Ksenija Doroslovački

KOMBINATORIKA

INTERPRETIRANA FUNKCIJAMA I

NJIHOVIM OSOBINAMA

MASTER RAD

NOVI SAD jun 2008

Sadržaj

Glava 1

UVOD

Jedan od najznačajnijih pojmova u svim oblastima matematike jeste pojam funkcije.

Svaki kombinatorni objekat jeste neka funkcija sa nekom osobinom.

Prema tome, operisanje sa kombinatornim objektima je u stvari operisanje sa nekim funkcijama, pa ko savršeno poznaje funkcije i njihove osobine, on savršeno poznaje i kombinatoriku.

Sa pojmom funkcije srećemo se još u predškolskim ustanovama jer je sabiranje u skupu prirodnih brojeva takođe funkcija koja uređenom paru prirodnih brojeva $(2, 3)$ pridružuje prirodni broj 5. Koliko god se činilo da je pojam funkcije jednostavan, ipak, on je vrlo apstraktan i njegova jasnoća kroz dugogodišnje školovanje i dalje kroz profesionalni rad neprekidno raste kod svakoga ko se ozbiljno bavi funkcijama.

Ovde će se obrađivati istovremeno, paralelno, sve osnovno o funkcijama i klasičnoj kombinatorici, a zatim i nešto o neklasičnoj kombinatorici. Pokazaće se da su kombinatorni pojmovi permutacije, varijacije, kombinacije sa i bez ponavljanja, particije skupova, formula uključenja - isključenja, ekvivalentni pojmovima funkcije sa nekom osobinom.

Videćemo da svaki kombinatorni objekat, kombinatorna konfiguracija jeste u stvari neka funkcija sa nekom osobinom.

J. Riordan u predgovoru svoje monografije o kombinatornoj analizi, odnosno kombinatorici, kaže da u kombinatoriku spadaju svi oni problemi kod kojih se može nešto prebrojati.

C. Berge, na simpozijumu u Rimu, povezuje teoriju grafova i kombinatoriku i smatra da su osnovni zadaci kombinatorike prebrojavanje zadatog tipa konfiguracija, dokazivanja postojanja ili nepostojanja konfiguracije datog tipa, formiranje konfiguracija, transformacija konfiguracija jednih u druge, proučavanje svojstava podkonfiguracija. Konfiguracija se definiše kao preslikavanje nekog skupa objekata u neki konačan apstraktni skup.

Najopštije rečeno, kombinatorika je teorija konačnih skupova. Najčešće se prebrojavaju skupovi, čiji elementi mogu biti bilo kakve prirode, od vrlo jednostavnih do vrlo apstraktnih. U ovom radu elementi skupova će biti funkcije sa raznim osobinama, što će biti ekvivalentno raznim kombinatornim objektima.

Pored problema prebrojavanja, kombinatorika se bavi i problemima postojanja kombinatornih objekata, kao i problemima njihove efektivne konstrukcije.

Kažimo još nešto o funkcijama.

Krenimo prvo od naziva. Sinonimi (reči istog značenja) za reč funkcija su: preslikavanje, transformacija, operacija, operator, zakon, pravilo itd. Koji ćemo naziv koristiti u suštini je nebitno, ali ipak se izbor termina određuje zavisno od skupova koje koristimo. Na primer, za funkcije u geometriji uobičajeno je korišćenje termina transformacija, a za funkcije koje preslikavaju uređene parove čije su komponente iz skupa A u taj isti skup A zovemo operacije, funkcije koje preslikavaju skup funkcija u skup funkcija zovu se operatori itd.

Postoje mnogobrojni načini kreiranja definicije funkcije i korisno je dati ih što više (to se kaže što više ekvivalentnih definicija), jer to omogućava mnogo lakše, brže i bolje shvatanje pojma funkcije.

Posebno je značajno izvršiti prebrojavanje skupa svih funkcija sa, ili bez, neke osobine, jer tada je ta osobina mnogo bolje objašnjena i automatski je definisan i proučen neki novi kombinatorni objekat.

Pojmovi koji se moraju znati pre definicije funkcije su pojam skupa i pojam uređenog para. Pojam skupa je dobro poznat svima, kao i relacija elemenat x pripada skupu A ili elemenat x ne pripada skupu A, što se označava sa $x \in A$, odnosno $x \notin A$.

Pojasnimo pojam uređenog para, koji je fundamentalan za definiciju funkcije. Treba naglasiti da je jedina razlika između uređenog para i dvočlanog skupa u tome što je kod uređenog para bitno ko je prvi i ko je drugi, dok kod dvočlanog skupa to nije bitno, tj. $(1,2) \neq (2,1)$ dok je $\{1,2\} = \{2,1\}$ kao i da je $(a,b) = (c,d)$ ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

Ovim je razjašnjen pojam uređenog para (a, b). Međutim kako je pojam uređenog para izuzetno važan za definiciju funkcije, evo i precizne matematičke definicije uređenog para, koja naravno govori isto što i prethodni pasus.

Definicija 1.1 *Uređen par* (a, b) *je* $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$.

OSNOVNE OZNAKE (NOTACIJE)

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ je skup svih prirodnih brojeva.
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ je skup svih nenegativnih celih brojeva.
$\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots n\}$ je skup prvih n prirodnih brojeva.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$ za $0 \le k \le n$, $\binom{n}{k} = 0$ za $n < k$.
$x \in S$ znači x pripada skupu S ili x je elemenat skupa S.
$x \notin S$ znači x ne pripada skupu S ili x nije elemenat skupa S.
$A \subseteq B$ znači skup A je podskup skupa B, odnosno svaki elemenat skupa A jeste i elemenat skupa B.
$A \subset B$ znači skup A je pravi podskup skupa B, odnosno svaki elemenat skupa A jeste i elemenat skupa B i $A \ne B$.

Skup S može se zapisati tako što pronađemo neku karakterizaciju, uslov, osobinu π njegovih elemenata, koju ne poseduje ni jedan element koji ne pripada skupu S. Ako $\pi(x)$ znači x zadovoljava uslov π, tada
$S = \{x | \pi(x)\}$ je skup svih x, takvih da x zadovoljava uslov π.
$\emptyset$ prazan skup, odnosno skup bez elemenata.
$|S|$ je broj elemenata skupa S, tj. kardinalni broj skupa S.
$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ je skup svih elemenata koji se sadrže u bar jednom od skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ je skup svih elemenata koji se sadrže u svakom od skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

$\mathcal{P}(A)$ ili 2^A zove se partitivan skup skupa A i to jeste skup svih podskupova skupa A, tj.

$$\mathcal{P}(A) = 2^A = \{X | X \subseteq A\}.$$

Na primer ako je $A = \{1, 2, 3\}$, tada je

$$\mathcal{P}(A) = 2^A = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}.$$

Skup $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ zvaćemo azbuka ili m skup, gde su a_i, $i \in N_m$ proizvoljni simboli koje ćemo zvati slovima azbuke $\mathcal{A}$, pri čemu podrazumevamo, ako nije drukčije rečeno, da je skup $\mathcal{A}$ totalno uređen sa $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$.

Ako je $\mathbf{x} \in \{a_1, \cdots, a_m\}^n$, tj. ako je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uređena n-torka sa komponentama iz skupa $\mathcal{A}$, reći ćemo da je $\mathbf{x}$ reč dužine n nad azbukom $\mathcal{A}$ ili n-reč m-skupa i pisaćemo $\mathbf{x} = x_1 x_2 \cdots x_n$.

Konačan niz dužine n, tj. niz dužine n je funkcija $f : \mathbb{N}_n \to \mathcal{A}$

$$f = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{array} \right),$$

a to je ekvivalentno i sa uređena n - torka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kao i sa n-reč $\mathbf{x}$=$x_1 x_2 \ldots x_n$ od azbuke $\mathcal{A}$=$\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, gde je $1 < 2 \ldots < n$.

Ako se u reči $\mathbf{x}$=$x_1 \ldots x_n$ dužine n nad m skupom $\mathcal{A}$=$\{a_1, \ldots, a_m\}$ slovo a_i pojavljuje tačno k_i puta, što označavamo sa $l_{a_i}(\mathbf{x}) = k_i$, tada ćemo reći da je reč $x_1 x_2 \ldots x_n$ n-reč m skupa tipa $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, gde naravno mora biti $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ i k_i nenegativni celi brojevi. Tih nizova (reči ili funkcija) po principu množenja ima m^n, a tipova (klasa) reči ima $\binom{m+n-1}{n}$, vidi teoreme 3.19 i 3.21, a u klasi tipa $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ ima ukupno $\frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$ reči, vidi teoremu 3.10.

Reč dužine nula zvaćemo prazna reč i obeležavati sa λ.

Podreč dužine k reči $\mathbf{x} = x_1 x_2 \cdots x_n$ nad proizvoljnom azbukom je svaka reč $x_s x_{s+1} \cdots x_{s+k-1}$ dužine k, za $s \in \mathbb{N}_{n-k+1}$ i $k \in \mathbb{N}_n$.

Početna podreč reči $\mathbf{x} = x_1 x_2 \cdots x_n$ je svaka reč $x_1 x_2 \cdots x_k$ za $k \in \mathbb{N}_n$.

Skup svih konačnih reči nad azbukom $\mathcal{A}$ obeležavaćemo sa $\mathcal{A}^*$, tj. $\mathcal{A}^* = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{A}^i$, gde je $\mathcal{A}^i$ skup svih reči dužine i nad azbukom $\mathcal{A}$.

Broj pojavljivanja podreči r u reči $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^*$ označavaćemo sa $l_r(\mathbf{x})$, a broj pojavljivanja slova $a \in \mathcal{A}$ u reči $\mathbf{x}$ sa $l_a(\mathbf{x})$.

Najmanji ceo broj koji nije manji od $x \in \mathbb{R}$ označavaćemo sa $\lceil x \rceil$, a najveći ceo broj koji nije veći od $x \in \mathbb{R}$ označavaćemo sa $\lfloor x \rfloor$.

Ceo broj najbliži broju x označavaćemo sa $[x]$ (ako postoje dva takva uzimaćemo manji), tj.

$$[x] = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & \big|\lfloor x \rfloor - x\big| \leq 0,5 \\ \lceil x \rceil, & \big|\lceil x \rceil - x\big| < 0,5 \end{cases} .$$

Osnovni principi kombinatorike:

1. Princip množenja

Ako je $|A_1| = n_1, \ldots, |A_k| = n_k$, tada je $|A_1 \times \ldots \times A_k| = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$

2. Princip zbira

Ako je $(\forall i, j \in \mathbb{N}_k)\; A_i \cap A_j = \emptyset$, tada je $|A_1 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + \ldots + |A_k|$

3. Princip bijekcije

Ako je f bijekcija skupa A u skup B, tj. $f : A \underset{\text{1-1}}{\overset{na}{\to}} B$, tada je $|A| = |B|$.

4. Dirihleov princip

Ako se rasporede 3 kuglice u 2 kutije, tada će u bar jednoj kutiji biti bar dve kuglice. Drugim rečima, ne postoji injektivna funkcija skupa $A = \{1, 2, 3\}$ u skup $B = \{a, b\}$, jer je $|A| > |B|$.

4′. Dirihleov princip

Ako se rasporede 2 kuglice u 3 kutije, tada će bar jedna kutija biti prazna. Drugim rečima, ne postoji surjektivna funkcija dvočlanog skupa $A = \{1, 2\}$ u tročlani skup $B = \{a, b, c\}$, jer je $|A| < |B|$.

5. Princip uključenja-isključenja

Za bilo koje podskupove B_1, B_2, B_3 i B_4 skupa S važi:
$|B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| - |B_1 \cap B_2|$;

$$|B_1 \cup B_2 \cup B_3| = |B_1| + |B_2| + |B_3| + \\ - |B_1 \cap B_2| - |B_1 \cap B_3| - |B_2 \cap B_3| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3|;$$

$$|B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4| = |B_1| + |B_2| + |B_3| + |B_4| + \\ -|B_1 \cap B_2| - |B_1 \cap B_3| - |B_1 \cap B_4| - |B_2 \cap B_3| - |B_2 \cap B_4| - |B_3 \cap B_4| \\ +|B_1 \cap B_2 \cap B_3| + |B_1 \cap B_2 \cap B_4| + |B_1 \cap B_3 \cap B_4| + |B_2 \cap B_3 \cap B_4| \\ - |B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4|;$$

Generalizacija:

Neka su B_i, $i \in \mathbb{N}_k$, podskupovi skupa S takvi da su svaka dva različita. Ako je $|B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap \cdots \cap B_{j_i}| = b_i$ za svaku permutaciju $(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ skupa $\{1, 2, \cdots, k\}$ i svako $i \in \mathbb{N}_k$, tada je:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{i=k} B_i \right| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} b_i.$$

Glava 2

FUNKCIJE

Kako se svaki kombinatorni objekat može definisati kao neka funkcija sa nekom osobinom, to ćemo u ovoj glavi posvetiti malo više pažnje raznim ekvivalentnim načinima definisanja funkcije.

Evo sada nekoliko ekvivalentnih definicija funkcije, tj. definicija koje kazuju potpuno isto.

Definicija 2.1 *Funkcija je skup uređenih parova u kome* **ne postoje dva para** *čije su prve komponente jednake, a druge komponente različite.*

Na primer $f_1 = \{(1, x), (2, y)\}$ i $f_2 = \{(1, x), (2, y), (3, y)\}$ jesu funkcije, dok $f_3 = \{(1, x), (1, y)\}$, $f_4 = \{(1, x), (1, y), (2, z)\}$ nisu funkcije, jer **postoje** dva para $(1, x)$ i $(1, y)$ kod kojih su prve komponente jednake, a druge komponente različite.

Definicija 2.2 *Funkcija je zakon, pravilo, postupak po kome se svakom elementu nekog skupa pridružuje* **tačno jedan** *elemenat nekog drugog (ili istog) skupa.*

Ako uređen par (a, b) grafički predstavimo pomoću orijentisanog luka ili duži (strelice) koja polazi iz tačke a, a završava se u tački b, tada su prethodne funkcije f_1 i f_2 predstavljene slikom Figure 2.1

Ako je f funkcija, tada se skup svih prvih komponenti obeležava sa $\mathcal{D}(f)$ i zove se skup **originala** ili **domen** funkcije f, a skup svih drugih komponenti se obeležava sa $\mathcal{A}(f)$ i zove se skup **slika** funkcije f.

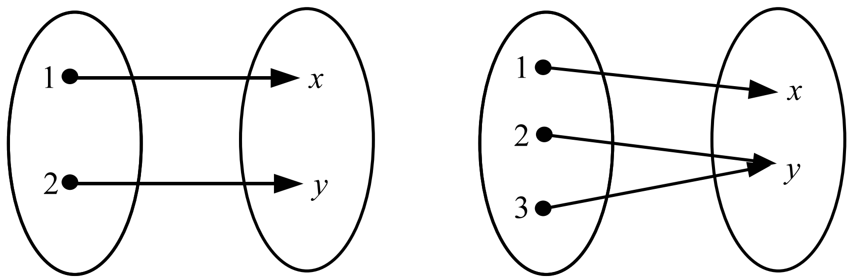

Figure 2.1: Prva slika

U nekim knjigama se $\mathcal{A}(f)$ zove kodomen funkcije f, a u nekim knjigama se bilo koji nadskup skupa $\mathcal{A}(f)$ zove kodomen funkcije f, zbog čega ćemo mi koristiti samo naziv skup slika.

Umesto oznake ***(x,y)***$\in$ ***f*** obično se koristi oznaka ***y=f(x)***, pa se može pisati i ***(x,f(x))***$\in$ ***f*** ili ***x*** $\mapsto$ ***f(x)***.

Definicija 2.3 *Slikovita definicija funkcije.*

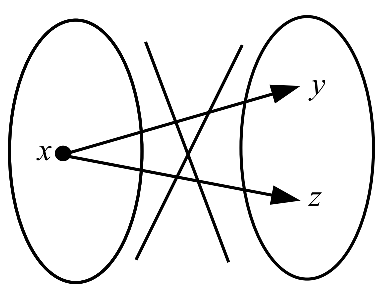

Figure 2.2: Druga slika

Definicija 2.4 *Skup uređenih parova f je funkcija akko:*

$$\Big(\forall x \in \mathcal{D}(f)\Big)\Big(\forall y, z \in \mathcal{A}(f)\Big) \quad \boxed{(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z.}$$

Definicija 2.5 *Skup uređenih parova f je funkcija akko:*

$$\Big(\forall x \in \mathcal{D}(f)\Big)\Big(\forall y, z \in \mathcal{A}(f)\Big) \quad \boxed{y \neq z \Rightarrow (x, y) \notin f \vee (x, z) \notin f.}$$

Definicija 2.6 *Skup uređenih parova f je funkcija akko:*

$$\Big(\forall x, y \in \mathcal{D}(f)\Big) \qquad \boxed{x = y \Rightarrow f(x) = f(y).}$$

Definicija 2.7 *Skup uređenih parova f je funkcija akko:*

$$\Big(\forall x, y \in \mathcal{D}(f)\Big) \qquad \boxed{f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y.}$$

Definicija 2.8 *Neka u Dekartovom pravouglom sistemu xOy u nekoj ravni, neke tačke x ose predstavljaju* **prve komponente**, *a neke tačke y ose predstavljaju* **druge komponente** *skupa uređenih parova f. Svakom paru $(o, s) \in f$ očevidno jednoznačno odgovara tačka M te ravni čije su „koordinate” (o, s), tj. $M = M(o, s)$. Skup tačaka M zvaćemo grafikom skupa uređenih parova f. Znači, proizvoljni podskup skupa tačaka ravni interpretira jednoznačno neki skup uređenih parova f. Tada proizvoljni* **grafik skupa uređenih parova f jeste grafik funkcije akko svaka prava paralelna sa y osom seče grafik u najviše jednoj tački.**

Ekvivalencija ovih definicija jednostavno se „dokazuje”, objašnjava, tako što se za svaku od njih pokaže da ona govori isto što definicija 2.3, tj. slika definicije 2.3. Definicija 2.3 govori da „ne sme da se desi da se jedan original x preslika u dve različite slike y i z”.

Predstavljanje, zapisivanje funkcija

Ako uređen par (a, b) grafički predstavimo pomoću orijentisanog luka ili duži (strelice) koja polazi iz tačke a a završava se u tački b, tada je funkcija $g = \{(1, 2), (3, 5), (4, 5)\}$ predstavljena sa slikom:

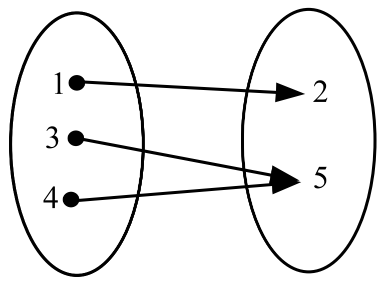

Figure 2.3: Treća slika

Funkcija $g = \{(1,2),(3,5),(4,5)\}$ pored ovoga zapisa kao skup uređenih parova i pomenute slike, može se uvek predstaviti u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu kao skup od tri tačke $\{A(1,2), B(3,5), C(4,5)\}$. Evo još nekih drugih načina zapisivanja te iste funkcije g.

$g = \{(1,2),(3,5),(4,5)\} = \binom{1\ 3\ 4}{2\ 5\ 5}$ ili tablično $\begin{array}{c|ccc} x & 1 & 3 & 4 \\ \hline g(x) & 2 & 5 & 5 \end{array}$.

Definicija 2.9 *Ako je* $f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \end{pmatrix}$ *i ako su svaka dva elementa iz* $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *međusobno različita, tada se za* f *kaže da je funkcija tj.* $f = \{(a_1,b_1),(a_2,b_2),...,(a_n,b_n)\}$ *ili* $f(a_i) = b_i$ *za sve* $i \in \{1,2,...,n\}$.

Time su date razne definicije funkcije što je važno zbog sagledavanja tog pojma na razne načine da bi se postigao što veći stepen razumevanja.

Sada potpuno analogno, dualno, izgradićemo pojam injektivne funkcije, tj. injektivnog preslikavanja.

Definicija 2.10 *Funkcija je injektivna ako* **ne postoje dva para** *čije su prve komponente različite, a druge komponente jednake.*

Definicija 2.11 *Slikovita definicija injektivne funkcije data je slikom Figure* 2.4.

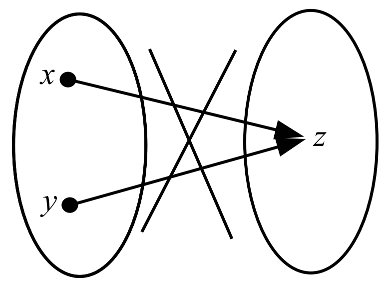

Figure 2.4: Četvrta slika

Definicija 2.12 *Funkcija* $f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \end{pmatrix}$ *je injektivna ako i samo ako su svaka dva elementa iz* $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ *međusobno različita.*

Definicija 2.13 *Funkcija* f *je injektivna funkcija akko:*

$$\Big(\forall x, y \in \mathcal{D}(f)\Big) \qquad \boxed{f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.}$$

Kao što je dato devet ekvivalentnih definicija funkcije, analogno (dualno) se može dati isto toliko ekvivalentnih definicija injektivne funkcije.

Definicija 2.14 *Skup uređenih parova* f *je funkcija skupa* A *u skup* B*, što zapisujemo* $f : A \to B$ *, ako i samo ako:*

$$\boxed{f \text{ je funkcija}} \quad \wedge \quad \boxed{\mathcal{D}(f) = A} \quad \wedge \quad \boxed{\mathcal{A}(f) \subseteq B.}$$

Definicija 2.15 *Funkcija* $f : A \to B$ *je surjektivna akko* $\mathcal{A}(f) = B$*, odnosno* $(\forall y \in B)(\exists x \in A) f(x) = y$*, što označavamo* $f : A \overset{na}{\to} B$.

Drugim rečima funkcija skupa A u skup B je surjektivna ako za svaku sliku iz skupa B postoji original iz skupa A koji se u nju preslikava.

Funkcija $f : A \to B$ je surjektivna ako za svaki elemenat x skupa B, postoji element y skupa A, takav da je $f(y) = x$, tj.

$$\boxed{f \text{ je funkcija}} \quad \land \quad \boxed{\mathcal{D}(f) = A} \quad \land \quad \boxed{\mathcal{A}(f) = B.}$$

Prva dva člana ovih konjunkcija su iz definicije funkcije $f : A \to B$, dok je treći definicija surjektivnosti.

Definicija 2.16 *Injektivna funkcija skupa A u skup B označava se sa* $f : A \stackrel{1-1}{\to} B$.

Definicija 2.17 *Injektivna i surjektivna funkcija* $f : A \to B$ *zove se bijekcija skupa A u skup B ili obostrano jednoznačno preslikavanje skupa A u skup B i označava se sa* $f : A \underset{1\text{-}1}{\overset{na}{\to}} B$.

Definicija 2.18 *Funkcija f skupa A od k elemenata u skup B od n elemenata ($f : A \to B, |A| = k, |B| = n$) je smeštanje k različitih kuglica u n različitih kutija, pri čemu svaka kutija može da primi od 0 do k kuglica i svaka kuglica je u nekoj kutiji.*

Ovo jeste ekvivalentna definicija funkcije jer smeštanje kuglice u kutiju je pridruživanje originalu - kuglici slike - kutije u koju je ona smeštena i ne može jedna kuglica biti istovremeno smeštena u dve kutije.

Funkcija je injektivna akko u svakoj kutiji ima najviše jedna kuglica.

Funkcija $f : A \to B$ je surjektivna akko je u svakoj kutiji bar jedna kuglica, tj. nije surjektivna akko bar jedna kutija ostane prazna.

Iz ove definicije je očevidno da funkcija tročlanog skupa u četvoročlani skup nikada ne može biti surjektivna jer po Dirihleovom principu bar jedna kutija mora ostati prazna.

Takođe je očevidno da funkcija četvoročlanog skupa u tročlani skup ne može biti injektivna jer će po Dirihleovom principu bar u jednoj kutiji biti bar dve kuglice.

Bijekcija $f : A \to A$ zove se **permutacija** skupa A. Na primer $f = \{(1,3),(2,1),(3,2)\} = \binom{1\,2\,3}{3\,1\,2} = 312$.

Glava 3

KLASIČNI KOMBINATORNI OBJEKTI

Sada ćemo pristupiti definisanju i prebrojavanju svih klasičnih kombinatornih objekata, kroz pojam funkcije i njenih osobina.

Jedna od dobrih garancija da će se dobro razumeti definicija nekog matematičkog objekta jeste da se prebroji skup tih svih objekata. Sledeći primeri su za pojmove funkcije, injektivne funkcije, surjektivne funkcije, rastuće funkcije, bijektivne funkcije, tj. permutacije i neopadajuće funkcije.

Pokazaćemo da je broj svih proizvoljnih funkcija jednak broju varijacija sa ponavljanjem (teorema 3.3), broj injektivnih funkcija jednak broju varijacija bez ponavljanja (teorema 3.7), broj bijektivnih funkcija jednak broju permutacija bez ponavljanja (teorema 3.5). Broj rastućih funkcija jednak broju kombinacija bez ponavljanja (teorema 3.15), broj neopadajućih funkcija jednak broju kombinacija sa ponavljanjem, tj. broju nekih permutacija sa ponavljanjem. Broj funkcija sa fiksiranim brojevima pojavljivanja slika jednak je broju permutacija sa ponavljanjem (teorema 3.10). Prema tome, prebrojavanjem skupa funkcija određenog tipa izvršeno je istovremeno i prebrojavanje permutacija, varijacija i kombinacija sa i bez ponavljanja, što je jedna od poenti ovog rada.

Time su važni pojmovi funkcije, injektivnosti, surjektivnosti, rastuće, neopadajuće, itd. kombinatorno interpretirani, što je od izuzetnog značaja kako za teoriju funkcija, tako i za kombinatoriku.

Primer 3.1 *Neka je* $A = \{1, 2, 3\}$ *i* $B = \{x, y\}$. *Tada je :*

$$|\{f|f : A \to B\}| = 2^3 \qquad |\{f|f : B \to A\}| = 3^2$$

$$|\{f|f : A \overset{1-1}{\to} B\}| = 0 \qquad |\{f|f : B \overset{1-1}{\to} A\}| = 3 \cdot 2$$

$$|\{f|f : A \overset{na}{\to} B\}| = 2^3 - 2 \qquad |\{f|f : B \overset{na}{\to} A\}| = 0$$

$$|\{f|f : A \underset{na}{\overset{1-1}{\to}} B\}| = 0 \qquad |\{f|f : B \underset{na}{\overset{1-1}{\to}} A\}| = 0$$

$$|\{f|f : A \to A\}| = 3^3 \qquad |\{f|f : B \to B\}| = 2^2$$

$$|\{f|f : A \overset{1-1}{\to} A\}| = 3! \qquad |\{f|f : B \overset{1-1}{\to} B\}| = 2!$$

$$|\{f|f : A \overset{na}{\to} A\}| = 3! \qquad |\{f|f : B \overset{na}{\to} B\}| = 2!$$

$$|\{f|f : A \underset{na}{\overset{1-1}{\to}} A\}| = 3! \qquad |\{f|f : B \underset{na}{\overset{1-1}{\to}} B\}| = 2!$$

Lako je izvršiti generalizaciju u svim ovim primerima, izuzev primera $|\{f|f : A \overset{na}{\to} B\}|$, jer nam je tu potreban samo princip množenja i oznaka $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$. Evo tih generalizacija.

Definicija 3.2 *Skup svih funkcija skupa* $\{1, 2, ..., k\}$ *u skup* $\{1, 2, ..., n\}$ *jeste skup svih* **varijacija sa ponavljanjem** *od* n *elemenata* k *- te klase, odnosno skup* k*-reči* n*-skupa.*

Teorema 3.3 *Broj svih funkcija skupa* $\{1, 2, ..., k\}$ *u skup* $\{1, 2, ..., n\}$ *tj. broj svih* **varijacija sa ponavljanjem** *od* n *elemenata* k *- te klase, odnosno* k*-reči* n*-skupa jednak je:*

$$\left|\left\{f|f : \{1, 2, ..., k\} \to \{1, 2, ..., n\}\right\}\right| = n^k.$$

U dokazu ove teoreme koristi se samo princip množenja, jer za svaki original iz domena $\{1,2,...,k\}$ postoji tačno n mogućnosti.

Definicija 3.4 *Permutacije bez ponavljanja su bijektivne funkcije skupa u samog sebe.*

Očevidno je da svaka injektivna funkcija konačnog skupa A u konačan skup B, gde A i B imaju jednak broj elemenata, jeste uvek i surjektivna tj. bijektivna.

Takođe, svaka sirjektivna funkcija konačnog skupa A u konačan skup B, gde A i B imaju jednak broj elemenata, jeste uvek i injektivna, tj. bijektivna.

Teorema 3.5 *Bijektivnih funkcija skupa* $\{1,2,...,n\}$ *u samog sebe, tj.* **permutacija bez ponavljanja** *ima*

$$\left|\left\{f|f:\{1,2,...,n\}\underset{na}{\overset{1-1}{\to}}\{1,2,...,n\}\right\}\right| = n!.$$

Bijektivnih funkcija u skupu $\left\{f|f:\{1,2,...,n\}\underset{na}{\overset{1-1}{\to}}\{1,2,...,n\}\right\}$ tj. **permutacija bez ponavljanja** ima isto toliko na koliko različitih načina se mogu popuniti n praznih mesta sa simbolima $1,2,...,n$ tako da se svaki pojavi tačno jedanput. Za prvo mesto ima n mogućnosti, za drugo samo $n-1$ mogućnosti,..., za pretposlednje mesto 2 mogućnosti i za poslednje jedna mogućnost. Kako svaka mogućnost ide sa svakom mogućnošću (princip množenja), sledi da je traženi broj $n\cdot(n-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1 = n!$.

Definicija 3.6 *Skup* **injektivnih funkcija** *skupa* $\{1,2,...,k\}$ *u skup* $\{1,2,...,n\}$, *za* $n \geq k$, *jeste skup* **varijacija bez ponavljanja** *od* n *elemenata* k *- te klase, tj.*

$$\left\{f|f:\{1,2,...,k\}\overset{1-1}{\to}\{1,2,...,n\}\right\}.$$

Teorema 3.7 *Broj svih* **injektivnih funkcija** *skupa* $\{1,2,...,k\}$ *u skup* $\{1,2,...,n\}$, *za* $n \geq k$, *tj. broj svih* **varijacija bez ponavljanja** *od* n *elemenata* k *- te klase i jednak je:*

$$\left|\left\{f|f:\{1,2,...,k\}\overset{1-1}{\to}\{1,2,...,n\}\right\}\right| = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot\big(n-(k-1)\big).$$

Injektivnih funkcija skupa $\{1, 2, 3, ..., k\}$ u skup $\{1, 2, 3, ..., n\}$ ima isto toliko na koliko se različitih načina mogu popuniti k praznih mesta sa simbolima iz skupa $\{1, 2, 3, ..., n\}$ tako da je na svakom mestu tačno jedan simbol i da su na svaka dva mesta različiti simboli. Za prvo mesto postoji n mogućnosti, za drugo mesto $n-1$ mogućnosti, ... , za k - to mesto $n-(k-1)$ mogućnosti, a kako svaka od tih mogućnosti ide sa svakom to po principu množenja sledi da je traženi broj funkcija (varijacija bez ponavljanja) jednak $n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. U kombinatorici su ove injektivne funkcije poznate pod nazivom varijacije bez ponavljanja od n elemenata k - te klase čiji broj se obeležava sa V_k^n, pa je znači $V_k^n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Definicija 3.8 *Skup* **permutacija sa ponavljanjem** *je skup svih takvih funkcija f skupa $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ u neki konačni skup M, takvih da se u svakoj funkciji f svaka slika pojavljuje isti broj puta.*

Primer 3.9 *Ako je $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $M = \{a, b\}$ tada skup funkcija:*

$$\left\{ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\a&a&a&b&b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\a&a&b&a&b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\a&a&b&b&a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\a&b&a&a&b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\a&b&a&b&a\end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\a&b&b&a&a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\b&a&a&a&b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\b&a&a&b&a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\b&a&b&a&a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\b&b&a&a&a\end{pmatrix} \right\}.$$

jeste skup $\mathcal{P}_{3,2}(5)$ svih permutacija sa ponavljanjem od 5 elemenata u kojima ima 3 slike međusobno jednake i 2 slike međusobno jednake.

Na primer, funkcije iz skupa $\Big\{f | f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}\Big\}$ u kojima se simbol 1 kao slika pojavljuje tačno k_1 puta, simbol 2 tačno k_2 puta, ... , simbol n tačno k_n puta (k_i su prirodni brojevi ili nule) i $k_1 + k_2 + ... + k_n = n$, zovu se permutacije sa ponavljanjem od n elemenata među kojima ima tačno k_1 međusobno jednakih, k_2 jednakih, itd. k_n jednakih. Ako posmatramo n torku slika funkcije f, to je reč (niz) dužine n koja se u kombinatorici zove n-reč tipa $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ nekoga n-skupa. Skup svih ovih permutacija sa ponavljanjem (tj. n reči) obeležava se sa $\mathcal{P}_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(n)$, a njihov broj sa $P_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(n)$. Permutacije sa ponavljanjem ćemo zapisivati pišući samo drugu vrstu, tj. $\binom{1\,2\,3\,4\,5}{a\,a\,a\,b\,b} = aaabb$. Na primer, skup svih permutacija skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ u skup $M = \{a, b\}$,

gde se a pojavljuje tri puta i b dva puta, tj. $k_1 = 3$ i $k_2 = 2$ je $\mathcal{P}_{3,2}(5) = \Big\{ f : A \to M \mid |\{x|f(x) = a\}| = 3 \wedge |\{x|f(x) = b\}| = 2 \Big\} =$
$= \{aaabb, aabab, aabba, abaab, ababa, abbaa, baaab, baaba, babaa, bbaaa\}$, pa je $|\mathcal{P}_{3,2}(5)| = P_{3,2}(5) = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$.

Teorema 3.10 *Neka su* $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{N}_0$, *neka je* $A = \{1, 2, ..., n\}$ *i neka je* $k_1 + k_2 +, ..., k_n = n$. *Tada broj* $P_{k_1,k_2,\dots,k_n}(n)$ *skupa svih funkcija* $\mathcal{P}_{k_1,k_2,\dots,k_n}(n) = \Big\{ f | f : A \to A \wedge \big|\{x|f(x) = i\}\big| = k_i \Big\}$ *odnosno* **permutacija sa ponavljanjem** *od* n *elemenata među kojima se slika (elemenat)* i *pojavljuje tačno* k_i *puta,* $i \in \mathbb{N}_n$, *je*

$$|\mathcal{P}_{k_1,k_2,\dots,k_n}(n)| = P_{k_1,k_2,\dots,k_n}(n) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!}.$$

Primetimo da za $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$, to su permutacije bez ponavljanja kojih ima $n!$

Dokaz ove teoreme po pricipu množenja je očevidan, jer ako pretpostavimo da su svake dve slike u funkciji f različite, tada bi broj funkcija bio $n!$. Međutim, kako njih k_1 slika su međusobno jednake, to sledi da će se broj traženih funkcija smanjiti $k_1!$ puta. Analogno će se broj funkcija smanjiti i $k_2!$ puta itd. smanjiti još i $k_n!$ puta.

Jedan od vrlo važnih pojmova je pojam rastuće funkcije $f : A \to B$. Jasno je da se taj pojam definiše samo ako su skupovi A i B totalno uređeni, pa ćemo mi zbog toga uzimati da su skupovi A i B neki podskupovi skupa svih prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

Definicija 3.11 *Funkcija* $f : A \to B$ *je rastuća, što označavamo sa* $f \nearrow$, *ako i samo ako za svako* x *i svako* y *iz skupa* A *važi*

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y), \ tj. \ f = \begin{pmatrix} \dots & x & < & y & \dots \\ \dots & f(x) & < & f(y) & \dots \end{pmatrix}.$$

Kako u zapisu funkcije $f = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{smallmatrix}\right)$, tj. $f = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{smallmatrix}\right)$ redosled u prvoj vrsti može biti bilo kakav, mi ćemo se dogovoriti da u prvoj vrsti niz brojeva $a_1, \ a_2, ..., \ a_n$ jeste uvek u rastućem poretku, tj. $a_1 < a_2 < ... < a_n$, jer tada će funkcija $f = \binom{a_1\ a_2\ ...\ a_n}{b_1\ b_2\ ...\ b_n}$ biti rastuća ako i samo ako je $b_1 < b_2 < ... < b_n$.

Na primer $f_1 = \binom{123}{123}$, $f_2 = \binom{123}{135}$, $f_3 = \binom{123}{245}$, $f_4 = \binom{123}{345}$, itd. su rastuće funkcije skupa $\{1,2,3\}$ u skup $\{1,2,3,4,5\}$.

Kako je u funkcijama od f_1, f_2, f_3 i f_4 prva vrsta uvek ista, to se onda one mogu **predstavljati samo sa drugom vrstom**, što ćemo ubuduće i raditi, tj. $f_1 = \binom{123}{123} = 123$, $f_2 = \binom{123}{135} = 135$, $f_3 = \binom{123}{245} = 245$, $f_4 = \binom{123}{345} = 345$.

Primetimo da svakoj ovoj rastućoj funkciji jednoznačno odgovara jedan tročlani podskup skupa $\{1,2,3,4,5\}$ i obratno.

To znači da smo konstruisali (napravili, tj. definisali) jednu bijekciju ψ između skupa svih rastućih funkcija skupa $\{1,2,3\}$ u skup $\{1,2,3,4,5\}$ i skupa svih tročlanih podskupova skupa $\{1,2,3,4,5\}$, tj. kombinacija bez ponavljanja od 5 elemenata treće klase.

Prema tome, pojam rastuće funkcije može se „identifikovati" sa pojmom kombinacije bez ponavljanja, ali samo u smislu bijekcije ψ.

Na primer $\psi(f_1) = \{1,2,3\}$, $\psi(f_2) = \{1,3,5\}$, $\psi(f_3) = \{2,4,5\}$ i $\psi(f_4) = \{3,4,5\}$. Sada zbog principa bijekcije sledi da tročlanih podskupova skupa $\{1,2,3,4,5\}$, ima isto koliko i rastućih funkcija $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5\}$.

Definicija 3.12 *Kombinacije bez ponavljanja od n elemenata k -te klase su k -točlani podskupovi skupa od n elemenata.*

Primer 3.13 *Broj elemenata skupa nekih rastućih funkcija:*

$$|\{f | f : \{1,2\} \to \{1,2\} \ \wedge \ f \nearrow\}| = 1$$
$$|\{f | f : \{1,2\} \to \{1,2,3\} \ \wedge \ f \nearrow\}| = 3$$
$$|\{f | f : \{1,2\} \to \{1,2,3,4\} \ \wedge \ f \nearrow\}| = 6$$
$$|\{f | f : \{1,2\} \to \{1,2,3,4,5\} \ \wedge \ f \nearrow\}| = 10$$
$$|\{f | f : \{1,2\} \to \{1,2,3,...,n\} \ \wedge \ f \nearrow\}| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Primer 3.14 *Broj elemenata skupa nekih rastućih funkcija:*

$$|\{f|f:\{1,2,3\}\to\{1,2\}\wedge f\nearrow\}| = 0$$
$$|\{f|f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}\wedge f\nearrow\}| = 1$$
$$|\{f|f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}\wedge f\nearrow\}| = 4$$
$$|\{f|f:\{1,2,3\}\to\{1,\dots,5\}\wedge f\nearrow\}| = 10$$
$$|\{f|f:\{1,2,3\}\to\{1,\dots,n\}\wedge f\nearrow\}| = \frac{n^3-3n^2+2n}{6}$$

Iz definicija injektivne funkcije i rastuće funkcije, očevidno je da se sve injektivne funkcije mogu dobiti tako što se slike kod rastućih funkcija ispermutuju na sve moguće načine. Odatle sledi, po principu množenja, da je broj rastućih funkcija, odnosno kombinacija bez ponavljanja $k!$ puta manji od broja injektivnih funkcija, tj. varijacija bez ponavljanja vidi 3.7, odnosno važi:

Teorema 3.15 *Broj svih rastućih funkcija skupa $\{1,2,\dots,k\}$ u skup $\{1,2,\dots,n\}$, odnosno broj svih kombinacija bez ponavljanja od n elemenata k - te klase, tj. broj svih k - točlanih podskupova skupa od n elemenata, za $n \geq k$ jednak je*

$$\left|\left\{f|f:\{1,\dots,k\}\to\{1,\dots,n\}\wedge f\nearrow\right\}\right| = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Kako je oznaka za broj svih mogućih kombinacija bez ponavljanja od n elemenata k te klase C_k^n, to je

$$C_k^n = \frac{V_k^n}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Definicija 3.16 *Funkcija $f: A\to B$ je neopadajuća, što označavamo sa $f\underline{\nearrow}$, ako za svako x i svako y iz skupa A važi*

$$x<y \Rightarrow f(x)\leq f(y),\ tj.\ f=\begin{pmatrix} \dots & x & < & y & \dots \\ \dots & f(x) & \leq & f(y) & \dots \end{pmatrix}.$$

Primetimo da su pojam „neopadajuća funkcija" i pojam „nije opadajuća funkcija" potpuno *različiti pojmovi*!

Na primer $f_1 = \binom{1234567}{1123455}$, $f_2 = \binom{1234567}{1123455}$, $f_3 = \binom{1234567}{1111111}$, $f_4 = \binom{1234567}{1155555}$, $f_5 = \binom{1234567}{3333445}$, $f_6 = \binom{1234567}{5555555}$ itd. su neopadajuće funkcije skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ u skup $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Kako u zapisu funkcije

$$f = \begin{pmatrix} a_1\ a_2\ ...\ a_n \\ b_1\ \ b_2\ ...\ \ b_n \end{pmatrix}, \text{ tj. } f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & ... & f(a_n) \end{pmatrix}$$

redosled u prvoj vrsti može biti bilo kakav, mi ćemo se dogovoriti da u prvoj vrsti niz brojeva $a_1,\ a_2, ...,\ a_n$ jeste uvek u rastućem poretku, tj. $a_1 < a_2 < ... < a_n$, jer tada će funkcija $f = \binom{a_1\ a_2\ ...\ a_n}{b_1\ b_2\ ...\ b_n}$ biti neopadajuća ako i samo ako je $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$.

Kako je u funkcijama od f_1 do f_6 prva vrsta uvek ista, to se onda one mogu **predstavljati samo sa drugom vrstom**, što ćemo ubuduće i raditi, tj. $f_1 = \binom{1234567}{1123455} = 1123455$, $f_2 = \binom{1234567}{1222255} = 1222255$, $f_3 = \binom{1234567}{1111111} = 1111111$, $f_4 = \binom{1234567}{1155555} = 1155555$, $f_5 = \binom{1234567}{3333445} = 3333445$, $f_6 = \binom{1234567}{5555555} = 5555555$ itd.

Primer 3.17 *Broj elemenata skupa nekih neopadajućih funkcija:*

$$|\{f | f : \{1, 2\} \to \{1, 2\}\ \wedge\ f\underline{\nearrow}\}| = 3$$

$$|\{f | f : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}\ \wedge\ f\underline{\nearrow}\}| = 6$$

$$|\{f | f : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3, 4\}\ \wedge\ f\underline{\nearrow}\}| = 10$$

$$|\{f | f : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}\ \wedge\ f\underline{\nearrow}\}| = 15$$

$$|\{f | f : \{1, 2\} \to \{1, 2, ..., n\}\ \wedge\ f\underline{\nearrow}\}| = \frac{n(n+1)}{2}$$

Primer 3.18 *Broj elemenata skupa nekih neopadajućih funkcija:*

$$|\{f | f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\} \wedge f\underline{\nearrow}\}| = 4$$

$$|\{f | f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\} \wedge f\underline{\nearrow}\}| = 10$$

$$|\{f | f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\} \wedge f\underline{\nearrow}\}| = 20$$

$$|\{f | f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\} \wedge f\underline{\nearrow}\}| = 35$$

$$|\{f | f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, ..., n\} \wedge f\underline{\nearrow}\}| = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$$

Teorema 3.19 *Neka su ϕ i ψ proizvoljne funkcije iz skupa svih funkcija $\mathcal{F} = \Big\{f | f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}\Big\}$ i neka su one u relaciji ρ akko se slika „i” u svakoj od tih funkcija pojavljuje isti k_i broj puta za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tada je ρ relacija ekvivalencije skupa $\mathcal{F}$.*

Dokaz Svaka funkcija ϕ iz $\mathcal{F}$, jednoznačno određuje jednu uređenu n-torku $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, gde je k_i broj pojavljivanja slike i u funkciji ϕ. Sada je jasno da su ϕ i ψ u relaciji ρ akko su nenegativni brojevi $k_1, k_2, \ldots, k_n$ isti za obe te funkcije, pa je jasno da je ρ ekvivalencija. Takođe je očevidno da je $k_1+k_2+\ldots+k_n = k$. Svaka klasa ekvivalencije je očevidno reprezentovana sa n-torkom $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ za koju važi da je $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$ i $k_1 \geq 0, \ldots, k_n \geq 0$, a broj elemenata u toj klasi očevidno je $\frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$. Jasno je da je broj klasa jednak broju rešenja jednačine $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$ po nenegativnim celobrojnim nepoznatama $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Videćemo da je taj broj rešenja $\binom{n+k-1}{k}$.

Definicija 3.20 *Klase ekvivalencije u odnosu na relaciju ρ iz teoreme* 3.19*, zovu se kombinacije od n elemenata k te klase sa ponavljanjem.*

Dogovorićemo se da za predstavnika klase uzimamo uvek k-reč u neopadajućem poretku, pa su onda kombinacije sa ponavljanjem od n elemenata k -te klase reprezentovane sa neopadajućim funkcijama skupa $\{1, 2, \ldots, k\}$ u skup $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Sam tip $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ jednoznačno određuje tu kombinaciju sa ponavljanjem, tj. to je kombinacija u kojoj su prvo k_1 jedinica, pa k_2 dvojki, itd. na kraju k_n simbola n.

Prema tome, možemo kombinacije sa ponavljanjem „identifikovati” sa njihovim predstavnicima, neopadajućim funkcijama.

Pokažimo sada da kombinacija sa ponavljanjem, tj. neopadajućih funkcija ima isto koliko i nekih odgovarajuće odabranih permutacija sa ponavljanjem.

Uočimo neku proizvoljnu kombinaciju sa ponavljanjem od četiri elementa devete klase sa ponavljanjem, tj. neopadajuću funkciju skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ u skup $\{1, 2, 3, 4\}$ npr. $\binom{123456789}{112333344} = 112333344$. Ova kombinacija sa ponavljanjem (neopadajuća funkcija) može se interpretirati (odrediti, predstaviti, zadati,...) na primer sa nizom od devet kuglica koje se ne razlikuju i tri pregrade koje se ne razlikuju, tj. sa

$oo|o|oooo|oo$. Kombinacija 333333333 se interpretira sa $||ooooooooo|$, 122222224 sa $o|ooooooo||o$, 111111444 sa $oooooo|||ooo$ itd. Znači, broj kuglica levo od prve pregrade je broj jedinica, broj kuglica između prve i druge pregrade je broj dvojki, broj kuglica između druge i treće pregrade je broj trojki i na kraju, broj kuglica desno od treće (poslednje) pregrade je broj četvorki. Kako su ovi nizovi permutacije sa ponavljanjem od 12 elemenata među kojima ima devet jednakih i tri jednaka, to je njihov broj jednak $\overline{C_9^4} = \frac{12!}{9! \cdot 3!} = \binom{4+9-1}{9}$ (teorema 3.10).

Znači da se kombinacije sa ponavljanjem od n elemenata k - te klase, tj. neopadajuće funkcije skupa $\{1, 2, ..., k\}$ u skup $\{1, 2, ..., n\}$ interpretiraju sa nizom od k kuglica i $n-1$ pregrada među njima, tj. sa permutacijama sa ponavljanjem od $k+n-1$ elemenata među kojma ima k elemenata od jedne vrste i $n-1$ elemenata od druge vrste, pa je njihov broj $\overline{C_k^n} = \frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$.

Na osnovu 3.10, 3.19, 3.20 i prethodnih pasusa važi sledeća vrlo važna teorema.

Teorema 3.21 *Sledeći brojevi:*

- *broj kombinacija sa ponavljanjem od n elemenata k - te klase,*
- *broj neopadajućih funkcija skupa $\{1, 2, ..., k\}$ u skup $\{1, 2, ..., n\}$,*
- *broj permutacija sa ponavljanjem od $k+n-1$ elemenata među kojima je k međusobno jednakih i $n-1$ međusobno jednakih i*
- *broj svih rešenja jednačine $k_1+k_2+\ldots+k_n = k$, gde su nepoznate $k_1, k_2, \ldots, k_n$ iz skupa $\mathbb{N}_0$, a k i n dati prirodni brojevi,*

su međusobno jednaki i iznose $\overline{C_k^n} = P_{k,n-1}(k+n-1) =$

$$\left|\left\{f | f : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., n\} \wedge f \nearrow\!\!\!\!\underline{\ \ }\right\}\right| = \frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Polinomna formula

Polinomna formula je tesno vezana sa k-rečima n-skupa istog tipa $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ tj. teoremama 3.10 i 3.21, odnosno sa permutacijama sa ponavljanjem i kombinacijama sa ponavljanjem i data je teoremom:

Teorema 3.22 *Za bilo koje prirodne brojeve k i n važi identitet*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^k = \sum_{\substack{k_1 + \ldots + k_n = k \\ k_1 \geq 0, \ldots, k_n \geq 0}} \frac{k!}{k_1! k_2! \ldots k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

Dokaz Množenjem izraza $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ sa samim sobom k puta, dobija se n^k sabiraka. Svaki sabirak je oblika $\boldsymbol{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}$, gde su $i_1, i_2, \ldots, i_k$ iz $\{1, 2, \ldots, n\}$ (neka je uvek $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k$), pa su ti sabirci k-reči n-skupa tipa $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Znači da su sabirci oblika $\boldsymbol{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}}$ i tog oblika ih ima $\frac{k!}{k_1! k_2! \ldots k_n!}$.

Specijalno, za $n = 2$ dobija se binomna formula

$$(x_1 + x_2)^k = \sum_{\substack{k_1 + k_2 = k \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{k!}{k_1! k_2!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} = \sum_{k_1=0}^{k} \binom{k}{k_1} x_1^{k_1} x_2^{k-k_1}$$

Surjektivne funkcije
Particije
Formula isključenja-uključenja

Prilikom prebrojavanja surjektivnih funkcija dolazi se do tesne veze između njih i particija skupova sa jedne strane i surjektivnih funkcija i formule uključenja - isključenja sa druge strane, što znači i veze između particija skupova i formule uključenja - isključenja.

Da bismo pokazali te veze ,neophodno je podsetiti se formule uključenja - isključenja i definicije particije skupova.

Teorema 3.23 *Neka su B_i, $i \in \mathbb{N}_k$, podskupovi skupa S takvi da su svaka dva različita. Ako je $|B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap \cdots \cap B_{j_i}| = b_i$ za svaku permutaciju $(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ skupa $\{1, 2, \cdots, k\}$ i svako $i \in \mathbb{N}_k$, tada je*

$$\left| \bigcup_{i=1}^{i=k} B_i \right| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} b_i.$$

Dokaz ove teoreme izvodi se indukcijom.

Teorema 3.24 *Ako uzmemo oznake iz prethodne teoreme i $S = B_0$, tada važi:*

$$\left|\bigcap_{i=1}^{k}\overline{B_i}\right| = \left|\overline{\bigcup_{i=1}^{k}B_i}\right| = |B_0| - \left|\bigcup_{i=1}^{k}B_i\right| = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}b_i$$

Definicija 3.25 *Particija (podela ili razbijanje) skupa A, skup je nepraznih podskupova skupa A, od kojih su svaka dva disjunktna (nemaju zajedničkih elemenata, tj. presek im je prazan skup), a njihova je unija ceo skup A.*

Ako skup A ima n elemenata, tada se broj svih particija skupa A na k podskupova obeležava sa S_k^n i zove se Stirlingov broj. Sada je jasno da je broj svih particija skupa od n elemenata jednak $S_1^n + S_2^n + \cdots + S_n^n$.

Na primer, sve particije skupa $\{1,2,3\}$ su:
$\Big\{\{1\},\{2\},\{3\}\Big\}, \Big\{\{1,2\},\{3\}\Big\}, \Big\{\{1,3\},\{2\}\Big\}, \Big\{\{2,3\},\{1\}\Big\}, \Big\{\{1,2,3\}\Big\}$
i njhov broj je $S_3^3 + S_2^3 + S_1^3 = 1 + 3 + 1 = 5$.
Svih particija skupa $\{1,2,3,4\}$ ima $S_1^4+S_2^4+S_3^4+S_4^4 = 1+7+6+1 = 15$.

Na primer $\Big\{\{1,2\},\{3,4,5\}\Big\}$, $\Big\{\{1\},\{2\},\{3,4,5\}\Big\}$, $\Big\{\{1,2,3,4,5\}\Big\}$ su neka tri primera particije skupa $\{1,2,3,4,5\}$, kojih ima ukupno $S_1^5+S_2^5+S_3^5+S_4^5+S_5^5 = 1+15+25+10+1 = 52$, a $\Big\{\{1,2\},\{3,4,5,6\}\Big\}$, $\Big\{\{1\},\{2,6\},\{3,4,5\}\Big\}$, $\Big\{\{1,2,3,4,5,6\}\Big\}$, $\Big\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\Big\}$ i na primer particija $\Big\{\{1,5\},\{3,6\},\{2,4\}\Big\}$, su nekih pet primera particija skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$, kojih ima ukupno $S_1^6+S_2^6+S_3^6+S_4^6+S_5^6+S_6^6 = 1+\binom{6}{5}+\binom{6}{4}+\binom{6}{3}\frac{1}{2!}+\binom{6}{4}+\binom{6}{3}\binom{3}{2}+\binom{6}{2}\binom{4}{2}\frac{1}{3!}+\binom{6}{3}+\binom{6}{2}\binom{4}{2}\frac{1}{2!}+\binom{6}{2}+1 = 203$, jer tipovi svih mogućih particija skupa A u odnosu na broj elemenata u podskupovima tih particija su: (6),(1,5),(2,4), (3,3),(1,1,4),(1,2,3), (2,2,2),(1,1,1,3),(1,1,2,2),(1,1,1,1,2),(1,1,1,1,1,1), ukupno 11, koliko ima i sabiraka u dobijanju zbira 203. Prvi sabirak je $S_1^6 = 1$, zbir sledeća tri sabirka je $S_2^6 = \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{6}{3}\frac{1}{2!}$, zbir sledeća tri sabirka je $S_3^6 = \binom{6}{4} + \binom{6}{3}\binom{3}{2} + \binom{6}{2}\binom{4}{2}\frac{1}{3!}$, zbir sledeća dva sabirka je $S_4^6 = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}\binom{4}{2}\frac{1}{2!}$, a poslednje dva sabirka su $S_5^6 = \binom{6}{2}$ i $S_6^6 = 1$.

Prema tome, broj svih relacija ekvivalencije u skupovima koji imaju 1, 2, 3, 4, 5 i 6 elemenata je redom 1, 2, 5, 15, 52 i 203.

Broj svih surjektivnih funkcija skupa A=$\{1,2,3,4,5,6,7\}$ u skup B=$\{1,2,3,4,5\}$ odnosno

$$|\{f|f : A \stackrel{na}{\to} B\}| = \left|\left\{f|f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \stackrel{na}{\to} \{1,2,3,4,5\}\right\}\right| =?$$

Prvi način: Neka je B_1 skup svih funkcija skupa A u skup B u kojima se kao slika nikada ne pojavljuje slika 1,..., B_5 skup svih funkcija skupa A u skup B u kojima se kao slika nikada ne pojavljuje slika 5. Tada je $S = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5$ skup svih funkcija u kojima se bar jedan od elemenata skupa $B = \{1,2,3,4,5\}$ ne pojavljuje kao slika, a komplemenat toga skupa $\overline{S}$ je skup svih funkcija u kojima se svaki od elemenata skupa B pojavljuje bar jednom, tj. surjektivnih. Prema tome, traženi broj surjektivnih funkcija $\overline{S}$ dobija se kada od broja svih funkcija skupa A u skup B, tj. 5^7, oduzmemo broj $|S|$. Znači $\overline{S} = 5^7 - |S| = 5^7 - |B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5|$. Zbog teoreme 3.23 to je
$5^7 - |B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5| = \binom{5}{0}5^7 - \binom{5}{1}4^7 + \binom{5}{2}3^7 - \binom{5}{3}2^7 + \binom{5}{4}1^7 =$
$= \binom{5}{1}1^7 - \binom{5}{2}2^7 + \binom{5}{3}3^7 - \binom{5}{4}4^7 + \binom{5}{5}5^7 = (-1)^5 \sum_{i=1}^{5}(-1)^i \binom{5}{i} i^7 = 16800$

Generalizacija:

Teorema 3.26 *Ako je $|A| = n$ i $|B| = k \leq n$ (jer za $k > n$ nema surjektivnih funkcija), tada je broj $s_{n,k}$ svih surjektivnih funkcija skupa $A = \mathbb{N}_n$ u skup $B = \mathbb{N}_k$*

$$|\{f|f : A \stackrel{na}{\to} B\}| = s_{n,k} = (-1)^k \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} i^n$$

Specijalno za $k = n$ imamo da je $\{f|f : A \stackrel{na}{\to} B\}$ skup svih bijekcija skupa A u samog sebe, tj. skup svih permutacija skupa $A = B$, pa je:

$$s_{n,n} = n! = (-1)^n \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^n.$$

Drugi način: Izračunaćemo broj svih petočlanih particija skupa $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, tj. broj svih petočlanih skupova čiji su elementi neprazni podskupovi skupa od 7 elemenata koji su međusobno disjunktni i čija je unija jednaka tom skupu A (koji se zove Stirlingov broj S_5^7), jer tada svakom podskupu te particije pridružujemo istu sliku iz skupa B i naravno na kraju broj tih particija pomnožimo sa 5! jer je to broj bijekcija između skupa $B = \{1,2,3,4,5\}$ i tih 5 podskupova neke particije skupa $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Particije na tih 5 podskupova s obzirom na kardinalnost tih podskupova mogu biti jednog od sledeća dva oblika 11113, 11122. Znači traženi broj je: $S_5^7 \cdot 5! = \left(\binom{7}{3} + \binom{7}{2}\binom{5}{2}\frac{1}{2!}\right) 5! = 140 \cdot 120 = 16800$.

Generalizacija:

Teorema 3.27 *Ako je $|A| = n$ i $|B| = k \leq n$ (jer za $k > n$ nema surjektivnih funkcija), tada je broj $s_{n,k}$ svih surjektivnih funkcija skupa A u skup B*

$$|\{f | f : A \overset{na}{\to} B\}| = s_{n,k} = \mathbf{S_k^n} \cdot \mathbf{k}!$$

gde je S_k^n broj svih particija n - točlanog skupa na k disjunktnih podskupova čija unija je taj n - točlani skup.

Kao posledica prethodne dve teoreme sledi formula za broj particija, tj. Stirlingov broj S_k^n.

Teorema 3.28 $S_k^n = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} i^n$.

Prema tome :

Broj svih surjektivnih funkcija n - točlanog skupa u k - točlani skup podeljen sa k! jednak je broju $\mathbf{S_k^n}$ svih particija skupa od n elemenata na k nepraznih disjunktnih podskupova.

Teorema 3.29 *Ako su n i m prirodni brojevi i $n \geq m$, tada je*

$$m^n = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+i} \binom{m}{k} \binom{k}{i} i^n.$$

Dokaz: Izvršimo particiju skupa svih funkcija $\mathcal{F} = \{f | f : A \to B\}$, gde je $A = \{1, \ldots, n\}$ i $B = \{1, \ldots, m\}$ na podskupove surjektivnih funkcija $\mathcal{F}_k = \{f | f : A \overset{na}{\to} S_k\}$, gde je S_k bilo koji podskup skupa B sa tačno $k \in \{1, 2, \ldots m\}$ elemenata, tj. $f \in \mathcal{F}_k$ akko skup svih slika funkcije f ima tačno k elemenata (bilo kojih). Na primer, skup $S_2 \in \Big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \ldots \{m-1, m\}\Big\}$. Očevidno je da važi $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_m = \mathcal{F}$ i $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \emptyset$ za svako j i za svako i iz skupa $\{1, 2, \ldots, m\}$. Sada po principu zbira sledi $m^n = \sum_{k=1}^{m} |\mathcal{F}_k| = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} s_{n,k} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} i^n$, zbog teoreme 3.26.

Teorema 3.30 *Neka je* $A = \{1, 2, ..., n\}$, $B = \{1, 2, ..., k\}$ *i* $n < k$. *Tada je :*

1.$|\{f | f : A \to B\}| = k^n$

2.$|\{f | f : A \overset{1-1}{\to} B\}| = \frac{k!}{(k-n)!}$

3.$|\{f\nearrow | f : A \to B\}| = \binom{k}{n}$

4.$|\{f\underline{\nearrow} | f : A \to B\}| = \binom{n+k-1}{n}$

5.$|\{f | f : A \overset{na}{\to} B\}| = 0$

6.$|\{f | f : A \xrightarrow[\textit{1-1}]{na} B\}| = 0$

7.$|\{f | f : A \to A\}| = n^n$

8.$|\{f | f : A \overset{1-1}{\to} A\}| = n!$

9.$|\{f\nearrow | f : A \to A\}| = 1$

10.$|\{f\underline{\nearrow} | f : A \to A\}| = \binom{2n-1}{n}$

11.$|\{f | f : A \overset{na}{\to} A\}| = n!$

12.$|\{f | f : A \xrightarrow[na]{1-1} A\}| = n!$

13.$|\{f | f : B \to A\}| = n^k$

14.$|\{f | f : B \overset{1-1}{\to} A\}| = 0$

15.$|\{f\nearrow | f : B \to A\}| = 0$

16.$|\{f\underline{\nearrow} | f : B \to A\}| = \binom{k+n-1}{k}$

17.$|\{f | f : B \overset{na}{\to} A\}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} \binom{n}{i} i^k$

18.$|\{f | f : B \xrightarrow[\textit{1-1}]{na} A\}| = 0$

19.$|\{f | f : B \to B\}| = k^k$

20.$|\{f | f : B \overset{1-1}{\to} B\}| = k!$

21.$|\{f\nearrow | f : B \to B\}| = 1$

22.$|\{f\underline{\nearrow} | f : B \to B\}| = \binom{2k-1}{k}$

23.$|\{f | f : B \overset{na}{\to} B\}| = k!$

24.$|\{f | f : B \xrightarrow[na]{1-1} B\}| = k!$

25.$\left|\left\{f | f : A \to A \wedge \left|\{x | f(x) = i\}\right| = k_i\right\}\right| = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}.$

Rešenje zadatka broj 17 je i $s_{k,n} = \mathbf{S_n^k} \cdot \mathbf{n}! = (-1)^n \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^k$.

Prema tome, broj svih proizvoljnih funkcija jednak je broju varijacija sa ponavljanjem (teorema 3.3), broj injektivnih funkcija jednak broju varijacija bez ponavljanja (teorema 3.7), broj bijektivnih funkcija jednak je broju permutacija bez ponavljanja (teorema 3.5). Broj rastućih funkcija jednak broju kombinacija bez ponavljanja (teorema 3.15), broj neopadajućih funkcija jednak broju kombinacija sa ponavljanjem (teorema 3.21) tj. broju nekih permutacija sa ponavljanjem (teorema 3.10). Broj funkcija sa fiksiranim brojevima pojavljivanja slika jednak je broju permutacija sa ponavljanjem (teorema 3.10). Broj sirjektivnih funkcija jednak je broju particija skupa puta faktorijel (teorema 3.27) i kardinalnom broju preseka komplemenata nekih skupova što je formula uključenja-isključenja (teorema 3.26). Prema tome, prebrojavanjem skupa funkcija određenog tipa izvršeno je istovremeno i prebrojavanje permutacija, varijacija i kombinacija sa i bez ponvljanja, kao i particija skupova, što je jedna od poenti ovog rada.

Glava 4

NEKI NEKLASIČNI KOMBINATORNI OBJEKTI

Katalanove funkcije

Postoje mnogobrojne knjige u kojima su definisani Katalanovi brojevi. U ovom radu će se do Katalanovih brojeva doći isključivo korišćenjem funkcija i preciznim dokazivanjem injektivnosti i surjektivnosti funkcije f koja nas dovodi do Katalanovih brojeva, kao i dokaza šta je skup slika funkcije f.

Na kraju će se navesti neki primeri primena Katalanovih funkcija.

Neka je $a_1a_2...a_{i+j}$ niz koji sadrži i nula i j jedinica, tj. funkcija skupa $\{1, 2, \ldots, i+j\}$ u skup $\{0, 1\}$, gde se slika 0 pojavljuje tačno i puta, a slika 1 tačno j puta.

Od svih tih nizova (funkcija) uočimo samo one koje imaju svojstvo $\mathcal{K}:\ i \leq j$ i za za svaki njihov početni podniz $a_1a_2...a_k$ važi da u njemu nema više nula nego jedinica. To su Katalanovi nizovi ili Katalanove funkcije.

Evo i ekvivalentne definicije preko reči.

Definicija 4.1 *Ako je $\mathbf{x} = x_1x_2\ldots x_{i+j}$ reč dužine $i+j$ nad azbukom $\{0, 1\}$, tada je skup Katalanovih reči $K(i, j)$:*

$$\big\{\mathbf{x}|\ell_0(\mathbf{x}) = i \wedge \ell_1(\mathbf{x}) = j \wedge (\forall k \in \mathbb{N}_{i+j}) \wedge \ell_0(x_1\ldots x_k) \leq \ell_1(x_1\ldots x_k)\big\},$$

ili korišćenjem oznake $\mathcal{K}(\mathbf{x})$, što znači reč $\mathbf{x}$ ima svojstvo Katalana $\mathcal{K}$. Tda je skup $K(i,j)= \big\{\mathbf{x}|\mathbf{x} \in \{0,1\}^{i+j} \ \wedge \ \ell_0(\mathbf{x}) = i \ \wedge \ \ell_1(\mathbf{x}) = j \ \wedge \ \mathcal{K}(\mathbf{x})\big\}$. Oznaka $\ell_0(x_1 \dots x_k)$ je broj pojavljivanja slova 0 u reči $x_1 \dots x_k$.

Označimo sa $K(i,j)$ skup svih Katalanovih nizova (funkcija, reči). Naravno, njihov broj $|K(i,j)|$ zove se Katalanov broj i sada ćemo ga izračunati.

Koristićemo princip bijekcije, tako što ćemo komplementarni skup funkcija $\overline{K}(i,j)$, skupu Katalanovih funkcija $K(i,j)$, bijektivno preslikati na skup permutacija sa ponavljanjem, u kojima ima $i-1$ jedinica i $j+1$ nula, tj. $B(i,j) = \big\{\mathbf{x}|\mathbf{x} \in \{0,1\}^{i+j} \wedge \ell_1(\mathbf{x}) = i-1 \wedge \ell_0(\mathbf{x}) = j+1\big\}$.

Znači, od broja $\binom{i+j}{i}$ svih reči (nizova) skupa
$\Big\{f|f\colon\{1,2,\dots,i+j\}\to\{0,1\}\wedge\Big|\{x|f(x)=0\}\Big|=i\wedge\Big|\{x|f(x)=1\}\Big|=j\Big\}$
oduzmemo broj reči $|\overline{K}(i,j)|$ koji nemaju osobinu $\mathcal{K}$ i dobijamo broj Katalanovih reči (nizova) $|K(i,j)|$ tj. $|K(i,j)| = \binom{i+j}{i} - |\overline{K}(i,j)|$.

Znači $\overline{K}(i,j)$ je skup svih reči $a_1a_2...a_{i+j}$ za koje važi da postoji početna podreč $a_1a_2...a_k$ u kojoj ima više nula nego jedinica!

Broj reči $|\overline{K}(i,j)|$ izračunaćemo tako što ćemo konstruisati (napraviti) jednu bijektivnu funkciju f koja preslikava skup svih tih reči $\overline{K}(i,j)$ u skup $B(i,j)$ svih reči $b_1b_2...b_{i+j}$ u kojima ima $i-1$ jedinica i $j+1$ nula, kojih kao što je poznato ima $\binom{i+j}{i-1}$.

Neka je $a_1a_2...a_{i+j} \in \overline{K}(i,j)$ i neka je k **najmanji prirodni broj** za koji $a_1a_2...a_k$ ima više nula nego jedinica. Jasno je da tada mora biti $a_k = 0$ i da je u početnoj podreči $a_1a_2...a_k$ broj nula za jedan veći od broja jedinica. Na primer, neka je u početnoj podreči $a_1a_2...a_k$ broj nula $\ell+1$, a broj jedinica ℓ. Definišimo funkciju f koja $a_1a_2...a_k...a_{i+j} \in \overline{K}(i,j)$ preslikava u $b_1b_2...b_k...b_{i+j} \in B(i,j)$, tako da je $a_1a_2...a_k = b_1b_2...b_k$, a ako je $n > k$ tada je $b_n = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad a_n = 1 \\ 1 & \text{za} \quad a_n = 0 \end{cases}$.
Dokažimo da funkcija f preslikava skup $\overline{K}(i,j)$ u skup $B(i,j)$ i da je bijektivna, odakle će slediti Katalanova teorema

Teorema 4.2

$$|K(i,j)|=\binom{i+j}{i}-|\overline{K}(i,j)| = \binom{i+j}{i}-\binom{i+j}{i-1} = \frac{j+1-i}{j+1}\binom{i+j}{i}.$$

Pokažimo da je $f : \overline{K}(i,j) \to B(i,j)$, tj. $f(a_1a_2...a_k...a_{i+j}) \in B(i,j)$. Kako u $a_1a_2...a_k$ ima $\ell+1$ nula i ℓ jedinica, to u reči $b_1b_2...b_kb_{k+1}...b_{i+j}$ odnosno u reči $a_1a_2...a_kb_{k+1}...b_{i+j}$, broj nula je $\ell+1+j-\ell = j+1$, a broj jedinica je $\ell + i - (\ell+1) = i-1$ pa je time pokazano da $f(a_1a_2...a_k...a_{i+j}) \in B(i,j)$, tj. $b_1b_2..b_k...b_{i+j} \in B(i,j)$.

Dokažimo sada injektivnost funkcije f. Neka je
$f(a_1a_2...a_ka_{k+1}...a_{i+j}) = a_1a_2...a_kb_{k+1}...b_{i+j}$ i neka je
$f(a'_1a'_2...a'_ma'_{m+1}...a'_{i+j}) = a'_1a'_2...a'_mb'_{m+1}...b'_{i+j}$, pri čemu su k i m najmanji prirodni brojevi za koje važi da u početnim podrečima $a_1a_2...a_k$ i $a'_1a'_2...a'_m$ ima više nula nego jedinica, pa je zato $a_k = a'_m = 0$ i samo za $r > k$ je $b_r \neq a_r$, a samo za $r > m$ je $b'_r \neq a'_r$ tj. $(\forall r > k)\ a_r = 1 \Rightarrow b_r = 0$, a $(\forall r > k)\ a_r = 0 \Rightarrow b_r = 1$ i takođe $(\forall r > m)\ a'_r = 1 \Rightarrow b'_r = 0$, a $(\forall r > m)\ a'_r = 0 \Rightarrow b'_r = 1$ (to je definicija funkcije f). Da bi smo dokazali injektivnost, pretpostavimo da je $f(a_1a_2...a_k...a_{i+j}) = f(a'_1a'_2...a'_m...a'_{i+j})$, tj. $(a_1a_2...a_kb_{k+1}...b_{i+j}) = (a'_1a'_2...a'_mb'_{m+1}...b'_{i+j})$. **Pokažimo da mora biti** $k = m$. Pretpostavimo suprotno da je na primer $k < m$. Tada je $a_1a_2...a_k = a'_1a'_2...a'_k$, a kako u $a_1a_2...a_k$ ima više nula nego jedinica to onda važi i za $a'_1a'_2...a'_k$. Međutim u $a'_1a'_2...a'_k$ ne može biti više nula nego jedinica jer je m najmanji prirodni broj za koji važi da u $a'_1a'_2...a'_m$ ima više nula nego jedinica, što je kontradikcija sa $k < m$. Analogno vodi kontradikciji i slučaj $k > m$ pa je zaista $k = m$. Sada zbog $k = m$ je i $b_{k+1} = b'_{m+1}$, pa zbog definicije funkcije f sledi $a_{k+1} = a'_{m+1}$ itd. $a_1a_2...a_k...a_{i+j} = a'_1a'_2...a'_m...a'_{i+j}$ tj. f je injektivna.

Dokažimo sada surjektivnost funkcije f. Kako u rečima skupa $B(i,j)$ ima $i-1$ jedinica i $j+1$ nula i kako je $i \leq j$, to je $i-1 < j+1$, pa za svaku reč iz $B(i,j)$ postoji početna podreč te reči, najmanje dužine, koji ima više nula nego jedinica. Za svaku tu reč $\mathcal{S} \in B(i,j)$, tj. sliku iz $B(i,j)$ funkcije f, formiramo njen original $\mathcal{O}$ tako što se pomenuta podreč prepiše, a sva slova u reči posle te podreči se menjaju i to nule u jedinice, a jedinice u nule. Dobijeni niz $\mathcal{O}$ očito ima podniz $a_1a_2...a_k$ u kome je više nula nego jedinica (jedna više) i ukupni broj nula u celom nizu je i, dok je broj jedinica j, pa je zaista niz $\mathcal{O}$ iz skupa $\overline{K}(i,j)$ i $f(\mathcal{O}) = \mathcal{S}$. Time je dokazana surjektivnost.

Rezimirajmo ključne korake u dokazu tj. skica dokaza je:

- Neka je $\overline{K}(i,j) \subset \{0,1\}^{i+j}$ skup reči koje ne zadovoljavaju Katalanov uslov $\mathcal{K}$.

- Označimo sa k najmanji prirodni broj, takav da u početnoj podreči $a_1a_2\ldots a_k$ reči $a_1a_2\ldots a_k\ldots a_{i+j}\in\overline{K}(i,j)$ ima više nula nego jedinica (očevidno tačno jedna više i mora biti $a_k=0$).

- Definišemo funkciju f koja reč $a_1a_2\ldots a_k\ldots a_{i+j}\in\overline{K}(i,j)$ preslikava u novu reč tako da se prvih k slova preslikava u same sebe, a svaka preostala nula se preslikava u jedinicu i svaka jedinica u nulu.

- Dokazujemo da je svaka slika funkcije f iz skupa $B(i,j)$ reči nula i jedinica u koje imaju tačno $i-1$ jedinica i $j+1$ nula, gde je $j+1>i-1$.

- Ako su k i m najmanji prirodni brojevi takvi da u početnim podnizovima $a'_1...a'_m$ i $a_1a_2...a_k$ ima više nula nego jedinica i ako je $f(a'_1a'_2...a'_ma'_{m+1}...a'_{i+j})=f(a_1a_2...a_ka_{k+1}...a_{i+j})$, tada se kontradikcijom dokazuje da je $k=m$ što dalje jednostavno implicira injektivnost funkcije $f:\overline{K}(i,j)\to B(i,j)$.

- Dokazuje se surjektivnost funkcije $f:\overline{K}(i,j)\to B(i,j)$.

Zadatak 4.3 *U koloni ispred šaltera za prodaju bioskopskih karata nalazi se $2n$ ljudi od kojih tačno n ima samo novčanicu od 100 dinara, a tačno n samo novčanicu od 50 dinara. Ako blagajnica na šalteru ima potpuno praznu kasu, na koliko različitih načina se mogu rasporediti tih $2n$ ljudi u koloni tako da blagajnica u svakom trenutku ima da vrati kusur, ukoliko karta košta 50 dinara i ako se ljudi međusobno:*

	a) *ne razlikuju*	**b)** *razlikuju*
Rezultat:	**a)** $\lvert K(n,n)\rvert=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$	**b)** $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}n!n!$

Zadatak 4.4 *Na koliko različitih načina se može izračunati proizvod $c_1c_2\ldots c_{n+1}$, gde ima* n *množenja? Drugim rečima na koliko različitih načina se mogu „korektno" postaviti zagrade za izračunavanje proizvoda $c_1c_2\ldots c_{n+1}$?*

Rešenje Označimo sa $H(n)$ skup svih proizvoda $c_1c_2\ldots c_{n+1}$ sa korektno postavljenim zagradama, a broj svih elemenata toga skupa sa $a_n=\lvert H(n)\rvert$. Za $n=0$ ima jedna mogućnost, tj. $a_0=1$. Za $n=1$ ima takođe jedna mogućnost, tj. $a_1=1$. Za $n=2$ ima

2 mogućnosti $\big((c_1c_2)c_3\big)$ i $\big(c_1(c_2c_3)\big)$, tj. $a_2 = 2$. Za $n = 3$ ima ukupno 5 mogućnosti $\big(((c_1c_2)c_3)c_4\big)$, $\big((c_1c_2)(c_3c_4)\big)$, $\big(c_1\big(c_2(c_3c_4)\big)\big)$, $\big(\big(c_1(c_2c_3)\big)c_4\big)$, $\boldsymbol{\big(c_1\big((c_2c_3)c_4\big)\big)}$, tj. $a_3 = 5$. Krajnje zagrade nisu neophodne, ali ih stavljamo zato što ćemo sada lakše konstruisati bijekciju između skupa $H(n)$ svih „korektnih" mogućnosti postavljanja zagrada u proizvodu $c_1c_2\ldots c_{n+1}$ i skupa $K(n,n)$ (vidi definiciju 4.1), jer svako postavljanje jedne otvorene i jedne zatvorene zagrade je jedno množenje. Evo te bijekcije.

Gledajući sa leva na desno redom pridružujemo svakoj otvorenoj zagradi 1, a svakom c_i 0, izuzev faktoru c_{n+1}, tj. $i \in \mathbb{N}_n$. Ovim je položaj zatvorenih zagradi jednoznačno određen, pa nisu bitne. Na primer, gore navedenim mogućnostima za raspored zagradi u proizvodu $c_1c_2c_3c_4$, na taj način redom odgovaraju nizovi 111000, 110010, 101010, 110100, **101100**, a to su očevidno svi Katalanovi nizovi iz skupa $K(3,3)$. Da u početnim podnizovima ovih nizova neće biti više nula nego jedinica sledi iz činjenice da bi u suprotnom to bila kontradikcija sa korektno postavljenim zagradama u proizvodu $c_1c_2c_3c_4$.

Ovim je konstruisana bijektivna funkcija između skupova $H(n)$ i $K(n,n)$, pa je $a_n = |H(n)| = |K(n,n)| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Zadatak 4.5 *Konstruisati rekurentnu relaciju za*

$$a_n = |H(n)| = |K(n,n)| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Rešenje: Kako u računanju proizvoda $c_1c_2\ldots c_{n+1}$ ima ukupno n množenja, to ćemo izvršiti particiju skupa $H(n)$ na sve podskupove kada je poslednje množenje ona operacija $\cdot$ koja se nalazi između činilaca c_i i c_{i+1}, gde je $i \in \mathbb{N}_n$, odnosno $\big((c_1c_2\ldots c_i)(c_{i+1}\ldots c_nc_{n+1})\big)$. Ako je $a_n = |H(n)|$, tada je broj načina za računanje proizvoda $\big((c_1c_2\ldots c_i)(c_{i+1}\ldots c_nc_{n+1})\big)$ jednak $a_{i-1}a_{n-i}$. Zbog pomenute particije i principa zbira sledi da je ukupan broj načina postavljanja zagrada u računanju proizvoda $c_1c_2\ldots c_{n+1}$ jednak $a_n = a_0a_{n-1}+a_1a_{n-2}+\ldots+a_{n-1}a_0$.

Prema tome je kardinalni broj skupa Katalanovih nizova $K(n,n)$ određen rekurentnom relacijom:

$$a_0 = 1 \;\text{ i }\; a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0,\; n \in \mathbb{N},$$

odnosno zbog teoreme 4.2, za svako $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \Leftrightarrow a_0 = 1 \ \wedge \ a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \ldots + a_{n-1} a_0.$$

Zadatak 4.6 *Neka su $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ šest različitih tačaka na kružnici k. Na koliko različitih načina se mogu konstruisati 3 tetive kružnice k, čije su krajnje tačke neke od tih šest tačaka, a za svake dve od te 3 tetive važi da nemaju zajedničkih tačaka?*

Rešenje: Neka su tačke $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ poređane redom ciklički na kružnici k. Tada su rešenja zadatka pet mogućnosti:
(A_1A_2, A_3A_6, A_4A_5), (A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6), (A_1A_4, A_2A_3, A_5A_6),
(A_1A_6, A_2A_3, A_5A_4), (A_1A_6, A_2A_5, A_3A_4).

Zadatak 4.7 *Neka $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ predstavljaju $2n$ različitih tačaka na kružnici k. Na koliko različitih načina se može konstruisati n tetiva kružnice k, čije su krajnje tačke neke od tih $2n$ tačaka, a za svake dve od tih n tetiva važi da nemaju zajedničkih tačaka?*

Rešenje: Neka su tačke $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ poređane redom ciklički na kružnici k i neka je a_n traženi broj tetiva. Konstruisaćemo rekurentnu relaciju za a_n. Tačka A_1 očevidno može biti spojena samo sa tačkama A_{2i}, jer u protivnom bi sa jedne strane tetive A_1A_{2i-1} imali neparan broj tačaka, pa bi bar jedna tetiva koja polazi iz tih tačaka morala seći tetivu A_1A_{2i-1}, što je zabranjeno uslovom zadatka.

Kako se sa jedne strane tetive A_1A_{2i} nalazi $2i-2$ tačaka kružnice k, to te tačke mogu formirati tačno a_{i-1} traženih tetiva, a kako sa druge strane tetive A_1A_{2i} ima $2n-2i$ to one formiraju tačno a_{n-i} traženih tetiva. Sada po principu množenja sledi da ako smo fiksirali tetivu A_1A_{2i}, tada je ukupan broj traženih tetiva $a_{i-1}a_{n-i}$. Međutim kako i uzima sve vrednosti iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, to po principu zbira sada sledi da je

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}a_{n-i} = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0.$$

Takođe je očevidno $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5$, čime je a_n potpuno određen, a kao što je poznato, to je rekurentna relacija za Katalanove brojeve (vidi 4.4 i 4.5), pa je $a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Stek sortabilne permutacije

Neka se u kutiji A nalazi n kuglica numerisanih brojevima od 1 do n i neka su B i C prazne kutije. Posmatrajmo sada algoritme koji primenjuju samo dve radnje, dva koraka, (označimo ih sa 1 i 0) u nekom proizvoljnom redosledu i koji mogu prebaciti sve kuglice iz kutije A u kutiju C:

1: Kuglica sa najmanjim brojem se prebacuje iz kutije A u kutiju B

0: Kuglica sa najvećim brojem se prebacuje iz kutije B u kutiju C

Jasno je da svaki od tih algoritama, koji će se završiti u tačno $2n$ koraka, određuje neki niz od n nula i n jedinica.

Takođe je očevidno da svaki niz od n jedinica i n nula ne određuje neki algoritam od $2n$ koraka, jer se može desiti da je na redu korak 0, a kutija B prazna, što nije moguće!

Interesuju nas samo algoritmi koji će moći prebaciti sve kuglice iz kutije A u kutiju C, tj. oni od $2n$ koraka i zvaćemo ih stek sortabilnim.

Svaki od ovih algoritama početnu permutacija $123\ldots n$ skupa $\mathbb{N}_n$, preslikava u permutaciju takođe skupa $\mathbb{N}_n$, gde je prvi elemenat broj kuglice koja je prva ušla u kutiju C, ... , k - ti elemenat broj kuglice koja je k -ta ušla u kutiju C za svako $k \in \mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ovako dobijena permutacija zove se stek sortabilna permutacija.

Na primer ako je $n = 4$, tada niz (algoritam) 11110000 po gore definisanom, permutaciju 1234 preslikava u permutaciju 4321, tj. permutacija 4321 jeste stek sortabilna, dok nizu 11011000 odgovara permutacija 2431.

Ovo se može interpretirati sa kompozicijom vagona 1234 koji se nalaze u kutiji A i koji mogu da se kreću po šinama samo u smerovima strelica na sledećoj slici 4.1. Da bi se ostvarila prethodna stek sortabilna permutacija treba prvo da vagoni 1 i 2 uđu u stek (kutiju B), a zatim vagon 2 da pređe u C. Nakon toga 3 i 4 ulaze u B. Na kraju 4,3 i 1 izlaze iz B i naravno ulaze u C.

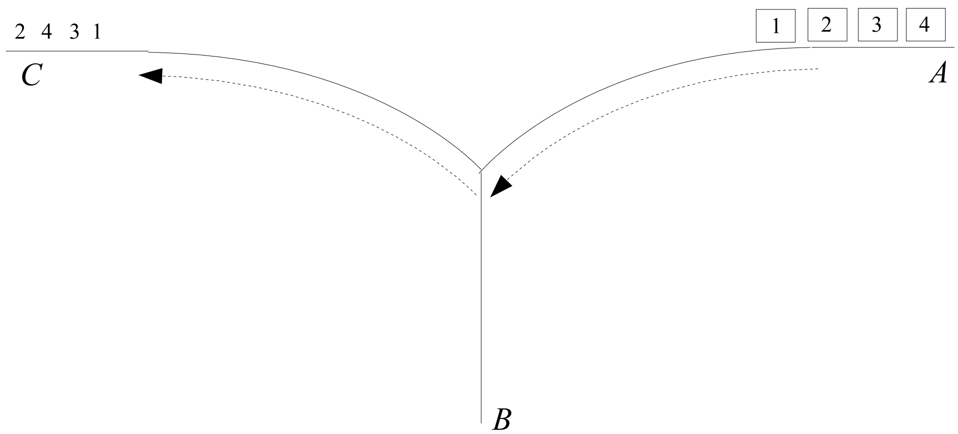

Figure 4.1: Stek sortabilna permutacija.

Očevidno je da svakom nizu koji sadrži tačno 4 jedinice i 4 nule, može, a i ne mora da odgovara neka stek sortabilna permutacija. Nizovima koji počinju sa 0 očito ne odgovara nijedna stek sortabilna permutacija jer je nemoguć prvi korak algoritma da se iz kutije B prebaci kuglica u kutiju C, zbog toga što je kutija B prazna!

Kojim nizovima koji imaju tačno n nula i n jedinica odgovara stek sortabilna permutacija?

Iz definisanog algoritma očevidno je da kada je kutija B prazna, tada korak algoritma

0: Kuglica sa najvećim brojem se prebacuje iz kutije B u kutiju C

nije moguć!

Prema tome, nizu koji imaja tačno n nula i n jedinica, odgovara stek sortabilna permutacija ako i samo ako za svaki početni podniz važi da u njemu nema više nula nego jedinica, jer u protivnom će se desiti da je kutija B prazna, a da treba primeniti korak 0 što je nemoguće.

Da li je permutacija 312 stek sortabilna?

Sada očevidno na osnovu Katalanove teoreme 4.2 sledi teorema:

Teorema 4.8 *Broj stek sortabilnih permutacija skupa* $\{1, 2, \dots, n\}$ *je*

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Generativne funkcije

Evo opet tesne veze između funkcija i kombinatorike.

Definicija 4.9 *Funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je generativna za niz* a_n *ako je razvoj u Maklorenov red funkcije* f*:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Postavlja se pitanje kako doći do generativne funkcije $f(x)$ za Katalanove brojeve i kako zatim doći do eksplicitne formule Katalanovih brojeva $a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, ako je niz a_n zadat rekurzivno sa $a_0 = 1$ i $a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \ldots + a_{n-1} a_0$. Evo postupka prezentovanog preko ovog primera Katalanovih nizova.

Neka je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ generativna funkcija Katalanovih brojeva $a_n = |K(n,n)|$, tj. broja Katalanovih nizova. Sada sledi da je $f^2(x) = f(x) \cdot f(x) =$
$= a_0 a_0 + (a_0 a_1 + a_1 a_0)x + \ldots + (a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \ldots + a_{n-1} a_0)x^{n-1} + \ldots =$
$= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots a_n x^{n-1} + \ldots = \frac{1}{x}(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots) =$
$= \frac{1}{x}(-1 + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots) = \frac{1}{x}(-1 + f(x))$ odakle sledi funkcionalna jednačina $f^2(x) = \frac{1}{x}(-1 + f(x))$, tj.

$$x f^2(x) - f(x) + 1 = 0,$$

čije je rešenje $f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$. Kako je $f(x)$ jedinstveno određena funkcija, to u poslednjoj jednakosti treba ispitati da li je znak $+$ ili $-$. Kako je $f(0) = 1$ jer je $a_0 = 1$ i kako je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1$ i $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$, to sledi da je $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ generativna funkcija za Katalanove brojeve a_n određene sa rekurzivnom relacijom $a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \ldots + a_{n-1} a_0$ i $a_0 = 1$. Razvijanjem funkcije

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

u Maklorenov red korišćenjem razvoja binoma $(1+t)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} t^i$, gde je $\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-i+1)}{i!}$, dobijamo da je funkcija $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}\binom{2i}{i} x^i$, pa je $a_i = \frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}$.

Reči sa zabranjenim podrečima

Reči sa zabranjenim podrečima su u stvari funkcije koje zadovoljavaju neku osobinu, samo što je ta osobina sada „zabranjena podreč".

Nesaglediv je broj kombinatarnornih objekata koji se mogu definisati ili interpretirati kao reči sa zabranjenim podrečima. Možemo reći da skoro svaki kombinatorni objekat možemo okarakterisati i generisati nekim skupom reči sa nekim zabranjenim podrečima.

Prikažimo to na sledećem primeru.

Primer 4.10 *Neka je A podskup skupa $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ za koji važi osobina u oznaci $\Re$:*

„Za svaka dva susedna neparna broja koji pripadaju skupu A, broj između njih ne pripada skupu A i za svaka dva susedna parna broja koji pripadaju skupu A, broj između njih ne pripada skupu A "

Odrediti broj svih podskupova A skupa $\mathbb{N}_n$ koji zadovoljavaju gornju osobinu $\Re$.

Rešenje Svaki podskup A skupa $\mathbb{N}$ može se okarakterisati sa funkcijom $f = \binom{1\ 2\ \ldots\ n}{x_1 x_2 \ldots x_n}$, gde su $x_i \in \{0, 1\}$ za svako $i \in \mathbb{N}$. va funkcija se zove karakteristična funkcija skupa (podskupa) A.

Kako će izgledati funkcija f ako skup (podskup) A od kojeg je nastala zadovoljava osobinu $\Re$?

Lako se uočava, da ako funkcija f zadovoljava uslov $\Re$, tada reč $x_1 x_2 \ldots x_n$, koja se sastoji samo od nula i jedinica mora zadovoljavati uslov da je u njoj zabranjena podreč 101.

Prema tome, zadatak se svodi na problem određivanja broj svih reči dužine n, nad azbukom $\{0, 1\}$ u kojim je zabranjena podreč 101, tj. odrediti broj elemenata skupa reči (funkcija):

$$H(n)=\{\boldsymbol{x_n} | \boldsymbol{x_n}=x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^n \wedge (\forall k \in \mathbb{N}_{n-2})(x_k x_{k+1} x_{k+2} \neq 101)\}.$$

Teorema 4.11

$$|H(n)| = 1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \binom{n-2i+j+2}{i-j}, \qquad \textit{gde je}$$

$$H(n)=\{\boldsymbol{x_n} | \boldsymbol{x_n}=x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^n \wedge (\forall k \in \mathbb{N}_{n-2})(x_k x_{k+1} x_{k+2} \neq 101)\}.$$

Dokaz.

Konstruisaćemo reči iz skupa $H(n)$, gde je $H(n)$ skup svih reči dužine n nad azbukom $\{0,1\}$ sa zabranjenom podreči 101. Uočimo particiju skupa $H(n)$ na podskupove $H^i(n)$, gde je $H^i(n)$ skup svih reči dužine n nad azbukom $\{0,1\}$ koje sadrže tačno i elemenata 1, i ne sadrže zabranjenu podreč 101. Particija je dobro izvršena jer važi:

$$H(n) = \bigcup_{i=0}^{n} H^i(n), \quad (\forall i,j \in \mathbb{N}_n)\ i \neq j \ \Rightarrow\ H^i(n) \bigcap H^j(n) = \emptyset \qquad (1)$$

Konstruišimo reči iz skupa $H^i(n)$. Napisaćemo i elemenata 1, a onda između svaka dva slova 1 upišimo tačno jedno slovo iz skupa $\{\alpha, \lambda\}$. Slovo λ neka nam označava prazno slovo, a slovo α je podreč 00. Na ovaj način je obezbeđeno da između svaka dva elementa 1 ne stoji tačno jedan element 0. Ovo se može uraditi na

$$\sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \qquad (2)$$

različitih načina, gde je j broj pojavljivanja slova λ u rečima koje konstruišemo. Kako je podreč α dužine dva, to ostaje da rasporedimo još $n-i-2(i-1-j) = n-3i+2j+2$ slova 0. Tih $n-3i+2j+2$ slova 0 treba rasporediti na $i-1-j$ mesta gde se već nalaze podreči 00 i na mestima iza i ispred reči, što znači na ukupno $i-1-j+2 = i-j+1$ mesta. To raspoređivanje se može izvršiti na

$$\binom{n-2i+j+2}{i-j} \qquad (3)$$

različitih načina. Iz (1), (2) i (3) sledi tvrđenje teoreme. □

Teorema 4.12

$$|H(n)| = \left[\frac{2\alpha^2+1}{2\alpha^2-2\alpha+3}\alpha^n\right]$$

gde je α realan koren jednačine trećeg stepena $x^3-2x^2+x-1=0$, iz intervala $(1,2)$.

Dokaz.

Posmatraćemo azbuku $\mathcal{A} = \{0,1\}$ i zabranjenu podreč 101. Reči $\boldsymbol{x_n} \in H(n)$ se dobijaju od reči $\boldsymbol{x_{n-1}} \in H(n-1)$ dodavanjem jednog od elemenata 1 ili 0 ispred njih. Neka $\boldsymbol{x_{n-1}} \in H(n-1)$, $\boldsymbol{x_{n-2}} \in H(n-2)$ i $\boldsymbol{x_{n-3}} \in H(n-3)$. Dalje sledi $0\boldsymbol{x_{n-1}} \in H(n)$ i $1\boldsymbol{x_{n-1}} \in H(n)$ ako i samo ako reč $\boldsymbol{x_{n-1}}$ ne počinje sa 01. Kako $100\boldsymbol{x_{n-3}} \in H(n)$ i $101\boldsymbol{x_{n-3}} \notin H(n)$, to znači da $10\boldsymbol{x_{n-2}} \in H(n)$ ako i samo ako reč $\boldsymbol{x_{n-1}}$ počinje sa slovom 0. Ovo implicira rekurentnu relaciju

$$|H(n)| = 2|H(n-1)| - |H(n-2)| + |H(n-3)|,$$

čija je karakteristična jednačina $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$. Ova jednačina ima jedan realan koren α koji je u intervalu $(1,2)$ i dva kompleksna korena β i γ čiji su moduli manji od 1, tj. $|\beta| = |\gamma| = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} < 1$. Na kraju, kako je $\lim_{n\to\infty} \beta^n = 0$ i $\lim_{n\to\infty} \gamma^n = 0$ imamo

$$|H(n)| = \left[\frac{2\alpha^2+1}{2\alpha^2-2\alpha+3}\alpha^n\right] \quad \square$$

Glava 5

ZAKLJUČAK

Kao što je rečeno u uvodu, jedan od najznačajnijih pojmova u svim oblastima matematike jeste pojam funkcije. U ovom radu je to efektivno pokazano i za kombinatoriku. Čak i više od toga, pokazuje se da svaki kombinatorni objekat, bilo klasične bilo neklasične kombinatorike, jeste neka funkcija sa nekim osobinama. Prema tome, operisanje sa kombinatornim objektima je u stvari operisanje sa nekim funkcijama.

U klasičnoj kombinatorici smo pokazali da svaki od kombinatornih objekata jeste neka funkcija sa nekom osobinom ili joj se jednoznačno može pridružiti neka funkcija sa nekom osobinom. Na primer, varijacije sa i bez ponavljanja su prizvoljne funkcije odnosno injektivne funkcije, dok kombinacije bez ponavljanja su podskupovi nekoga skupa, ali se uvek mogu bijektivno preslikati na skup svih rastućih funkcija nekoga skupa.

U radu je pokazano da je broj svih proizvoljnih funkcija jednak broju varijacija sa ponavljanjem (teorema 3.3), broj injektivnih funkcija jednak broju varijacija bez ponavljanja (teorema 3.7), broj bijektivnih funkcija jednak broju permutacija bez ponavljanja (teorema 3.5). Broj rastućih funkcija jednak broju kombinacija bez ponavljanja (teorema 3.15), broj neopadajućih funkcija jednak broju kombinacija sa ponavljanjem tj. broju nekih permutacija sa ponavljanjem (teorema 3.10). Broj funkcija sa fiksiranim brojevima pojavljivanja slika jednak je broju permutacija sa ponavljanjem (teorema 3.10), broj sirjektivnih funkcija jednak je broju particij puta faktorijel ili formuli uključnja-isključenja. (teoreme 3.26 i 3.27) Prema tome prebrojavanjem skupa funkcija određenog tipa izvršeno je istovremeno i prebrojavanje permutacija, varijacija i kombinacija sa i bez ponvljanja, što je jedna od poenti ovog rada.

U poglavlju neklasični kombinatorni objekti pokazano je da mnogi kombinatorni objekti, vrlo značajni u primenama, se bijektivno preslikavaju na skup Katalanovih funkcija.

Poslednji primer u poglavlju neklasični kombinatorni objekti, ukazuje opet kako se proizvoljni kombinatorni objekati mogu interpretirati rečima sa zabranjenim podrečima tj. funkcijama koje zadovoljavaju neke određene uslove.

Redni broj, **RBR**:	
Identifikacioni broj, **IBR**:	
Tip dokumentacije, **TD**:	monografski rad
Tip zapisa, **TZ**:	štampa
Vrsta rada, **VR**:	master rad
Autor, **AU**:	Doroslovački Ksenija
Mentor, **MN**:	prof. dr Stojaković Mila
Naslov rada, **NR**:	Kombinatorika intepretirana funkcijma i njihovim osobinama
Jezik publikacije, **JP**:	srpski
Jezik izvoda, **JI**:	srpski
Zemlja publikovanja, **ZP**:	Srbija
Uže geografsko područje, **UGP**:	Vojvodina
Godina, **GO**:	2008
Izdavač, **IZ**:	autorski preprint
Mesto i adresa, **MA**:	21000 Novi Sad
Fizički opis rada, **FO**: (poglavlja/strana/citata/tabela/slika/grafika/priloga)	
Naučna oblast, **NO**:	Matematika
Naučna disciplina, **ND**:	Primenjena matematika
Predmetna odrednica/Ključne reči, **PO**:	Kombinatorika, funkcije
UDK	
Čuva se, **ČU**:	u u biblioteci Fakulteta Tehničkih Nauka
Važna napomena, **VN**:	
Izvod, **IZ**:	
Datum prihvatanja teme, **DP**:	
Datum odbrane, **DO**:	

Članovi komisije, **DB**:	Predsednik:	Neda Pekarić	
	Član:	Ilija Kovačević	Potpis mentora
	Član, mentor:	Mila Stojaković	

Obrazac Q2.HA.04-05 - Izdanje 1

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	Monographic
Type of record, **TR**:	Printed
Contents code, **CC**:	Master thesis
Author, **AU**:	Doroslovački Ksenija
Mentor, **MN**:	Mila Stojaković, PhD
Title, **TI**:	Combinatorics present with function and their conditions
Language of text, **LT**:	serbian
Language of abstract, **LA**:	serbian
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Vojvodina
Publication year, **PY**:	2008
Publisher, **PB**:	authors reprint
Publication place, **PP**:	21000 Novi Sad
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	
Scientific field, **SF**:	Mathematics
Scientific discipline, **SD**:	Applied mathematic
Subject/Key words, **S/KW**:	Combinatorics, function
UC	
Holding data, **HD**:	the library of the Faculty of Technical Sciences
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	
Defended on, **DE**:	

Defended Board, **DB**:	President:	Neda Pekarić	
	Member:	Ilija Kovačević	Mentor's sign
	Member, Mentor:	Mila Stojaković	

Obrazac Q2.HA.04-05 - Izdanje 1