslikavanje $\chi_A : U \to \{0,1\}$ definisano sa

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}.$$

Granice skupa A su strogo definisane pa element $x \in U$ ili pripada ili ne pripada skupu A. Međutim, to nije slučaj i kod fazi skupova. Proizvoljan element iz univerzalnog skupa može delimično da pripada fazi skupu i stepen pripadnosti tog elementa fazi skupu uzima vrednosti iz intervala $[0,1]$.

U matematičkoj literaturi pojam fazi skupa javlja se 1965. godine u radu *„Fazi skupovi"* matematičara Lotfija Zadeha.

Definicija 3.9 Funkcija pripadnosti *za fazi skupove, u oznaci* μ, *je preslikavanje* $\mu : U \to [0,1]$ *gde je* U *univerzalni skup.*

Primer 3.6 *Karakteristična funkcija „običnog" skupa* A *jeste funkcija pripadnosti koja uzima samo vrednosti* 0 *ili* 1*.*

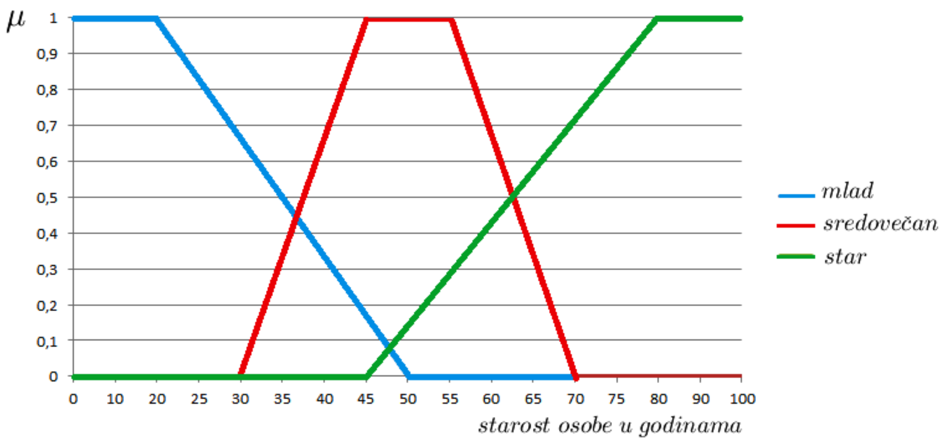
Definicija 3.10 *Neka je* $A \subset U$ *klasičan skup.* Fazi skup $\mathcal{A}$ *se definiše kao skup uređenih parova*

$$\mathcal{A} = \big\{(x, \mu_{\mathcal{A}}(x)) : x \in A,\ \mu_{\mathcal{A}}(x) \in [0,1]\big\},$$

gde je $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ *funkcija pripadnosti. Ona predstavlja stepen pripadnosti nekog elementa* $x \in A$ *fazi skupu* $\mathcal{A}$

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) : A \to [0,1].$$

Primer 3.7 *Neka je* U *skup svih ljudi. Posmatramo tri fazi podskupa:* $\mathcal{A}$ *„mladi ljudi",* $\mathcal{B}$ *„sredovečni ljudi" i* $\mathcal{C}$ *„stari ljudi". Funkcije pripadnosti fazi podskupova* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *i* $\mathcal{C}$ *moguće je grafički predstaviti kao na Slici 3.4.*



Slika 3.4: Grafik funkcije pripadnosti za skupove $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$

Sa grafika vidimo da osoba koja ima 25 godina pripada fazi skupu mladih ljudi sa stepenom pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(25) = 0.8$*, dok osoba koja ima 47 godina pripada fazi skupu sredovečnih ljudi sa stepenom pripadnosti* $\mu_{\mathcal{B}}(47) = 1$*, ali pripada i skupovima mladih i starih ljudi sa malim stepenom pripadnosti.*

Funkcije pripadnosti za fazi skupove $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ iz Primera 3.7 nisu jedinstveno određene. Uobičajeno je da se kod ovakvih primera funkcije pripadnosti definišu intuitivno, na osnovu prethodnog znanja i iskustva.

Za fazi skup $\mathcal{A}$ kažemo da je *normalizovan* ako postoji $x \in \mathcal{A}$ u kom funkcija pripadnosti dostiže maksimalan stepen tj. vrednost 1. Ako fazi skup nije normalizovan moguće ga je normalizovati. Prilikom normalizovanja fazi skupa $\mathcal{A}$ potrebno je da se normalizuje funkcija pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(x)$, tj. posmatra se nova funkcija pripadnosti data sa $\dfrac{\mu_{\mathcal{A}}(x)}{\max \mu_{\mathcal{A}}(x)}$. Očigledno je da ona uzima vrednosti iz zatvorenog intervala $[0, 1]$.

3.2.1 Operacije na fazi skupovima

Kako fazi skupovi predstavljaju uopštenje klasičnih skupova prirodno je zaključiti da se na fazi skupovima takođe definišu operacije unije, preseka i komplementa. Definicije preseka i unije fazi skupova baziraju se na trougaonim normama i trougaonim konormama. Osobine operacija preseka, unije i komplementa koje važe na klasičnim skupovima prenose se i na fazi skupove.

Definicija 3.11 Unija fazi skupova $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$*, u oznaci* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$*, definiše se preko funkcije pripadnosti* μ *na sledeći način*

$$\mu_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x) = \max(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)), \ \textit{za sve } x \in U.$$

Definicija 3.12 Presek fazi skupova $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$*, u oznaci* $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$*, definiše se preko funkcije pripadnosti* μ *na sledeći način*

$$\mu_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(x) = \min(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)), \ \textit{za sve } x \in U.$$

Iz navedenih definicija sledi da su unija i presek fazi skupova definisani preko konorme S_M, i norme T_M, respektivno, tj.

$$\mu_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x) = S_M(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)) \quad \text{i} \quad \mu_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(x) = T_M(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)).$$

Trougaona norma predstavlja uopštenje operacije preseka, a trougaona konorma predstavlja uopštenje operacije unije, pa se definicije preseka i unije mogu se proširiti na druge t-norme i t-konorme.

Definicija 3.13 *Neka je* $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ *proizvoljna t-norma.* T-presek *fazi skupova* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ *definiše se kao*

$$\mu_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(x) = T(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)), \ \textit{za sve } x \in U.$$

Definicija 3.14 *Neka je* $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ *proizvoljna t-konorma.* S-unija *fazi skupova* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ *definiše se kao*

$$\mu_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x) = S(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)), \ \textit{za sve } x \in U.$$

Definicija 3.15 Komplement fazi skupa $\mathcal{A}$, *u oznaci* $\mathcal{A}^c$, *definiše se preko funkcije pripadnosti* μ *na sledeći način*

$$\mu_{\mathcal{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\mathcal{A}}(x), \ \textit{za sve } x \in U.$$

Kažemo da je fazi skup $\mathcal{B}$ *podskup* fazi skupa $\mathcal{A}$, u oznaci $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, ako je $\mu_{\mathcal{B}}(x) \leq \mu_{\mathcal{A}}(x)$, za sve $x \in U$.

Definicija 3.16 Nosač *fazi skupa* $\mathcal{A}$, *u oznaci* $\mathrm{supp}(\mathcal{A})$, *je klasičan skup svih elemenata* $x \in U$ *čija je vrednost funkcije pripadnosti veća od nule, tj.*

$$\mathrm{supp}(\mathcal{A}) = \{x : \mu_{\mathcal{A}}(x) > 0\}.$$

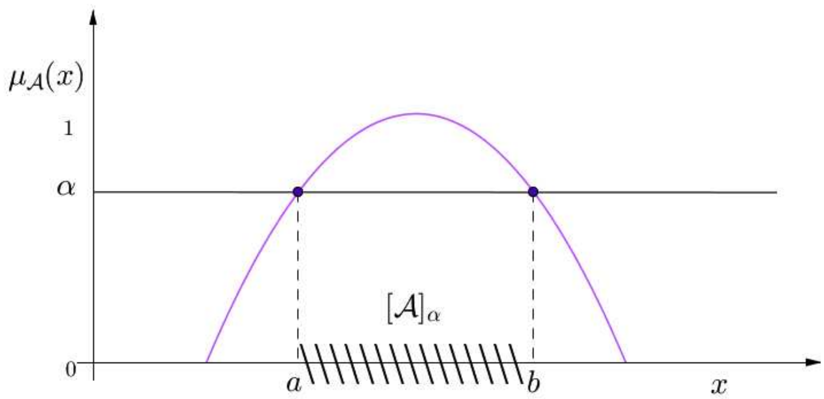
Definicija 3.17 $\alpha-$presek *fazi skupa* $\mathcal{A}$ *definiše se kao klasičan skup na sledeći način*

$$[\mathcal{A}]_\alpha = \{x : \mu_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0,1].$$

Ako je vrednost α jednaka nuli

$$[\mathcal{A}]_0 = \{\overline{x : \mu_{\mathcal{A}}(x) > 0}\},$$

gde je sa $\{\overline{x : \mu_{\mathcal{A}}(x) > 0}\}$ označeno zatvaranje skupa $\{x : \mu_{\mathcal{A}}(x) > 0\}$.



Slika 3.5: Primer $\alpha-$preseka

Ako je $\alpha \leq \beta$ tada je $[\mathcal{A}]_\beta \subseteq [\mathcal{A}]_\alpha$ i za sve fazi skupove $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ važi

$$[\mathcal{A}\cup\mathcal{B}]_\alpha = [\mathcal{A}]_\alpha \cup [\mathcal{A}]_\beta \quad \text{i} \quad [\mathcal{A}\cap\mathcal{B}]_\alpha = [\mathcal{A}]_\alpha \cap [\mathcal{A}]_\beta.$$

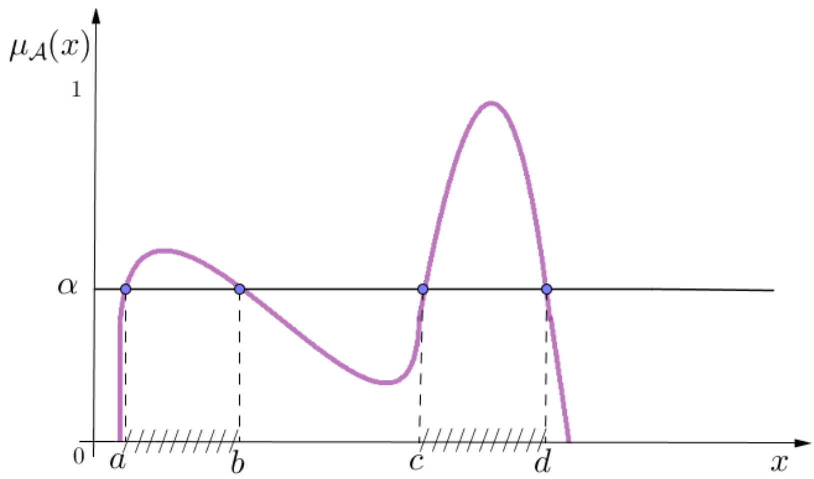
Konveksnost fazi skupova se definiše na sledeći način.

Definicija 3.18 *Fazi skup* $\mathcal{A}$ *je* konveksan *ako i samo ako za svako* $x_1, x_2 \in U,\ \alpha \in [0,1]$ *važi*

$$\mu_{\mathcal{A}}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq min(\mu_{\mathcal{A}}(x_1), \mu_{\mathcal{A}}(x_2)).$$

Očigledno je da je fazi skup $\mathcal{A}$ konveksan ako su svi njegovi $\alpha-$preseci konveksni podskupovi od $\mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1]$.

Fazi skup čiji je $\alpha-$presek prikazan na Slici 3.5 je konveksan, dok fazi skup na Slici 3.6 nije konveksan.



Slika 3.6: $\alpha-$presek nekonveksnog fazi skupa

Standardne aritmetičke operacije koje su definisane sa dva fazi skupa proširuju se na konačan broj fazi skupova na sledeći način.

Zadehov princip proširenja za minimum normu:

Neka su $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ fazi podskupovi klasičnih skupova $X_1, \ldots, X_n$ respektivno i neka je dato preslikavanje $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ takvo da za svaku n-torku $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ važi $f(x_1, \ldots, x_n) = y \in Y$. Tada je $\mathcal{B} = f(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$ fazi podskup od Y čija je funkcija pripadnosti

$$\mu_{\mathcal{B}}(y) = \begin{cases} \sup_y \min\left(\mu_{\mathcal{A}_1}(x_1), \ldots, \mu_{\mathcal{A}_n}(x_n)\right) & , \text{ ako postoji } y = f(x_1, \ldots, x_n) \\ 0 & , \text{ inače} \end{cases}.$$

Zadehov princip proširenja za proizvoljnu normu:

Neka su $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ fazi podskupovi klasičnih skupova $X_1, \ldots, X_n$ respektivno i neka je dato preslikavanje $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ takvo da za svaku n-torku $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ važi $f(x_1, \ldots, x_n) = y \in Y$. Za proizvoljnu trougaonu normu T kao rezultat uopštenog principa proširenja dobija se fazi podskup $\mathcal{B} \in Y$, $\mathcal{B} = f(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$ sa funkcijom pripadnosti

$$\mu_{\mathcal{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{y} T\big(\mu_{\mathcal{A}_1}(x_1), \ldots, \mu_{\mathcal{A}_n}(x_n)\big) & , \text{ ako postoji } y = f(x_1, \ldots, x_n) \\ \\ 0 & , \text{ inače} \end{cases} .$$

Ako se za t-normu uzme najjača trougaona norma T_M, dobija se originalni Zadehov princip proširenja.

3.3 Fazi brojevi

U teoriji fazi skupova od posebnog značaja izdvajaju se fazi skupovi definisani nad skupom realnih brojeva $\mathbb{R}$ koji se nazivaju *fazi brojevi.*

Definicija 3.19 *Za fazi skup $\mathcal{A}$ nad skupom realnih brojeva $\mathbb{R}$ kažemo da je* fazi broj, *u oznaci $\boldsymbol{A}$, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

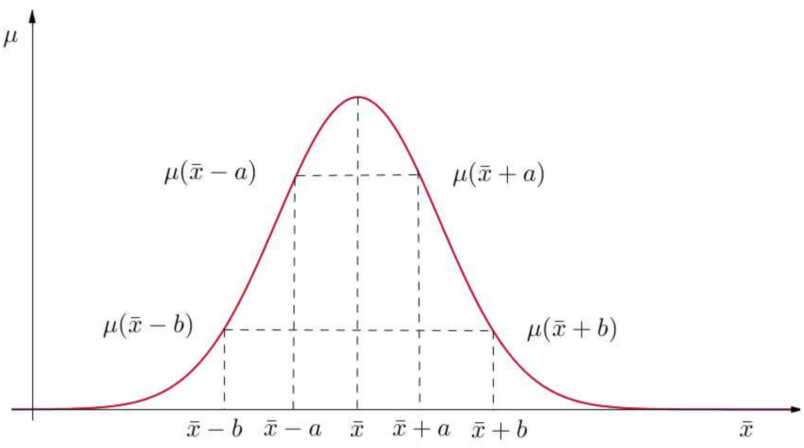
1. *$\mathcal{A}$ je normalizovan skup, tj. postoji bar jedno $\bar{x} \in \mathbb{R}$ takvo da je $\mu_{\boldsymbol{A}}(\bar{x}) = 1$,*
2. *$\mathcal{A}$ je konveksan skup,*
3. *funkcija pripadnosti $\mu_{\boldsymbol{A}}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ je po delovima neprekidna.*

Modalna vrednost fazi broja $\mathbf{A}$ je vrednost $\bar{x}$ koja pokazuje maksimalni stepen pripadnosti tj. $\mu_{\mathbf{A}}(\bar{x}) = 1$.

Napomena 3.1 *U zavisnosti od autora postoji više definicija fazi brojeva. Neki autori definišu fazi broj kao skup za koji postoji tačno jedno $\bar{x} \in \mathbb{R}$ takvo da je $\mu_{\boldsymbol{A}}(\bar{x}) = 1$.*

Definicija 3.20 *Fazi broj $\boldsymbol{A}$ je* simetričan *ako njegova funkcija pripadnosti zadovoljava sledeću jednakost*

$$\mu_{\boldsymbol{A}}(\bar{x} + x) = \mu_{\boldsymbol{A}}(\bar{x} - x), \quad \textit{za svako } x \in \mathbb{R}.$$



Slika 3.7: Primer simetričnog fazi broja

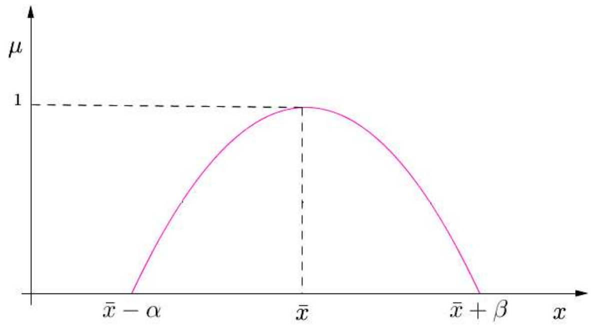
U nastavku su navedeni fazi brojevi koji se najčešće javljaju u praksi.

L-R fazi brojevi

L-R fazi brojevi jesu najčešći primer reprezentacije fazi brojeva. U samom nazivu L-R fazi brojeva (eng. *left-right*) krije se zamisao da funkcija pripadnosti fazi broja ima različite oblike levo i desno od modalne vrednosti $\bar{x}$.

Definicija 3.21 *Neka su L i R opadajuće, neprekidne funkcije na $[0,1]$ takve da je $L(0) = R(0) = 1$ i $L(1) = R(1) = 0$. L-R fazi broj, u oznaci $\boldsymbol{A} = (\bar{x}, \alpha, \beta)$, gde je $\bar{x}$ modalna vrednost, a α i β su tzv. širine, je funkcija koja slika skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ u interval $[0,1]$ i čija je funkcija pripadnosti zadata na sledeći način*

$$\mu_{\boldsymbol{A}}(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq \bar{x} - \alpha \\ L\Big(\dfrac{\bar{x} - x}{\alpha}\Big) & , \ \bar{x} - \alpha < x \leq \bar{x} \\ R\Big(\dfrac{x - \bar{x}}{\beta}\Big) & , \ \bar{x} < x \leq \bar{x} + \beta \\ 0 & , \ x > \bar{x} + \beta \end{cases}.$$

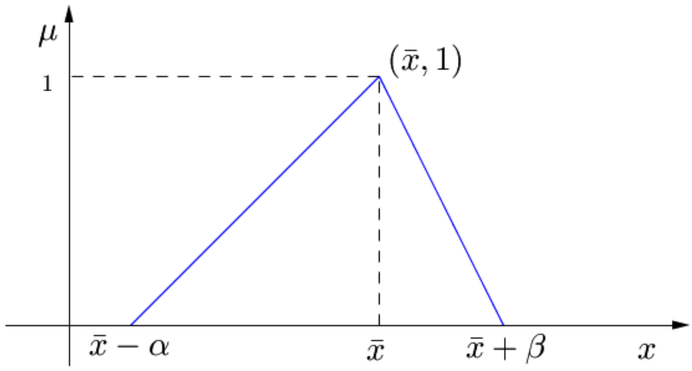


Slika 3.8: Grafički prikaz funkcije pripadnosti L-R fazi broja

Specijalno za $L(x) = R(x) = 1 - x$ dobija se *trougaoni fazi broj*. Trougaoni fazi brojevi takođe se nazivaju i linearni fazi brojevi jer je njihova funkcija pripadnosti linearna funkcija definisana na sledeći način

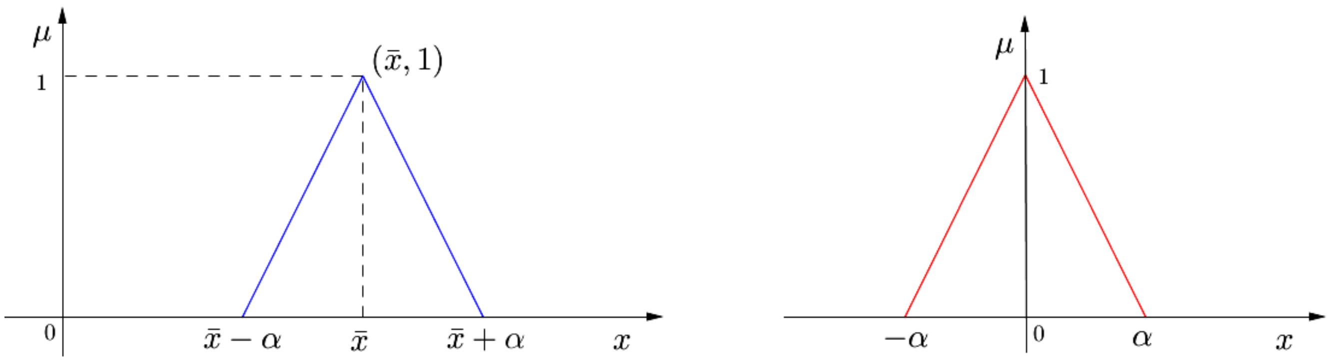
$$\mu(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x - \bar{x}}{\alpha} & , \ \bar{x} - \alpha < x < \bar{x} \\ 1 - \dfrac{x - \bar{x}}{\beta} & , \ \bar{x} \leq x < \bar{x} + \beta \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}.$$

gde je $[\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \beta]$ nosač fazi broja, a tačka $(\bar{x}, 1)$ je vrh, gde je $\bar{x}$ modalna vrednost i 1 njen stepen pripadnosti.



Slika 3.9: Trougaoni fazi broj

Ako se modalna vrednost $\bar{x}$ nalazi tačno na sredini nosača $[\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \beta]$, tj ako je $\bar{x} = \dfrac{(\bar{x} - \alpha) + (\bar{x} + \beta)}{2}$, posmatrani fazi broj je *simetričan trougaoni fazi broj*.



Slika 3.10: Simetrični trougaoni fazi brojevi

Svaki trougaoni fazi broj može biti konstruisan na osnovu tri zadate vrednosti: $\bar{x} - \alpha$, $\bar{x}$ i $\bar{x} + \beta$, koje kraće pišemo a_1, a_M i a_2, respektivno. Trougaoni fazi broj označavamo sa $\mathbf{A} = \mathrm{tfn}(\bar{x}, \alpha, \beta)$ ili $\mathbf{A} = (a_1, a_M, a_2)$. Levi trougaoni fazi broj, u oznaci $\mathbf{A}_l$, je $\mathbf{A}_l = (\bar{x} - \alpha, \bar{x}, \bar{x})$ i u praksi opisuje pojave poput velikog profita, velikog rizika... Desni trougaoni fazi broj, u oznaci $\mathbf{A}_r$, je $\mathbf{A}_r = (\bar{x}, \bar{x}, \bar{x} + \beta)$ i u praksi opisuje npr. mali profit, mali rizik... Simetričan trougaoni fazi broj označavamo sa $\mathbf{A} = (\bar{x}, \alpha)$.

L-R fazi intervali

Ako za fazi broj $\mathbf{A}$ postoji više od jedne modalne vrednosti onda za taj broj kažemo da je *fazi interval*.

L-R fazi interval, u oznaci $\mathbf{A} = (l, r, \alpha, \beta)$, definiše se preko funkcije pripadnosti na sledeći način

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq l - \alpha \\ L\Big(\dfrac{l-x}{\alpha}\Big) & , \quad l - \alpha < x \leq l \\ 1 & , \quad l < x \leq r \\ R\Big(\dfrac{x-r}{\beta}\Big) & , \quad r < x \leq r + \beta \\ 0 & , \quad x > r + \beta \end{cases}$$

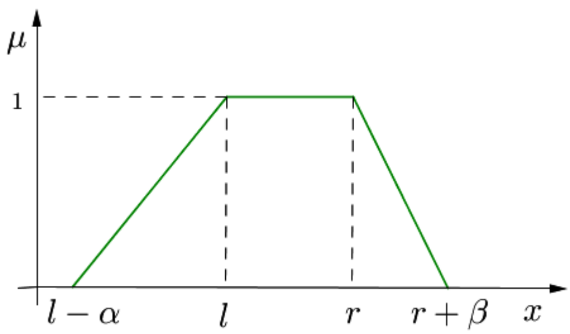
Tačke l i r nazivaju se levi i desni vrh, $\alpha > 0$ leva širina i $\beta > 0$ desna širina za $\mathbf{A}$.

Specijalno, za $L(x) = R(x) = 1 - x$ dobijamo *trapezoidni fazi interval.* Često se termin trapezoidni fazi interval izjednačava sa terminom trapezoidni fazi broj, pa se taj naziv koristi u daljem izlaganju. Trougaoni fazi brojevi predstavljaju specijalan slučaj trapezoidnih fazi brojeva kada je $l = r = \bar{x}$.
Funkcija pripadnosti za trapezoidni fazi broj zadata je na sledeći način

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x-l}{\alpha} & , \quad l - \alpha \leq x \leq l, \\ 1 & , \quad l \leq x \leq r, \\ 1 - \dfrac{x-r}{\beta} & , \quad r \leq x \leq r + \beta \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

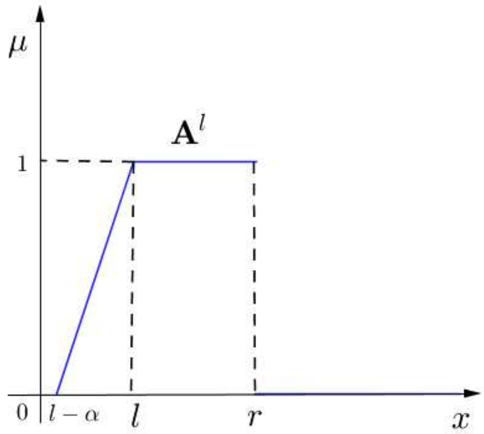
gde je $[l - \alpha, r + \beta]$ nosač fazi broja, a $[l, r]$ interval na kom je stepen pripadnosti jednak 1.

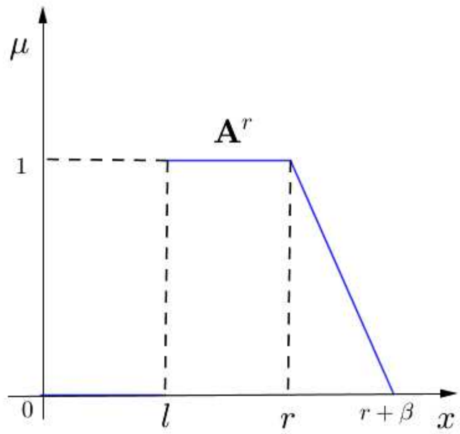
Napomena 3.2 *Kod autora koji fazi broj definišu kao skup za koji postoji tačno jedno $\bar{x} \in \mathbb{R}$ takvo da je $\mu_{\mathbf{A}}(\bar{x}) = 1$ trapezoidni fazi interval nije fazi broj.*



Slika 3.11: Trapezoidni fazi interval

Trapezoidni fazi broj obeležavamo sa $\mathbf{A} = (l-\alpha, l, r, r+\beta)$. Ako je dužina intervala $[l-\alpha, l]$ jednaka dužini intervala $[r, r+\beta]$ onda je trapezoidni fazi broj simetričan u odnosu na pravu $x = \dfrac{l+r}{2}$ tj. dobijamo *simetričan trapezoidni fazi broj.* Ako je $l = r = \bar{x}$ trapezoidni fazi broj postaje trougaoni fazi broj.
Analogno, kao za trougaone fazi brojeve, definišemo levi i desni trapezoidni fazi broj. Levi fazi broj je $\mathbf{A}^l = (l-\alpha, l, r, r)$ sa nosačem $[l-\alpha, r]$, a desni fazi broj je $\mathbf{A}^r = (l, l, r, r+\beta)$ sa nosačem $[l, r+\beta]$.





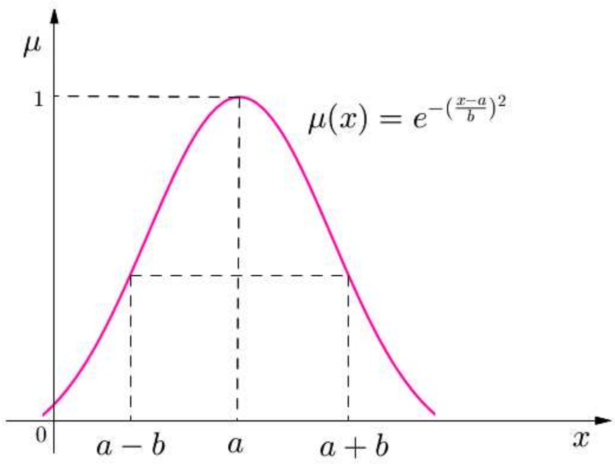
Slika 3.12: Levi i desni trapezoidni fazi broj

Primer 3.8 *Fazi broj* $\boldsymbol{A}$ *naziva se Gausov fazi broj ako je njegova funkcija pripadnosti*

$$\mu(x) = e^{-(\frac{x-a}{b})^2},\ x \in \mathbb{R},\ b > 0,$$

što pišemo $\boldsymbol{A} = (a, b, b)$*, gde su funkcije* L *i* R *definisane sa*

$$L(x) = R(x) = e^{-x^2}.$$



Slika 3.13: Funkcija pripadnosti za Gausov fazi broj

Sabiranje fazi brojeva u odnosu na proizvoljnu t-normu definisano je na sledeći način.

Definicija 3.22 *Neka je $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ proizvoljna t-norma i $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ fazi brojevi. Njihova T-suma, u oznaci $\boldsymbol{A} \oplus_T \boldsymbol{B}$, definiše se kao*

$$(\boldsymbol{A} \oplus_T \boldsymbol{B})(z) = \sup_{x+y=z} T(\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(y)), \ z \in \mathbb{R}.$$

Ako je $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ arhimedovska t-norma sa aditivnim generatorom f, tada $\mathbf{A} \oplus_T \mathbf{B}$ možemo pisati

$$(\mathbf{A} \oplus_T \mathbf{B})(z) = \sup_{x+y=z} f^{[-1]}(f(\mathbf{A}(x)), f(\mathbf{B}(y)))$$

gde je $f^{[-1]}$ pseudo inverzna funkcija od f.

Definicija 3.23 *Neka je $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ proizvoljna t-norma i $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_n$ fazi brojevi. Njihova T-suma, u oznaci $\boldsymbol{A}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \boldsymbol{A}_n$, definiše se kao*

$$(\boldsymbol{A}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \boldsymbol{A}_n)(z) = \sup_{x_1+\cdots+x_n=z} T((\boldsymbol{A}_1(x_1) \oplus_T \cdots \oplus_T \boldsymbol{A}_n(x_n)), \ z \in \mathbb{R}.$$

Ako je dato n fazi brojeva $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ i ako je $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ arhimedovska t-norma tada se njihova T-suma može pisati

$$(\mathbf{A}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \mathbf{A}_n)(z) = \sup_{x_1+\cdots+x_n=z} f^{[-1]}\left(\sum_{i=1}^n f(\mathbf{A}_i(x_i))\right).$$

Sabiranje n fazi intervala u odnosu na različite trougaone norme dato je u sledećim teoremama [16].

Teorema 3.8 *Neka su $\boldsymbol{A}_i = (l_i, r_i, \alpha_i, \beta_i), \ i = 1, \dots, n$ L-R fazi intervali. Tada je njihova suma, u oznaci $\left(\bigoplus_{T_M}\right)_{i=1}^n \boldsymbol{A}_i$, u odnosu na trougaonu normu T_M data sa*

$$\left(\bigoplus_{T_M}\right)_{i=1}^n \boldsymbol{A}_i = \left(\sum_{i=1}^n l_i, \sum_{i=1}^n r_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i, \sum_{i=1}^n \beta_i\right).$$

Primer 3.9 *Neka su dati L-R fazi intervali $\boldsymbol{A}_1 = (1,2,1,1), \ \boldsymbol{A}_2 = (2,4,4,4), \ \boldsymbol{A}_3 = (3,6,9,9), \dots, \boldsymbol{A}_n = (n, 2n, n^2, n^2)$. Njihov zbir u odnosu na t-normu T_M je*

$$\begin{aligned}
\left(\bigoplus_{T_M}\right)_{i=1}^n \boldsymbol{A}_i &= \boldsymbol{A}_1 \oplus_{T_M} \boldsymbol{A}_2 \oplus_{T_M} \cdots \oplus_{T_M} \boldsymbol{A}_n \\
&= (1,2,1,1) \oplus_{T_M} (2,4,4,4) \oplus_{T_M} \cdots \oplus_{T_M} (n, 2n, n^2, n^2) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n i, \sum_{i=1}^n 2i, \sum_{i=1}^n i^2, \sum_{i=1}^n i^2\right) \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}, n(n+1), \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right).
\end{aligned}$$

Teorema 3.9 *Neka su* $\boldsymbol{A}_i = (l, r, \alpha, \beta)$, $i = 1, \dots, n$ *L-R fazi intervali. Tada je njihova suma, u oznaci* $\left(\bigoplus_{T_W}\right)_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i$, *u odnosu na trougaonu normu* T_W *data sa*

$$\left(\bigoplus_{T_W}\right)_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} l_i, \sum_{i=1}^{n} r_i, \max_{1\le i\le n} \alpha_i, \max_{1\le i\le n} \beta_i\right).$$

Primer 3.10 *Neka su dati L-R fazi intervali* $\boldsymbol{A}_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{3}\right)$, $\boldsymbol{A}_2 = \left(\frac{1}{4}, 2, 4, \frac{1}{9}\right)$, $\boldsymbol{A}_3 = \left(\frac{1}{8}, 3, 9, \frac{1}{27}\right), \dots, \boldsymbol{A}_n = \left(\frac{1}{2^n}, n, n^2, \frac{1}{3^n}\right)$. *Njihov zbir u odnosu na t-normu* T_W *je*

$$\begin{aligned}
\left(\bigoplus_{T_W}\right)_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i &= \boldsymbol{A}_1 \oplus_{T_W} \boldsymbol{A}_2 \oplus_{T_W} \cdots \oplus_{T_W} \boldsymbol{A}_n \\
&= \left(\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{3}\right) \oplus_{T_W} \left(\frac{1}{4}, 2, 4, \frac{1}{9}\right) \oplus_{T_W} \cdots \oplus_{T_W} \left(\frac{1}{2^n}, n, n^2, \frac{1}{3^n}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} i, \max_{1\le i\le n} i^2, \max_{1\le i\le n} \frac{1}{3^n}\right) \\
&= \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{n(n+1)}{2}, n^2, \frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

Lema 3.1 *Neka su* T_1 *i* T_2 *t-norme i* $\boldsymbol{A}$ *i* $\boldsymbol{B}$ *fazi brojevi. Ako je* $T_1 \le T_2$, *tada je*

$$\boldsymbol{A} \oplus_{T_1} \boldsymbol{B} \le \boldsymbol{A} \oplus_{T_2} \boldsymbol{B}.$$

Lema 3.2 *Neka su* $\boldsymbol{A}_i = (\bar{x}_i, \alpha)$, $i = 1, \dots, n$ *simetrični trougaoni fazi brojevi i* T *proizvoljna trougaona norma. Tada je*

$$\begin{aligned}
\text{supp}\,(\boldsymbol{A}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \boldsymbol{A}_n) &\subseteq \text{supp}\,(\boldsymbol{A}_1) + \cdots + \text{supp}\,(\boldsymbol{A}_n) \\
&= [\bar{x}_1 - \alpha,\ \bar{x}_1 + \alpha] + \cdots + [\bar{x}_n - \alpha,\ \bar{x}_n + \alpha] \\
&= [\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n - n\alpha,\ \bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n + n\alpha],
\end{aligned}$$

gde je supp *nosač fazi broja.*

U teoriji fazi brojeva veliki značaj imaju i funkcije mogućnosti i neminovnosti koje se za trougaoni fazi broj **A** i proizvoljan podskup skupa realnih brojeva definišu na sledeći način.

Definicija 3.24 *Neka je* $\boldsymbol{A} = (\bar{x}, \alpha)$ *simetričan trougaoni fazi broj i* $D \subset \mathbb{R}$ *proizvoljan skup.* Funkcija mogućnosti *(eng.* possibility*) definiše se sa*

$$\text{Pos}(\boldsymbol{A}|D) = \sup_{t\in D} \boldsymbol{A}(t).$$

Ako je D^c *komplement skupa* D funkcija neminovnosti *(eng.* necessity*) definiše se sa*

$$\text{Nes}(\boldsymbol{A}|D) = 1 - \text{Pos}(\boldsymbol{A}|D^c).$$

Lema 3.3 *Neka su $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ fazi brojevi. Ako je $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$ (tj. $\boldsymbol{A}(x) \leq \boldsymbol{B}(x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$) tada je*

$$\mathrm{Nes}(\boldsymbol{A} = x) \geq \mathrm{Nes}(\boldsymbol{B} = x) \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R}.$$

Lema 3.4 *Neka su $\boldsymbol{A}_i = (\bar{x}_i, \alpha)$, $i = 1, \ldots, n$ simetrični trougaoni fazi brojevi i T_{H_0} Hamaherova norma (Primer 3.2). Tada je*

$$(\boldsymbol{A}_1 \oplus_{T_{H_0}} \cdots \oplus_{T_{H_0}} \boldsymbol{A}_n)(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \frac{|\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n - x|}{n\alpha}}{1 + (n-1)\frac{|\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n - x|}{n\alpha}} & , \ |\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n - x| < n\alpha \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases} . \tag{3.1}$$

i

$$\frac{1}{n}(\boldsymbol{A}_1 \oplus_{T_{H_0}} \cdots \oplus_{T_{H_0}} \boldsymbol{A}_n)(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\left|\frac{\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n}{n} - x\right|}{\alpha}, & \left|\frac{\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n}{n} - x\right| < \alpha \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Lema 3.5 *Neka je T proizvoljna t-norma i $\boldsymbol{A}_i = (\bar{x}_i, \alpha)$, $i = 1, 2, \ldots$ niz simetričnih fazi brojevi. Tada je*

$$\mathrm{Pos}\Big(\frac{1}{n}(\boldsymbol{A}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \boldsymbol{A}_n) = \frac{1}{n}(\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n)\Big) = 1, \ n \in \mathbb{N}.$$

3.4 Zakoni velikih brojeva

U ovom poglavlju se dokazuje da za niz simetričnih trougaonih fazi brojeva $\mathbf{A}_i = (\bar{x}_i, \alpha)$, $i \in \mathbb{N}$, proizvoljno $\varepsilon > 0$ i svaku t-normu $T \leq T_{H_0}$ važi relacija

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Nes}\Big(\frac{\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n}{n} - \varepsilon \leq \frac{\mathbf{A}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \mathbf{A}_n}{n} \leq \frac{\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n}{n} + \varepsilon\Big) = 1. \tag{3.3}$$

Zakon velikih brojeva za simetrične trougaone fazi brojeve definiše se pomoću funkcije neminovnosti Nes i ako za t-normu T i niz fazi brojeva $\mathbf{A}_i = (\bar{x}_i, \alpha)$, $i \in \mathbb{N}$ važi relacija (3.3) onda kažemo da taj niz zadovoljava zakon velikih brojeva.

Rezultati prikazani u ovom delu mogu se naći u [2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 15].

Teorema 3.10 *Neka je T trougaona norma takva da je $T \leq T_{H_0}$ i neka su $\boldsymbol{A}_i = (\bar{x}_i, \alpha)$, $i \in \mathbb{N}$ simetrični trougaoni fazi brojevi. Ako postoji $X = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n}{n}$ tada za svako $\varepsilon > 0$ važi*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Nes}\big(X_n - \varepsilon \leq \dfrac{\tilde{A}_n}{n} \leq X_n + \varepsilon\big) = 1,$
2. $\mathrm{Nes}\Big(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\tilde{A}_n}{n} = X\Big) = 1,$

gde je $X_n = \dfrac{\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n}{n}$, $\bar{x}_i$ modalne vrednosti fazi broja $\boldsymbol{A}_i$ i $\tilde{A}_n = \boldsymbol{A}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \boldsymbol{A}_n$. Tada se kaže da za niz $\boldsymbol{A}_i = (\bar{x}_i, \alpha)$, $i \in \mathbb{N}$ važi zakon velikih brojeva.

Dokaz.

1. Ako je $\varepsilon \geq \alpha$ tada se prva jednakost dobija trivijalno.

   Pretpostavimo da je $\varepsilon < \alpha$. Na osnovu Leme 3.1 i Leme 3.3 sledi da tvrđenje treba dokazati samo za $T = T_{H_0}$. Na osnovu Leme 3.4 sledi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nes}\left(X_n - \varepsilon \leq \frac{1}{n}\tilde{A}_n \leq X_n + \varepsilon\right) &= 1 - \mathrm{Pos}\left(\frac{1}{n}\tilde{A}_n \Big| (-\infty, X_n - \varepsilon) \cup (X_n + \varepsilon, \infty)\right) \\
&= - \sup_{x \notin [X_n - \varepsilon, X_n + \varepsilon]} \left(\frac{1}{n}\tilde{A}_n\right)(x) \\
&= 1 - \frac{1 - \frac{|X_n - (X_n + \varepsilon)|}{\alpha}}{1 + (n-1) \cdot \frac{|X_n - (X_n \pm \varepsilon)|}{\alpha}} \\
&= 1 - \frac{1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}}{1 + (n-1)\frac{\varepsilon}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

   Dalje sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Nes}\left(X_n - \varepsilon \leq \frac{1}{n}\tilde{A}_n \leq X_n + \varepsilon\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}}{1 + (n-1)\frac{\varepsilon}{\alpha}} = 1.$$

2. Ako sa $\chi_{\{X\}}$ označimo karakterističnu funkciju od $\{X\}$ iz

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\tilde{A}_n\right)(z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{|X_n - z|}{\alpha}}{1 + (n-1) \cdot \frac{|X_n - z|}{\alpha}} \\
&= \chi_{\{X\}}(z)
\end{aligned}$$

   sledi da je

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nes}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\tilde{A}_n = X\right) &= 1 - \sup_{z \neq X} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\tilde{A}_n\right)(z) \\
&= 1 - \sup_{z \neq X} \chi_{\{X\}}(z) = 1.
\end{aligned}$$

□

Za minimum t-normu T_M ne važi zakon velikih brojeva i Fuler je u [2] dokazao da važi sledeća teorema.

Teorema 3.11 *Neka je $T = T_M$ i $\boldsymbol{A}_i = (\bar{x}_i, \alpha)$, $i \in \mathbb{N}$ niz simetričnih trougaonih fazi brojeva. Tada za svako ε, $0 < \varepsilon < \alpha$ važi*

1. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Nes}\left(X_n - \varepsilon \leq \frac{\tilde{A}_n}{n} \leq X_n + \varepsilon\right) = \frac{\varepsilon}{\alpha},$

2. $\mathrm{Nes}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{A}_n}{n}=X\right)=0.$

U nastavku sledi uopštenje Fulerovog zakona velikih bojeva u odnosu na arhimedovkse t-norme koje je dao Triš u radu [21].

Definicija 3.25 *Neka je* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *red nenegativnih realnih brojeva i neka je* $0<\gamma\le 1$. *Kažemo da dati red zadovoljava uslov* D_γ *ako i samo ako je*

$$\min_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ |I|\ge\gamma\cdot n}} \sum_{i\in I} a_i \longrightarrow \infty,$$

gde je sa $|I|$ *označena kardinalnost skupa* I.

Teorema 3.12 *Neka je* $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\dots$ *niz simetričnih trougaonih fazi brojeva takvih da je* $\boldsymbol{A}_n(x)=0$ *ako je* $|x-\bar{x}_n|>c$ *za svako* n *i neku konstantu* $c>0$, *gde je* $\bar{x}_n$ *modalna vrednost od* $\boldsymbol{A}_n$. *Neka je* f *aditivni generator arhimedovske t-norme* T. *Ako postoji* $\varepsilon>0$ *takvo da redovi* $\sum_{i=1}^{\infty} f(\boldsymbol{A}_i(\bar{x}_i+\varepsilon))$ *i* $\sum_{i=1}^{\infty} f(\boldsymbol{A}_i(\bar{x}_i-\varepsilon))$ *zadovoljavaju uslov* D_γ *za* $\gamma>0$, *onda za* $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\dots$ *važi zakon velikih brojeva.*

Teorema 3.13 *Neka je* $\boldsymbol{A}_n=(\bar{x}_n,\alpha_n,\beta_n)$ *niz L-R fazi brojeva i neka je* $\alpha_n\le c$ *i* $\beta_n\le c$ *za svako* $n\in\mathbb{N}$ *i neku konstantu* c. *Neka je* T *neprekidna arhimedovska t-norma sa aditivnim generatorom* f. *Tada niz* $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\dots$ *zadovoljava zakon velikih brojeva.*

Sledeća teorema karakterizuje arhimedovske t-norme [21].

Teorema 3.14 *Neka je* T *neprekidna t-norma.* T *je arhimedovska ako i samo ako niz* $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\dots$ *definisan u Teoremi 3.13 zadovoljava zakon velikih brojeva.*

Fuler je u svom radu [2] postavio pitanje: Da li postoji trougaona norma T takva da je $T\ge T_{H_0}$ i važi zakon velikih brojeva za niz simetričnih trougaonih fazi brojeva $\mathbf{A}_1=(\bar{x}_1,\alpha),\mathbf{A}_2=(\bar{x}_2,\alpha)\dots$? U radu [15] kao odgovor na Fulerovo pitanje konstruisana je familija t-normi za koju ne važi Fulerov zakon velikih brojeva.

Primer 3.11 *Poznato je da je* $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$ *aditivni generator za* T_{H_0} *(Primer 3.5). Neka je* $g(x)=f(cx-(c-1))$, $c\in\mathbb{N}$, $c\ge 2$ *i* $x\in\left(\frac{c-1}{c},1\right]$. *Trougaona norma* T_c *je definisana na sledeći način*

$$T_c(x,y)=\begin{cases} g^{-1}(g(x)+g(y)) & ,\ (x,y)\in\left(\frac{c-1}{c},1\right]^2\\ \\ T_M(x,y) & ,\ \text{inače}\end{cases}.$$

Prvo se pokazuje da je $T_{H_0}\le T_c\le T_M$. *Kako je* T_M *najjača t-norma važi da je* $T_c\le T_M$, *pa treba pokazati da je* $T_{H_0}\le T_c$ *za* $(x,y)\in\left(\frac{c-1}{c},1\right)^2$.

Neka je $\varphi = \dfrac{f'}{g'}$. *Lako se proverava da je* φ *neopadajuća funkcija u intervalu* $\left(\frac{c-1}{c}, 1\right)$. *Na osnovu rada [14] sledi da je* $T_{H_0} \leq T_c$.

Neka je $\{\boldsymbol{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *niz simetričnih trougaonih fazi brojeva i* $\tilde{A}_n = \boldsymbol{A}_1 \oplus_{T_c} \cdots \oplus_{T_c} \boldsymbol{A}_n$.

Treba pokazati da je

$$\tilde{A}_n\left(n\frac{c-1}{c}\right) \geq \frac{1}{c}. \tag{3.4}$$

Dokaz se izvodi indukcijom po n:

Za $n = 1$ *važi* $\tilde{A}_1\left(\frac{c-1}{c}\right) = \boldsymbol{A}_1\left(\frac{c-1}{c}\right) = \frac{1}{c}$.

Za $n = 2$ *važi*

$$\tilde{A}_2\left(2\frac{c-1}{c}\right) \geq T_c\left(\boldsymbol{A}_1\left(\frac{c-1}{c}\right), \boldsymbol{A}_2\left(\frac{c-1}{c}\right)\right) = T_c\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c}.$$

Pretpostavi se (3.4) važi za $n = k$ *i pokazuje se da važi za* $n = k+1$

$$\tilde{A}_{k+1}\left((k+1)\frac{c-1}{c}\right) \geq T_c\left(\tilde{A}_k\left(k\frac{c-1}{c}\right), \boldsymbol{A}_{k+1}\left(\frac{c-1}{c}\right)\right) \geq T_c\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c}.$$

Treba pokazati da je niz $\left\{\frac{1}{c^n}\tilde{A}_{c^n}\right\}$ *ograničen od dole, tj. da za* $z \in \left(-\frac{c-1}{c}, 0\right) \cup \left(0, \frac{c-1}{c}\right)$ *važi*

$$\frac{1}{c^n}\tilde{A}_{c^n}(z) \geq \frac{1}{c} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^n}\tilde{A}_{c^n}(z) &\geq \frac{1}{c^n}\tilde{A}_{c^n}\left(\frac{c-1}{c}\right) = \tilde{A}_{c^n}\left(c^n\frac{c-1}{c}\right) \\
&= \tilde{A}_{c^n}\left((c^n-1+1)\frac{c-1}{c}\right) \\
&\geq T_c\left(\tilde{A}_{c^n-1}\left((c^n-1)\frac{c-1}{c}\right), \boldsymbol{A}_{c^n}\left(\frac{c-1}{c}\right)\right) \\
&\geq T_c\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c}.
\end{aligned}$$

Lako se proverava da je niz $\left\{\frac{1}{n}\tilde{A}_n(z)\right\}$ *nerastući. Znači, niz* $\left\{\frac{1}{n}\tilde{A}_n\right\}$ *je konvergentan i nejednakost (3.5) implicira da je*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\tilde{A}_n(z) \geq \frac{1}{c}, \quad \text{za} \quad z \in \left(-\frac{c-1}{c}, 0\right) \cup \left(0, \frac{c-1}{c}\right),$$

pa Fulerov zakon velikih brojeva ne važi.

Napomena 3.3 *Ako se u prethodnom primeru uvrsti da je $c = 2$ dobija se t-norma koju je konstruisao Hong u radu [7].*

Hong je u radu [6] dao još jedan primer na kom je pokazao da Fulerov zakon velikih brojeva ne važi uvek.

Primer 3.12 *Neka je $\boldsymbol{A}_n = (\bar{x}_n, \alpha)$ niz simetričnih trougaonih fazi brojeva ($L(x) = 1-x$) i neka je $T = T_{H_0}$ Hamaherova norma. Ako postoji $y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i$ i ako je $0 < |y| < +\infty$, tada je $x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i = 0$ i važi*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\boldsymbol{A}_1 \oplus_{T_{H_0}} \cdots \oplus_{T_{H_0}} \boldsymbol{A}_n)(\bar{x}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\boldsymbol{A}_1 \oplus_{T_{H_0}} \cdots \oplus_{T_{H_0}} \boldsymbol{A}_n)(y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\alpha - |y|}{n\alpha + (n-1)|y|} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha + |y|} \neq 1,
\end{aligned}$$

tj. Fulerov zakon velikih brojeva ne važi.

Još jedan primer kada Fulerov zakon velikih brojeva ne važi dala je Markova-Stupnanova u radu [12].

Teorema 3.15 *Dat je niz $\boldsymbol{A}_n = (\bar{x}_n, \alpha, \beta)$, $n \in \mathbb{N}$ L-R fazi brojeva i arhimedovska neprekidna t-norma T sa aditivnim generatorom f, tako da su funkcije $f \circ L$ i $f \circ R$ konveksne. Neka je $x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i$ i $y = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i - nx \right)$, $|y| \in (0, +\infty)$. Neka je*

$$z = \begin{cases} (f \circ L)'(0) & , \ y > 0 \\ (f \circ R)'(0) & , \ y < 0 \end{cases}, \qquad z > 0.$$

Tada Fulerov zakon velikih brojeva ne važi.

Na kraju ovog poglavlja navodimo još jedan zakon velikih brojeva za trougaone fazi brojeve pri čemu funkcije L i R ne moraju biti iste [17].

Teorema 3.16 *Neka je $\boldsymbol{A}_n = (\bar{x}, \alpha_n, \beta_n)$, $n \in \mathbb{N}$ niz fazi brojeva sa ograničenom širinom, tj. postoji konstanta $c > 0$ takva da je $\alpha_n \leq c$, $\beta_n \leq c$. Neka je T neprekidna arhimedovska t-norma sa aditivnim generatorom f. Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\boldsymbol{A}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \boldsymbol{A}_n)(z) = \begin{cases} 1 & , \ z = \bar{x} \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases},$$

tj. važi zakon velikih brojeva.

Dokaz. Neka su L_f i R_f funkcije oblika takve da je $L_n \leq L_f$ i $R_n \leq R_f$, $n \in \mathbb{N}$ i $f \circ L_f$ i $f \circ R_f$ konveksne.

Neka je $\mathbf{B}_n = (\bar{x}, c, c)$ fazi broj sa funkcijama oblika L_f i R_f. Očigledno je $\mathbf{A}_n \leq \mathbf{B}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Posmatra se slučaj $z = \bar{x}$.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{n}(\mathbf{A}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \mathbf{A}_n)(\bar{x}) &= (\mathbf{A}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \mathbf{A}_n)(n\bar{x}) \\ &= \sup_{x_1+\cdots+x_n=n\bar{x}} f^{[-1]}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{A}_i(x_i))\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Očigledno je

$$\frac{1}{n}(\mathbf{A}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \mathbf{A}_n)(z) = 0 \ \text{ za } z > \bar{x} + c$$

i

$$\frac{1}{n}(\mathbf{A}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \mathbf{A}_n)(z) = 0 \ \text{ za } z < \bar{x} - c.$$

Pretpostavi se da je $z \in [\bar{x} - c, \bar{x})$. Tada je

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{n}(\mathbf{A}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \mathbf{A}_n)(z) \\ &\leq \frac{1}{n}(\mathbf{B}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \mathbf{B}_n)(z) \\ &= (\mathbf{B}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \mathbf{B}_n)(nz) \\ &= f^{[-1]}\left(nf\left(L\left(\frac{n\bar{x} - nz}{nc}\right)\right)\right) \\ &= f^{[-1]}\left(nf\left(L\left(\frac{\bar{x} - z}{c}\right)\right)\right) \longrightarrow 0, \text{ kada } n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Odavde sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\mathbf{A}_1 \oplus_T \cdots \oplus_T \mathbf{A}_n)(z) = 0$ za $z \in [\bar{x} - c, \bar{x})$.

Slučaj $z \in (\bar{x}, \bar{x} + c]$ dokazuje se analogno. □

Napomena 3.4 *Svaki realan broj se može posmatrati kao fazi broj. Pod uslovom da važe pretpostavke navedenih teorema za realne brojeve važe navedeni zakoni velikih brojeva.*

Glava 4

Zakon velikih brojeva za fazi slučajne promenljive

U ovom delu rada data je definicija fazi slučajne promenljive, kao i njenog matematičkog očekivanja. Jaki zakon velikih brojeva za niz nezavisnih fazi slučajnih promenljivih koje imaju istu raspodelu je dat na kraju ovog dela rada.

Prikazani rezultati mogu se naći u [10, 11].

4.1 Fazi slučajne promenljive

Fazi slučajne promenljive su preslikavanja koja svakom elementarnom događaju pridružuju fazi broj, za razliku od slučajnih promenljivih koje elementaran događaj preslikavaju u realan broj. Svaka slučajna promenljiva se može smatrati i fazi slučajnom promenljivom jer je svaki realan broj i fazi broj (funkcija pripadanja je karakteristična funkcija). Pored slučajnih promenljivih i fazi slučajnih promenljivih postoji još jedan način modelovanja neodređenosti. To su tzv. slučajni skupovi. Kod slučajnih skupova, u opštem slučaju, svakom elementarnom događaju se pridružuje neprazan podskup od $\mathbb{R}$.

Definicija 4.1 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće, i neka je $F(\mathbb{R})$ skup svih fazi brojeva tj. skup fazi brojeva koji zadovoljava uslove Definicije 3.19.* Fazi slučajna promenljiva *X je preslikavanje $X : \Omega \to F(\mathbb{R})$, koje svakom događaju $\omega \in \Omega$ dodeljuje vrednost X_ω, tj.*

$$X(\omega) = X_\omega,$$

koje zadovoljava sledeće uslove:

1. *Za svako $\alpha \in (0, 1]$*

$$[U^*]_\alpha(\omega) = \inf\{[X(\omega)]_\alpha\} \quad i \quad [U^{**}]_\alpha(\omega) = \sup\{[X(\omega)]_\alpha\} \tag{4.1}$$

   su realne slučajne promenljive definisane na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, čija matematička očekivanja $\mathbb{E}[[U^*]_\alpha]$ i $\mathbb{E}[[U^{**}]_\alpha]$ postoje.

2. *Za svako $\omega \in \Omega$ i $\alpha \in (0, 1]$*

$$[U^*]_\alpha(\omega) \in [X(\omega)]_\alpha \quad i \quad [U^{**}]_\alpha(\omega) \in [X(\omega)]_\alpha. \tag{4.2}$$

Neka je X fazi slučajna promenljiva definisana na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je sa $\sigma(X)$ označena sigma algebra podskupova od Ω generisanih slučajnim promenljivama $[U^*]_\alpha$ i $[U^{**}]_\alpha$, $\alpha \in (0,1]$. Dalje, neka je $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ neatomski prostor verovatnoće, i neka je $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}) = (\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', P \otimes P')$, gde je sa $P \otimes P'$ označen proizvod mera P i P' na prostoru $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$. *Skup originala fazi slučajne promenljive* X, u oznaci $\tilde{\mathcal{X}}$, se definiše kao skup svih slučajnih promenljivih definisanih na prostoru verovatnoće $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ koje su $\sigma(X) \otimes \mathcal{F}'$-merljive.

U nastavku je data jedna mogućnost da se definiše matematičko očekivanje za fazi slučajne promenljive, kao što je to urađeno u [10].

Definicija 4.2 *Neka je X fazi slučajna promenljiva.* Matematičko očekivanje fazi slučajne promenljive X, *u oznaci* $\mathbb{E}[X]$, *je fazi broj definisan sa*

$$\mathbb{E}[X](a) = \sup_{\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{X}} : \mathbb{E}[\tilde{U}] = a} \ \inf_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega' \in \Omega'}} X(\omega)\left(\tilde{U}(\omega, \omega')\right), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Neka su X_1 i X_2 dve fazi slučajne promenljive definisane na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Transformacija fazi slučajnih promenljivih se može definisati slično kao transformacija slučajnih promenljivih.

Zbir fazi slučajnih promenljivih X_1 i X_2 je fazi slučajna promenljiva definisana sa

$$(X_1 + X_2)(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega).$$

Slično, proizvod slučajnih promenljivih X_1 i X_2 je fazi slučajna promenljiva definisana sa

$$(X_1 \cdot X_2)(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega).$$

Sabiranje dve fazi slučajne promenljive se analogno proširuje na zbir n fazi slučajnih promenljivih $(n \in \mathbb{N})$.

4.2 Zakon velikih brojeva

Zakon velikih brojeva za fazi slučajne promenljive koji se predstavlja u ovom radu odnosi se na niz nezavisnih fazi slučajnih promenljivih sa istom raspodelom. Prvo je potrebno dati definiciju niza nezavisnih fazi slučajnih promenljivih sa istom raspodelom.

Definicija 4.3 *Neka je $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ niz fazi slučajnih promenljivih. Ako za svako $\alpha \in (0,1]$ važi da su*

$$[U_i^*]_\alpha(\omega) = \inf\{[X_i(\omega)]_\alpha\}$$

i

$$[U_i^{**}]_\alpha(\omega) = \sup\{[X_i(\omega)]_\alpha\}$$

nizovi nezavisnih slučajnih promenljivih $\{[U_i^*]_\alpha\}_{i \in \mathbb{N}}$ i $\{[U_i^{**}]_\alpha\}_{i \in \mathbb{N}}$ sa istom raspodelom, tada za $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ kažemo da je niz nezavisnih fazi slučajnih promenljivih *sa istom raspodelom.*

Teorema 4.1 *Neka je $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih fazi slučajnih promenljivih sa istom raspodelom definisanih na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ takav da važi:*

$$\textit{iz} \quad \alpha, \alpha' \in \mathbb{Q} \cap (0,1] \quad i \quad \alpha < \alpha', \quad \textit{sledi}$$

$$\inf\{[\mathbb{E}[X_i]]_\alpha\} < \inf\{[\mathbb{E}[X_i]]_{\alpha'}\} \quad i \quad \sup\{[\mathbb{E}[X_i]]_\alpha\} > \sup\{[\mathbb{E}[X_i]]_{\alpha'}\}.$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}[X_1] \quad P\text{-}\textit{skoro svuda.}$$

Dokaz. Neka je $\alpha \in (0,1]$ proizvoljan realan broj. Na osnovu jednakosti (4.1) i (4.2), za svako $i = 1, 2, \ldots,$ i svako $\omega \in \Omega$ je

$$[X_i(\omega)]_\alpha = [[U_i^*]_\alpha(\omega),\ [U_i^{**}]_\alpha(\omega)]\,.$$

Dalje sledi

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)\right]_\alpha = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^*]_\alpha(\omega), \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^{**}]_\alpha(\omega)\right].$$

Dalje je na osnovu Definicije 4.2

$$\begin{aligned}
[\mathbb{E}[X_i]]_\alpha &= \Bigg\{x \in \mathbb{R} : \left(\forall k \in \mathbb{N},\ k > \frac{1}{\alpha}\right)\left(\exists U_k \in \tilde{\mathcal{X}}\right) \\
&\qquad \left(\mathbb{E}[U_k] = x \ \text{ i } \inf_{\substack{\omega\,\in\,\Omega \\ \omega'\,\in\,\Omega'}} X(\omega)\left(U_k(\omega,\omega')\right) \geq \alpha - \frac{1}{k}\right)\Bigg\} \\
&= [\mathbb{E}[[U_1^*]_\alpha],\ \mathbb{E}[[U_1^{**}]_\alpha]]\,.
\end{aligned}$$

Na osnovu zakona velikih brojeva Kolmogorova (Teorema 2.13) postoji skup $S_\alpha \in \mathcal{F}$ takav da je $P(S_\alpha) = 0$ i za svako $\omega \in \Omega \backslash S_\alpha$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^*]_\alpha(\omega) = \mathbb{E}[[U_1^*]_\alpha], \tag{4.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^{**}]_\alpha(\omega) = \mathbb{E}[[U_1^{**}]_\alpha]. \tag{4.4}$$

Neka je $S = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{Q}\cap(0,1]} S_\alpha$. Tada je $P(S) = 0$ i za svako $\omega \in \Omega\backslash S$ i $\alpha \in \mathbb{Q}\cap(0,1]$ važe jednakosti (4.3) i (4.4).

Pokazuje se da za neko $\omega \in \Omega\backslash S$ i $x \in \mathbb{R}$ važi

$$\begin{aligned}
\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)\right)(x) &= \lim_{n\to\infty}\sup_{\alpha\in(0,1]\cap\mathbb{Q}}\left\{\alpha \cdot I_{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^*]_\alpha(\omega),\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^{**}]_\alpha(\omega)\right]}(x)\right\} \\
&= \sup_{\alpha\in(0,1]\cap\mathbb{Q}}\left\{\alpha \cdot I_{[\mathbb{E}[[U_1^*]_\alpha],\ \mathbb{E}[[U_1^{**}]_\alpha]]}(x)\right\} \\
&= \mathbb{E}[X_1](x).
\end{aligned}$$

Posmatraju se četiri slučaja. Neka je $\omega \in \Omega \backslash S$ i $x \in \mathbb{R}$.

1. $\mathbb{E}[X_1](x) = 1$.

   Neka je $\alpha \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$. Tada važi da je $\mathbb{E}[[U_1^*]_\alpha] < x < \mathbb{E}[[U_1^{**}]_\alpha]$, i postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je $\mathbb{E}[[U_1^*]_\alpha] + \varepsilon < x < \mathbb{E}[[U_1^{**}]_\alpha] - \varepsilon$. Neka je n_ε takvo da za svako $n \geq n_\varepsilon$ važi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^*]_\alpha(\omega) < x < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^{**}]_\alpha(\omega),$$

   odakle sledi

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)\right)(x) \geq \alpha.$$

   Dakle,

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)\right)(x) = 1.$$

2. $0 < \mathbb{E}[X_1](x) < 1$ i $x < \mathbb{E}[[U_1^*]_1]$.

   Neka su $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$ takvi da važi $\alpha_1 < \mathbb{E}[X_1](x) < \alpha_2$. Tada

$$\mathbb{E}[[U_1^*]_{\alpha_1}] < \mathbb{E}[[U^*]_{\mathbb{E}[X_1](x)}] = x < \mathbb{E}[[U_1^*]_{\alpha_2}].$$

   Postoji $\varepsilon > 0$ takvo da važi

$$\mathbb{E}[[U_1^*]_{\alpha_1}] + \varepsilon < x < \mathbb{E}[[U_1^*]_{\alpha_2}] - \varepsilon.$$

   Postoji n_ε takvo da za svako $n \geq n_\varepsilon$ važi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^*]_{\alpha_1}(\omega) < x < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^*]_{\alpha_2}(\omega).$$

   Dalje, za svako $n \geq n_\varepsilon$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^*]_{\alpha_1}(\omega) < x < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^{**}]_{\alpha_1}(\omega),$$

   i za

$$\tilde{\alpha} \in [\alpha_2, 1] \cap \mathbb{Q} \quad \text{je} \quad x < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^*]_{\tilde{\alpha}}(\omega).$$

   Dakle,

$$\alpha_1 \leq \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)\right)(x) \leq \alpha_2$$

   odakle sledi

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)\right)(x) = \mathbb{E}[X_1](x).$$

3. $0 < \mathbb{E}[X_1](x) < 1$ i $x > \mathbb{E}[[U_1^{**}]_1]$.

   Neka su $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$ takvi da važi $\alpha_1 < \mathbb{E}[X_1](x) < \alpha_2$. Tada

$$\mathbb{E}[[U_1^{**}]_{\alpha_2}] < \mathbb{E}[[U^{**}]_{\mathbb{E}[X_1](x)}] = x < \mathbb{E}[[U_1^{**}]_{\alpha_1}].$$

   Postoji $\varepsilon > 0$ takvo da važi

$$\mathbb{E}[[U_1^{**}]_{\alpha_2}] + \varepsilon < x < \mathbb{E}[[U_1^{**}]_{\alpha_1}] - \varepsilon.$$

   Postoji n_ε takvo da za svako $n \geq n_\varepsilon$ važi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^{**}]_{\alpha_2}(\omega) < x < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^{**}]_{\alpha_1}(\omega).$$

   Dalje, za svako $n \geq n_\varepsilon$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^{**}]_{\alpha_1}(\omega) < x < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^{*}]_{\alpha_1}(\omega),$$

   i za

$$\tilde{\alpha} \in [\alpha_2, 1] \cap \mathbb{Q} \quad \text{je} \quad x > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^{**}]_{\tilde{\alpha}}(\omega).$$

   Dakle,

$$\alpha_1 \leq \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)\right)(x) \leq \alpha_2$$

   odakle sledi

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)\right)(x) = \mathbb{E}[X_1](x).$$

4. $\mathbb{E}[X_1](x) = 0$.

   Neka je $\alpha \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$. Tada važi da je $\mathbb{E}[[U_1^{*}]_\alpha] < x < \mathbb{E}[[U_1^{**}]_\alpha]$, i postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je $\mathbb{E}[[U_1^{*}]_\alpha] + \varepsilon < x < \mathbb{E}[[U_1^{**}]_\alpha] - \varepsilon$. Neka je n_ε takvo da za svako $n \geq n_\varepsilon$ važi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^{*}]_{\alpha}(\omega) < x < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[U_i^{**}]_{\alpha}(\omega),$$

   odakle sledi

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)\right)(x) \leq \alpha.$$

   Dakle,

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)\right)(x) = 0.$$

U sva četiri slučaja dobija se da važi

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)\right)(x)=\mathbb{E}[X_1](x),$$

pa za niz nezavisnih fazi slučajnih promenljivih sa istom raspodelom $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ važi jaki zakon velikih brojeva. $\square$

Napomena 4.1 *Svaka slučajna promenljiva se može posmatrati kao fazi slučajna promenljiva tj. za niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom važi Teorema 4.1.*

Literatura

[1] Bojadziev George, Bojadziev Maria, *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Aplications*, World Scientific, 1995.

[2] Fullér Robert, *A Law of Large Numbers for Fuzzy Numbers*, Fuzzy Sets and Systems, 299-303, 45 (1992)

[3] Fullér Robert, *Fuzzy Reasoning and Fuzzy Optimization*, Turku Centre for Computer Science, Abo, 1998.

[4] Haans Michael, *Applied Fuzzy Arithmetic An Introduction with Engineering Applications*, Springer, 2005.

[5] Hadžić Olga, *Odabrane metode teorije verovatnoće*, Institut za matematiku, Novi Sad, 1990.

[6] Hong Dug Hun, *A note on product-sum of L-R fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems, 381-382, 66 (1994)

[7] Hong Dug Hun, *A note on the law of large numbers for fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems, 59-61, 64 (1994)

[8] Ivanović Branislav, *Teorija verovatnoće*, Naučna knjiga, Beograd, 1977.

[9] Ivković Zoran, *Teorija verovatnoće sa matematičkom statistikom*, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.

[10] Kruse Rudolf, *The Strong Law of Large Numbers for Fuzzy Random Variables*, Information Sciences, 233-241, 28 (1982)

[11] Kwakernaak Huibert, *Fuzzy Random Variables - I. Definitions and Theorems*, Information Sciences, 1-29, 15 (1978)

[12] Marková-Stupňanová Andrea, *A note on recent results on the law of large numbers for fuzzy numbers*, Busefal, 12-18, 16 (1998)

[13] Mladenović Pavle, *Verovatnoća i statistika*, Matematički fakultet, Beograd, 1995.

[14] Klement Erich Peter, Mesiar Radko, Pap Endre, *A characterization of the ordering of continuous t-norms*, Fuzzy Sets and Systems, 215-229, 91 (1997)

[15] Pap Endre, Grbić Tatjana, *A Law of Large Numbers for Fuzzy Numbers*, PRIM, 125-128, 1997.

[16] Pap Endre, *Fazi mere i njihova primena*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1999.

[17] Pap Endre, Grbić Tatjana, *The law of large numbers in representation of uncertainity*, EUROFUSE-SIC, 459-464, 1999.

[18] Piskunov Nikolai, *Diferential and Integral Calculus*, vol II, Mir Publishers, Moscow, 1974.

[19] Rajter-Ćirić Danijela, *Verovatnoća*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2009.

[20] Stojaković Mila, *Uvod u teoriju verovatnoće i matematičke statistike*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1995.

[21] Triesch Eberhard, *Characterisation of Archimedian t-norms and a law of large numbers*, Fuzzy Sets and Systems, 339-342, 58 (1993)

[22] Zadeh Lotfi, *Fuzzy sets*, Informations and Control, 338-353, 8 (1965)

Biografija

Rođena sam 16.05.1989. godine u Novom Sadu. Nakon završene osnovne škole „Ivan Gundulić" u Novom Sadu, upisala sam gimnaziju „Jovan Jovanović Zmaj", prirodno-matematički smer, u Novom Sadu, koju sam završila 2008. godine.

Iste godine upisala sam osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike, koje sam završila u februaru 2014. godine sa prosečnom ocenom 8,27.

U oktobru 2014. godine upisala sam master studije na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu, studijski program Matematika u tehnici. Položila sam sve ispite predviđene nastavnim planom i programom sa prosečnom ocenom 9,89 čime sam stekla uslov za odbranu master rada.

U Novom Sadu,
oktobar 2015.

Bojana Bačko