RAZNI PRAVCI GENERALIZACIJE DIJAGONALNE DOMINACIJE

-MASTER RAD-

Univerzitet u Novom Sadu

septembar 2012.

Sadržaj

1 OZNAKE, DEFINICIJE I TEOREME **4**
1.1 Lokalizacija karakterističnih korena i regularnost 6
1.2 Nerazloživost 9

2 SDD MATRICE **11**

3 GDD MATRICE **12**
3.1 Ostrovski matrice 13
3.2 Uopštenja kombinacijom vrsta i kolona 14
3.3 Uopštenja izdvajanjem podskupa indeksa 15
3.4 Dašnjic-Zusmanovič matrice 16
3.5 S-SDD matrice 18
3.6 Dalja generalizacija nekih potklasa H-matrica 21
3.7 Brualdijeve matrice 22
3.8 Nekrasov matrice 23
3.9 S-Nekrasov matrice 25

4 MEĐUSOBNI ODNOSI POTKLASA **28**
4.1 Ilustrativni primeri 29
4.1.1 Primer za matricu A_1 30
4.1.2 Primer za matricu A_2 30
4.1.3 Primer za matricu A_3 31
4.1.4 Primer za matricu A_4 31
4.1.5 Primer za matricu A_5 32
4.1.6 Primer za matricu A_6 32
4.1.7 Primer za matricu A_7 33
4.1.8 Primer za matricu A_8 34
4.1.9 Primer za matricu A_9 35
4.1.10 Primer za matricu A_{10} 35
4.1.11 Primer za matricu A_{11} 36
4.1.12 Primer za matricu A_{12} 36

5 ZAKLJUČAK **37**

UVOD

Poznato je da teorija matrica ima široku primenu, kako u raznim oblastima matematike, tako i u drugim naučnim disciplinama. Teorija matrica je oblast matematike koja je veoma zastupljena i interesantna za savremenu nauku, pre svega zbog širokog spektra njene primene u inženjerstvu, biologiji, hemiji, fizici, ekonomiji, medicini i drugim naučnim disciplinama. Atraktivnost ove oblasti pojačana je, u poslednje vreme, zbog brzog razvoja računara i njihovih performansi, koje omogućavaju rešavanje problema linearne algebre velikih dimenzija, koji su pre pojave savremenih računara bili smatrani praktično nemogućim za rešavanje.

Rešavanje sistema linearnih jednačina i problema karakterističnih korena predstavlja suštinu većine proračuna u nauci, inženjerstvu, ekonomiji i srodnim naučnim disciplinama. Mnogi softverski paketi za rešavanje problema linearne algebre su razvijeni u poslednjih nekoliko decenija. Pa ipak, oni uglavnom nisu adekvatni za pokrivanje (rešavanje) svih mogućih specijalnih situacija. Za optimizaciju performansi za rešavanje datog problema linearne algebre sa specijalnom strukturom je i dalje potrebno modifikovati i prilagoditi postojeće algoritme.

Moguća primena dijagonalne dominacije ogleda se u nekoliko algoritama za rešavanje problema kao što su segmentacija slike, gradijent u slikanju i totalna varijacija (koji se baziraju na rešavanju simetričnih dijagonalno dominantnih linearnih sistema). Tekuća istraživanja na temu ekvilibrijuma sistema, nastalim usled rešavanja problema finansijskih proračuna, takođe koriste uslove dijagonalne dominacije. Takođe, mnogi problemi kvantne hemije rešavaju se primenom svojstava dijagonalne dominacije. Među njima pomenimo račun konfiguracije interakcija, račun elektronske strukture čvrstih tela, širenje elektromagnetnih talasa, itd.

Zbog značaja primene dijagonalne dominacije nastala je potreba za njenim generalizacijama u pravcu izučavanja teorije H-matrica. Potreba za izučavanjem H-matrica nastala je, s jedne strane, zbog potrebe generalizovanja veoma dobro poznate klase M-matrica na klasu koja neće zahtevati znakovnu strukturu elemenata matrice tako strogo kao što je to slučaj sa M-matricama, a sa druge strane, iz problema u ekonomiji. Na ovom mestu pomenućemo neke od značajnih i interesantnih primena, kao npr. problem linearne komplementarnosti u teoriji optimizacije, primena u industriji automobila (u modeliranju dinamike fluida), matematičkoj fizici, kontrolnoj teoriji, teoriji stabilnosti dinamičkih sistema, itd.

U teoriji stabilnosti dinamičkih sistema predmet proučavanja je svojstvo stabilnosti (tj. važno je znati da li svaki karakteristični koren odgovarajuće matrice ima negativan realan deo). Ovo svojstvo je značajno u ispitivanju ravnoteže sistema diferencijalnih jednačina, kojima su opisani dinamički sistemi, čije se stanje menja prema nekom pravilu, tokom vremena, i postavlja se pitanje o dugoročnom ponašanju takvih sistema. Na taj način je matrična stabilnost inicijalno orudje u proučavanju ovakvih pojava.

Što se problema linearne komplementarnosti tiče, suština je u tome da tražimo nenegativan realan n-dimenzionalni vektor $z \in \mathbb{R}^n$, takav da važi

$$Mz + q \geq 0$$

i

$$z^T(Mz + q) = 0,$$

za date $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ i $q \in \mathbb{R}^n$. Jedan od uslova koji omogućava rešavanje ovog problema iterativnim postupcima, posebno SOR-iterativnim postupkom [31], jeste da je posmatrana matrica M H-matrica, sa strogo pozitivnim dijagonalnim elementima, tj.

$$m_{i,i} > 0, \quad \text{i=1,2,...,n}.$$

Provera da li je data matrica A H-matrica (regularna) je veoma važno i dalje otvoreno pitanje. Karakteristika H-matrica se ogleda u činjenici da je data matrica A H-matrica ako i samo ako se može skalirati (pomnožiti s desne strane) regularnom dijagonalnom matricom tako da rezultujuća matrica bude strogo dijagonalno dominantna. Problem nastaje u tome što nije lako naći pomenutu regularnu dijagonalnu matricu. Ona je poznata samo za neke potklase H-matrica, o čemu će biti reči kasnije.

1 OZNAKE, DEFINICIJE I TEOREME

U ovom odeljku ćemo navesti standardne oznake, definicije i teoreme koje ćemo koristiti u daljem izlaganju.

Za proizvoljan prirodan broj n, sa $\mathbb{C}^n$ ćemo označavati n-dimenzionalan kompleksan vektorski prostor vektora kolona $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$, gde su x_i kompleksni brojevi, za sve indekse $i = 1, 2, ..., n$.

Za svaka dva proizvoljna prirodna broja $m, n \in \mathbb{N}$, sa $\mathbb{C}^{m,n}$ ćemo označavati familiju svih $m \times n$ matrica čiji su elementi kompleksni brojevi. Matricu $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ ćemo kraće označavati sa $A = [a_{i,j}]$, ili sa

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

gde je $a_{i,j} \in \mathbb{C}$, za $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ **element i-te vrste i j-te kolone** matrice A.

Analogno prethodnom, sa $\mathbb{R}^n$, odnosno $\mathbb{R}^{m,n}$ ćemo označavati, respektivno, **n-dimenzionalan realan vektorski prostor vektora kolona** i **familiju svih $m \times n$ realnih matrica**.

Sa $N := \{1, 2, ..., n\}$ ćemo označavati **skup indeksa**, a sa

$$r_i(A) := \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{i,j}|$$

ćemo označavati **sumu vandijagonalnih elemenata i-te vrste** (koju ćemo nadalje, ako ne postoji opasnost od konfuzije, kraće označavati sa r_i). Za matricu A dimenzije 1, definišemo $r_1(A) := 0$.

Za neprazan podskup $S \subset N$, sa $\bar{S}$ ćemo označavati komplement skupa S u odnosu na skup indeksa N, tačnije $\bar{S} := N \setminus S$.

Sa

$$r_i^S(A) := \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{i,j}|$$

ćemo označavati **deo sume vandijagonalnih elemenata i-te vrste koji odgovara podskupu S**. Očigledno je za proizvoljan podskup S i svaki indeks $i \in N$, $r_i(A) = r_i^S(A) + r_i^{\bar{S}}(A)$.

Sa I ćemo označavati **jediničnu matricu**, tj. matricu čiji su svi dijagonalni elementi jednaki jedan, a vandijagonalni elementi su joj jednaki nuli. Ukoliko je neophodno naglasiti red te matrice, označavaćemo je sa I_n.

U ovom odeljku ćemo navesti i neke definicije, leme i teoreme koje ćemo kasnije koristiti i koje predstavljaju teorijsku podlogu za dalje izlaganje.

Definicija 1.1. *Kompleksan broj λ je* ***karakteristični koren*** *kvadratne matrice A ako postoji vektor $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, takav da je $Ax = \lambda x$.*

Definicija 1.2. ***Spektar matrice*** *A, u oznaci $\sigma(A)$, je skup svih njenih karakterističnih korena.*

Definicija 1.3. ***Spektralni radijus*** *matrice $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ jednak je maksimalnom modulu njenih karakterističnih korena, tj.*

$$\rho(A) := max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Razne primene uslovile su razvoj i aktuelnost teorije H-matrica i stalno zanimanje za njihovo proučavanje. Samo proučavanje H-matrica usko je povezano, kako ćemo videti u daljem izlaganju, sa teorijom M-matrica, koje su veoma mnogo izučavane zbog svoje praktične primene u nauci i inženjerstvu, kao i sa teorijom uopšteno dijagonalno dominantnih matrica (tzv. GDD-matrica, od engleskog *generalized diagonally dominant matrices*). Preciznije rečeno, klasa H-matrica i klasa GDD matrica su jedna te ista klasa. H-matrice su blisko povezane sa M-matricama, što se može videti iz narednih definicija i tvrđenja.

Definicija 1.4. *Za matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ reći ćemo da je* ***L-oblika*** *ako je $a_{i,j} \leq 0$, za sve parove indeksa $i, j \in N$, takve da je $i \neq j$.*

Definicija 1.5. *Matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ koja je L-oblika, nazivaćemo* ***M-matrica*** *ako je regularna i ako je njena inverzna nenegativna, tj. $A^{-1} \geq 0$.*

Lema 1.1. *Ako je matrica M-matrica, onda su joj svi dijagonalni elementi pozitivni.*

Napomenimo samo da ćemo u ovom radu pod M-matricom podrazumevati *regularnu* M-matricu, dok se u literaturi može naći pojam i definicija singularnih M-matrica.

Svakoj matrici $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ možemo pridružiti matricu $< A >$, koju ćemo zvati **pridružena matrica matrice** A, i koju ćemo definisati na sledeći način:

$$< A >= \begin{cases} |a_{i,i}|, & i = j \\ -|a_{i,j}|, & i \neq j \end{cases}$$

Definicija 1.6. *Matricu* $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ *nazivaćemo* ***H-matrica*** *ako je njena pridružena* $< A >$ M*-matrica.*

Očigledno je, prema gornjoj definiciji, svaka H-matrica regularna.

Teorema 1.1. *Matrica* $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ *je* H*-matrica ako i samo ako postoji regularna dijagonalna matrica* X*, sa pozitivnim dijagonalnim elementima, takva da važi:*

$$|(AX)_{i,i}| > r_i(AX)$$

za svaki indeks $i \in N$*, gde je* $(AX)_{i,j}$ *element* i*-te vrste i* j*-te kolone matrice* AX*.*

1.1 Lokalizacija karakterističnih korena i regularnost

O pravcima generalizacije dijagonalne dominacije govorićemo, izmedju ostalog, i zbog njihove tesne veze sa moguńostima lokalizacija karakterističnih korena. Kada govorimo o lokalizaciji karakterističnih korena, neizbežno govorimo o Geršgorinovoj teoremi.

Lepota Geršgorinove teoreme leži u njenoj jednostavnosti. Naime, za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, lako se izračunavaju vrednosti $\{r_i(A)\}_{i \in N}$, koje predstavljaju prečnike (radijuse) n diskova čija unija sadrži n karakterističnih korena matrice A.

i**-ti Geršgorinov disk (krug)** je skup

$$\Gamma_i(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq r_i(A)\}, \tag{1}$$

koji predstavlja zatvoren i ograničen disk u kompleksnoj ravni, sa centrom u $a_{i,i}$ i poluprečnikom $r_i(A)$, a **Geršgorinov skup** je unija svih Geršgorinovih diskova:

$$\Gamma(A) := \bigcup_{i \in N} \Gamma_i(A).$$

Ova unija diskova se može smatrati Geršgorinovim skupom i svake matrice $B \in \mathbb{C}^{n,n}$, za koju je $b_{i,i} = a_{i,i}$ i $r_i(B) = r_i(A)$, za sve indekse $i \in N$, dakle, $\sigma(B) \subseteq \Gamma(A)$ za sve ovakve matrice B.

U Varginoj knjizi (vidi [33]) dati su različiti aspekti primene čuvene Geršgorinove teoreme o lokalizaciji karakterističnih korena date matrice, koja je inspirisala dalja istraživanja u toj oblasti. Vargina knjiga daje pregled rezultata nastalih na osnovu Geršgorinovog rezultata, kao i vezu teoreme o lokalizaciji karakterističnih korena, s jedne, i teoreme o regularnosti date matrice, s druge strane, koja predstavlja početnu tačku za dalje lepe rezultate. Odgovarajuće teoreme Geršgorinovog tipa (o kojima će biti reči) ekvivalentne su tvrdnji da je svaka matrica odgovarajuće potklase H-matrica regularna. Konačno, tvrdnja da svi karakteristični koreni date matrice pripadaju minimalnom Geršgorinovom skupu je ekvivalentna tvrdnji da je svaka H-matrica regularna.

Teorema 1.2. *(Geršgorin) Za svaku kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ i svaki karakteristični koren $\lambda \in \sigma(A)$ postoji indeks $k \in N$ takav da je:*

$$|\lambda - a_{k,k}| \leq r_k(A). \tag{2}$$

Stoga, $\lambda \in \Gamma_k(A)$, odakle sledi da je $\lambda \in \Gamma(A)$. Kako ovo važi za svaki karakteristični koren λ, tada je:

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma(A).$$

Dokaz: Za svaki karakteristični koren $\lambda \in \sigma(A)$, neka je $0 \neq x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T \in \mathbb{C}^n$ pridruženi karakteristični vektor, tj. važi $Ax = \lambda x$, pa je $\sum_{j \in N} a_{i,j} x_j = \lambda x_i$, za svaki indeks $i \in N$. Kako je $x \neq 0$, postoji indeks $k \in N$ za koji je $0 < |x_k| = max\{|x_i| : i \in N\}$. Tada je $\sum_{i \in N} a_{k,i} x_i = \lambda x_k$, ili, ekvivalentno tome,

$$(\lambda - a_{k,k}) x_k = \sum_{i \in N \setminus \{k\}} a_{k,i} x_i.$$

Uzimajući module u prethodnoj jednakosti i koristeći nejednakost trougla, dobija se

$$|\lambda - a_{k,k}| \cdot |x_k| \leq \sum_{i \in N \setminus \{k\}} |a_{k,i}| \cdot |x_i| \leq \sum_{i \in N \setminus \{k\}} |a_{k,i}| \cdot |x_k| = |x_k| \cdot r_k(A),$$

i, deleći sa $|x_k| > 0$, dobija se nejednakost (2). Tada, na osnovu (1) karakteristični koren $\lambda \in \Gamma_k(A)$ i, stoga je $\lambda \in \Gamma(A)$. Kako ovo važi za proizvoljan indeks $\lambda \in \sigma(A)$, sledi $\sigma(A) \subseteq \Gamma(A)$. Ovim je dokaz završen $\triangle$

Da bismo pokazali vezu Geršgorinove teoreme i teoreme o regularnosti, najpre ćemo uvesti pojam dijagonalno dominantnih i stogo dijagonalno dominantnih matrica.

Definicija 1.7. *Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je* ***dijagonalno dominantna****, ili kraće DD, ako važi*

$$|a_{i,i}| \geq r_i(A), \tag{3}$$

za svaki indeks $i \in N$, i za bar jedan indeks $k \in N$ je $|a_{k,k}| > r_k(A)$.

Definicija 1.8. *Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je* ***strogo dijagonalno dominantna****, ili kraće SDD, ako važi*

$$|a_{i,i}| > r_i(A), \tag{4}$$

za svaki indeks $i \in N$.

Imajući u vidu definiciju 1.8 stroge dijagonalne dominacije, važi sledeća teorema:

Teorema 1.3. *Ako je matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ strogo dijagonalno dominantna, tada je A regularna.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da je $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ strogo dijagonalno dominantna i singularna matrica. To znači da $0 \in \sigma(A)$. Međutim, iz (2), za $\lambda = 0$, postoji indeks $k \in N$ takav da je $|\lambda - a_{k,k}| = |a_{k,k}| \leq r_k(A)$, što je u kontradikciji sa uslovom stroge dijagonalne dominacije matrice A $\triangle$

Pokazali smo, dakle, da teorema 1.3 sledi iz teoreme 1.2. Pokazaćemo da obrat takođe važi (za više detalja vidi [33]). Pretpostavimo da važi prethodna teorema i pretpostavimo da ne važi Teorema 1.2, tj. da za neku matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ postoji karakteristični koren λ takav da je

$$|\lambda - a_{k,k}| > r_k(A) \quad \text{za sve indekse } k \in N. \tag{5}$$

Uzevši $B := \lambda I_n - A := [b_{i,j}]$, dobija se da je B singularna matrica. S druge strane, sledi $r_k(B) = r_k(A)$ i $|\lambda - a_{k,k}| = |b_{k,k}|$, za svaki indeks $k \in N$. Primenom prethodne teoreme zaključujemo da je B regularna matrica, što je kontradikcija.

Ovim smo pokazali da su prethodne dve teoreme, Geršgorinova o lokalizaciji karakterističnih korena, i teorema o regularnosti SDD matrica, ekvivalentne, čime je povezana teorija o lokalizaciji karakterističnih korena i teorija regularnosti matrica.

Još jedan interesantan rezultat može se naći u radu Geršgorina iz 1931. godine. Naime, Geršgorinova teorema se može primeniti na matricu $X^{-1}AX$, koja je slična sa matricom A, pa zato ima iste karakteristične korene.

Ako sa

$$r_i^X(A) := r_i(X^{-1}AX) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \frac{|a_{i,j}|x_j}{x_i}$$

za sve indekse $i \in N$ i pozitivan vektor x, označimo **i-tu uopštenu sumu vrste**, i sa

$$\Gamma_i^{r^X}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq r_i^X(A)\}$$

i-ti uopšteni Geršgorinov disk, a sa

$$\Gamma^{r^X}(A) := \bigcup_{i \in N} \Gamma_i^{r^X}(A)$$

uopšteni Geršgorinov skup, važi sledeće tvrđenje:

Teorema 1.4. *Za svaku kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ i svaki pozitivan vektor $x \in \mathbb{R}^{n,n}$ je*

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma^{r^X}(A).$$

Konačno, pošto je x *proizvoljan* pozitivan vektor, bolja lokalozacija karakterističnih korena dobiće se presekom uopštenih Geršgorinovih skupova za više različitih izbora vektora x, ili, čak, *svih* mogućih izbora vektora x, u kom slučaju govorimo o **minimalnom Geršgorinovom skupu**. Više detalja o tom skupu, njegovoj definiciji i osobinama može se naći u [33] i .

1.2 Nerazloživost

Definicija 1.9. *Matrica $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ je* ***matrica permutacija*** *ako postoji permutacija π, tj. jedan-jedan preslikavanje $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takvo da je $P = [p_{i,j}] := [\delta_{i,\pi(j)}] \in \mathbb{R}^{n,n}$, gde je $\delta_{k,l}$ poznata Kronekerova delta funkcija*

$$\delta_{k,l} := \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Definicija 1.10. *Matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, je* ***razloživa*** *ako postoji matrica permutacija P i prirodan broj r, $1 \leq r < n$, takav da*

$$P^T A P = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{bmatrix}$$

gde je $A_{1,1} \in \mathbb{C}^{r,r}$, $A_{2,2} \in \mathbb{C}^{n-r,n-r}$. Ako takva matrica P ne postoji, reći ćemo da je A ***nerazloživa****. Ako je $A \in \mathbb{C}^{1,1}$, reći ćemo da je A nerazloživa ako je njen jedini element različit od nule, inače je razloživa.*

Svojstvo nerazloživosti prva je uvela i koristila u svom radu Olga Tauski, četrdesetih godina XX veka, pokazujući tako blisku povezanost teorije grafova i teorije matrica. Naime, matrice možemo posmatrati kao uopštene usmerene grafove, u kojima indeksi vrsta, ili kolona, predstavljaju čvorove, a elementi različiti od nule predstavljaju grane.

Dakle, za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ sa $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ ćemo označiti n različitih tačaka koje ćemo nazivati **čvorovi**. Za svaki element $a_{i,j} \in A$ različit od nule, pravićemo usmerenu **granu** $\overrightarrow{v_i v_j}$, koja će povezivati čvor v_i sa čvorom v_j. U slučaju da je $i = j$, tj. $a_{i,i} \neq 0$, granu $\overrightarrow{v_i v_i}$ ćemo nazivati **petlja**. Skup svih takvih usmerenih grana $\mathbb{E}(A) := \{\overrightarrow{v_i v_j} \colon a_{i,j} \neq 0, i, j \in N\}$ zajedno sa skupom čvorova $\mathbb{V}(A) := \{v_1, v_2, .., v_n\}$ predstavlja **usmereni graf** $\mathbb{G}(A)$ pridružen matrici A.

Grane se mogu nadovezivati i tako praviti **puteve** koji povezuju dva nesusedna čvora. Tako u grafu $\mathbb{G}(A)$ postoji put $\overrightarrow{v_{i_0} v_{i_1}}, \overrightarrow{v_{i_1} v_{i_2}}, \ldots, \overrightarrow{v_{i_{l-1}} v_{i_l}}$ ako i samo ako je niz indeksa $\{i_j\}_{j=0}^{l} \subseteq N$ matrice A takav da $a_{i_{j-1} i_j} \neq 0$ za sve indekse $1 \leq j \leq l$, što se može napisati i u obliku:

$$\prod_{j=0}^{l} a_{i_{j-1} i_j} \neq 0.$$

Dalje, struktura grafa može biti takva da se sastoji iz jednog bloka, čiji su svi indeksi međusobno povezani, ili iz više blokova koji nisu međusobno povezani, sa čim u vezi je sledeća definicija:

Definicija 1.11. *$\mathbb{G}(A)$ pridružen matrici $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je **jako povezan**, ako za svaki uređen par različitih čvorova (v_i, v_j) postoji usmeren put u $\mathbb{G}(A)$ od čvora v_i do čvora v_j.*

Dalje, interesantno je primetiti da se permutacijom elemenata matrice ne menja struktura grafa, tj. $\mathbb{G}(A) = \mathbb{G}(P^T A P)$.

Teorema 1.5. *Proizvoljna matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je nerazloživa ako i samo ako je njen pridruženi graf jako povezan.*

Kao što smo već rekli, nerazloživost matrice, u kombinaciji sa osobinom dijagonalne dominacije, dovoljna je da obezbedi regularnost matrice. Upravo to je tvrđenje koje je prva formulisala i dokazala Olga Taussky:

Teorema 1.6. *(Olga Taussky) Svaka nerazloživa matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, koja je dijagonalno dominantna, je regularna.*

2 SDD MATRICE

Iako smo u odeljku o lokalizaciji karakterističnih korena već dali definiciju SDD matrica, ovde ćemo je ponoviti, ne samo zbog istorijskog osvrta na njen nastanak, već i zbog specijalnog - *centralnog* mesta koje ta klasa zauzima u svim razmatranjima koja slede.

Teorema o regularnosti SDD matrica najčešće se vezuje za radove Lévy i Desplanque, mada je u slučaju kompleksnih matrica dokazana i od strane Minkowskog i Hadamard-a.

Teorema 2.1. *(Lévy-Desplanque) Neka je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljna kompleksna matrica. Ako važi:*

$$|a_{i,i}| > r_i(A), \tag{6}$$

za svaki indeks $i \in N$, tada je A regularna matrica.

Da bismo ustanovili da li je neka matrica reda n strogo dijagonalno dominantna, treba proveriti n nejednakosti, tj. proveriti da li za svaku od n vrsta važi da je moduo dijagonalnog elementa strogo veći od zbira modula vandijagonalnih elemenata odgovarajuće vrste.

Vrste matrice A za koje važi uslov stroge dijagonalne dominacije nazivaćemo **SDD vrste**.
Ako se uslov (6) primeni na transponovanu matricu matrice A, tada govorimo o strogoj dijagonalnoj dominaciji po kolonama, tačnije važi:

$$|a_{ii}| > r_i(A^T) \tag{7}$$

za svaki indeks $i \in N$.

Postavlja se pitanje šta se dešava sa matricama kod kojih nisu sve vrste SDD. Odgovor nije jednoznačan s obzirom da postoje singularne matrice sa samo jednom ne-SDD vrstom, a postoje i regularne matrice sa samo jednom SDD vrstom. Stoga je interesantno otkriti koliko je SDD-vrsta potrebno da se osigura regularnost matrice i koji su još uslovi potrebni da bi to bilo zadovoljeno.

Sledeće pitanje koje se prirodno postavlja je da li su dijagonalno dominantne matrice takođe regularne. Odgovor je u opštem slučaju ne, ali ako se osobini dijagonalne dominacije doda nerazloživost (vidi sekciju 1.2), dobijena klasa biće klasa regularnih matrica.

3 GDD MATRICE

Definicija 3.1. *Matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ naziva se* ***uopšteno dijagonalno dominantna*** *(kraće GDD, od engleskog generalized diagonally dominant) matrica ako postoji regularna dijagonalna matrica X takva da je AX strogo dijagonalno dominantna.*

Na osnovu Teoreme 1.1 sledi da su GDD matrice i H-matrice, u stvari, jedna te ista klasa. Da budemo sasvim precizni, GDD matrice i regularne H-matrice su jedna te ista klasa.

Drugim rečima, važi sledeća teorema:

Teorema 3.1. *Matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je H-matrica ako i samo ako je GDD matrica.*

GDD matrice se dobijaju iz SDD matrica množenjem matrice A s desne strane proizvoljnom pozitivnom dijagonalnom matricom. Kako svaki dijagonalni element matrice X množi odgovarajuću kolonu matrice A i tako formira kolonu matrice AX, ovaj postupak ćemo nadalje nazivati **skaliranje**, proizvod AX ćemo nadalje nazivati **skalirana matrica**, a pozitivnu dijagonalnu matricu X **skalirajuća matrica**.

U literaturi su poznate razne klase regularnih matrica, koje su, u stvari, potklase H-matrica, odnosno GDD matrica. Za svaku od tih potklasa, naravno, postoji beskonačno mnogo skalirajuċhi matrica, koje tu potklasu svode na SDD oblik. Medjutim, ponekad je posmatrana potklasa (nazovimo je za trenutak potklasa K) takva da se može **okarakterisati** specijalnim oblikom skalirajuće matrice i to u sledećem smislu:

- za svaku matricu iz potklase K postoji skalirajuća matrica datog oblika koja je svodi na SDD, ali i

- ako za matricu postoji skalirajuća matrica datog oblika koja je svodi na SDD, onda ona pripada potklasi K.

Kao što se može videti iz radova [7], [32], [29], [22], [19], poznavanje tog posebnog oblika, tj. strukture skalirajuće matrice može biti od zaista velike koristi u raznim oblastima primenjene linearne algebre - od lokalizacije karakterističnih korena, preko proširenja oblasti konvergencije relaksacionih postupaka, do ocena determinanti ili, pak, elegantnijeg dokazivanja raznih osobina matrica, na primer osobina Šurovog komplementa. Nažalost, veoma je mali broj potklasa matrica za koje se zna oblik skalirajuće matrice. U ovom radu ćemo navesti do sada poznate takve potklase - Dašnjic - Zusmanovič matrice i S-SDD matrice.

Za ostale navedene potklase, postojanje sklairajuće matrice nije, naravno, sporno, ali se o obliku te skalirajuće nezna ništa.

U poslednjih par godina, formiarani su i odgovarajući iterativni postupci za ispitivanje da li ja data matrica H-matrica, a koji se oslanjaju upravo na tehniku skaliranja. Za više informacija o tome, videti [1], [2], [21], [23], [25], [26], [27], [28], [29] i [34].

3.1 Ostrovski matrice

Prvo i najviše korišćeno i citirano uopštenje stroge dijagonalne dominacije jeste ono koje kombinuje dva različita indeksa, a u literaturi je poznato pod raznim imenima: duplo dijagonalno dominantne ili Ostrowski matrice.

Definicija 3.2. *(Ostrovski matrice) Proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ se naziva **Ostrovski matrica** ako važi*

$$|a_{i,i}||a_{j,j}| > r_i(A)r_j(A) \quad \text{za sve } i, j \in N,\ i \neq j. \tag{8}$$

Teorema 3.2. *(Teorema Ostrovskog, [5]) Za svaku matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, za koju važi*

$$|a_{i,i}||a_{j,j}| > r_i(A)r_j(A), \text{ za sve } i, j \in N,\ i \neq j,$$

sledi da je matrica A regularna tj. A je H-matrica.

Očigledno, ako je A SDD, tada ona pripada i klasi Ostrovski matrica, dok obrnuto ne mora da važi, što se vidi u sledećem primeru:

Primer 3.1. *Matrica*

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

očigledno nije SDD, jer prva vrsta nije SDD, naime $|a_{1,1}| = 3 = r_1(A)$. Medjutim, lako se vidi da je za svaka dva različita indeksa $i, j = 1, 2, 3, 4$, zadovoljen uslov

$$|a_{i,i}||a_{j,j}| > r_i(A)r_j(A),$$

pa, dakle, A_2 jeste Ostrovski matrica.

Ekvivalent prethodne teoreme na polju lokalizacije karakterističnih korena je poznata Brauerova teorema.

Teorema 3.3. *(Brauer) Za svaku matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$,$n \geq 2$, i za svaki karakteristični koren λ postoji par različitih indeksa $i, j \in N$ takvih da važi*

$$\lambda \in K_{i,j}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}||z - a_{j,j}| \leq r_i(A)r_j(A)\}.$$

Kao posledica ovog, svi karakteristični koreni date matrice A pripadaju skupu

$$\mathcal{K}(A) := \bigcup_{\substack{i,j \in N,\\ i \neq j}} K_{i,j}(A)$$

$K_{i,j}(A)$ je (i, j)-ti Brauer-Kasinijev oval za matricu A, dok se $\mathcal{K}(A)$ naziva Brauerov skup i predstavlja uniju $\binom{n}{2}$ ovala. Interesantno je primetiti da $\Gamma(A)$ i $\mathcal{K}(A)$ zavise samo od $a_{i,i}$ i $r_i(A)$, $i \in N$.

Kao posledica činjenice da su SDD matrice podskup Ostrovski matrica, zaključujemo da je Brauerov skup podskup Geršgorinovog skupa. Naime, važi sledeća teorema:

Teorema 3.4. *(Brauer) Za svaku matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je*

$$\mathcal{K}(A) \subseteq \Gamma(A).$$

3.2 Uopštenja kombinacijom vrsta i kolona

Jedan od pravaca generalizacije dijagonalne dominacije jeste generalizacija dijagonalne dominacije kombinacijom vrsta i kolona. Na ovaj način moguće je definisati nove potklase matrica, o kojima će biti reči u ovom odeljku. Sledeću, dobro poznatu potklasu H-matrica, koju je uveo takođe Ostrowski, nazivaćemo α-matricama.

Definicija 3.3. *Matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ćemo nazivati $\alpha 1$ matrica ako postoji parametar $\alpha \in [0, 1]$, takav da za svaki indeks $i \in N$ važi*

$$|a_{i,i}| > \alpha r_i(A) + (1 - \alpha) r_i(A^T).$$

Definicija 3.4. *Matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ćemo nazivati $\alpha 2$ matrica ako postoji parametar $\alpha \in [0, 1]$, takav da za svaki indeks $i \in N$ važi*

$$|a_{i,i}| > r_i(A)^{\alpha} r_i(A^T)^{1-\alpha}.$$

Može se primetiti da je pojam dijagonalne dominacije u definicijama 3.3 i 3.4 uopšten u pravcu kombinacije pojma dijagonalne dominacije po vrstama (3) i po kolonama (7).

Što se tiče regularnosti, važi sledeći rezultat:

Teorema 3.5. *Ako je matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ $\alpha 1$ ili $\alpha 2$ matrica, tada je ona regularna, štaviše, ona je H-matrica.*

Ove dve klase matrica predstavljaju uopštenja klase SDD matrica i obe su potklase H-matrica. Lako je pokazati da je klasa $\alpha 1$ podskup klase $\alpha 2$. U odnosu na prethodno navedene potklase H-matrica, ove dve klase α matrica stoje u opštem odnosu, o čemu svedoče primeri navedeni u poglavlju 4.1.

Kao i ranije, predstavićemo odgovarajuće rezultate u oblasti lokalizacije karakterističnih korena:

Teorema 3.6. *Svi karakteristični koreni matrice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ pripadaju skupu*

$$\mathcal{A}_1(A) := \bigcap_{0 \le \alpha \le 1} \bigcup_{i \in N} \Gamma_i^{\alpha 1}(A),$$

gde je

$$\Gamma_i^{\alpha 1}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le \alpha r_i(A) + (1-\alpha) r_i(A^T)\}, \quad i \in N.$$

Teorema 3.7. *Svi karakteristični koreni matrice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ pripadaju skupu*

$$\mathcal{A}_2(A) := \bigcap_{0 \le \alpha \le 1} \bigcup_{i \in N} \Gamma_i^{\alpha 2}(A),$$

gde je

$$\Gamma_i^{\alpha 2}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le r_i(A)^{\alpha} r_i(A^T)^{1-\alpha}\}, i \in N.$$

Pošto je klasa $\alpha 1$ sadržana u klasi $\alpha 2$, sledi da važi $\Gamma_i^{\alpha 1}(A) \subseteq \Gamma_i^{\alpha 2}(A)$ za svaki indeks $i \in N$. Stoga je teorema 3.6 trivijalna posledica teoreme 3.7.

Obe navedene teoreme, sa praktičnog stanovišta, nemaju preterano veliku upotrebnu vrednost, pošto se oblast lokalizacije definiše kao presek kontinum mnogo oblasti. Međutim, nedavno, u radovima [12] i [3] pokazano je da se ove dve oblasti mogu ekvivalentno zapisati u obliku mnogo praktičnijem za upotrebu.

3.3 Uopštenja izdvajanjem podskupa indeksa

U ovom poglavlju navešćemo potklase matrica nastale uopštavanjem uslova stroge dijagonalne dominacije izdvajanjem skupa indeksa. Tu spadaju potklase:

- Dašnjic-Zusmanovič matrice i

- S-SDD matrice.

I ovde ćemo, kao i u prethodnom poglavlju, uporedo sa definicijom odgovarajuće potklase H-matrica, navesti i odgovarajuće teoreme o lokalizaciji karakterističnih korena date matrice.

Ponovimo da je:

$$N = \{1, 2, \dots, n\} \textbf{ skup indeksa}.$$

Sa S ćemo označavati ma koji neprazan podskup skupa indeksa, $\phi \neq S \subset N$; tada je $\bar{S} = N \backslash S$ oznaka za komplement skupa S u odnosu na N.

Kao što je

$$r_i(A) = \sum_{j \in N \backslash \{i\}} |a_{i,j}|$$

oznaka za **sumu vandijagonalnih elemenata i-te vrste**, sa

$$r_i^S(A) = \sum_{j \in S, j \neq i} |a_{i,j}|$$

ćemo označavati **deo te sume koji odgovara podskupu** S. Tako je

$$r_i(A) = r_i^S(A) + r_i^{\bar{S}}(A).$$

Sa

$$r_i^X(A) := r_i(X^{-1})AX) = \sum_{j \in N \backslash \{i\}} \frac{|a_{i,j}| x_j}{x_i}$$

za sve indekse $i \in N$ i pozitivan vektor x, označimo **i-tu uopštenu vandijagonalnu sumu vrste**.

Za matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, za koju je $a_{ii} \neq 0$, za sve $i \in N$, koristimo još i oznaku

$$R_i^S(A) = \sum_{j \in S \backslash \{i\}} \frac{r_j^S(A)}{|a_{j,j}|} |a_{ij}|, i \in N$$

za proizvoljan neprazan $S \subset N$. Važi $R_i^{\phi}(A) = 0$.

3.4 Dašnjic-Zusmanovič matrice

Potklasa klase H-matrica, koju ćemo sledeću predstaviti u ovom radu, među onima koje su nastale uopštenjem uslova stroge dijagonalne dominacije, je klasa Dašnjic-Zusmanovič matrica, kraće DZ-matrica. Matrice koje pripadaju ovoj klasi zadvoljavaju svojstvo navedeno u narednoj teoremi:

Teorema 3.8. *(Dašnjic-Zusmanovič) Za svaku matricu* $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$*,* $n \geq 2$*, za koju postoji indeks* $i \in N$ *takav da važi*

$$|a_{i,i}|(|a_{j,j}| - r_j(A) + |a_{j,i}|) > r_i(A)|a_{j,i}|, \quad \textit{za svako } j \neq i \tag{9}$$

sledi da je A regularna, štaviše, A je H-matrica.

Ekvivalent ove teoreme u oblasti lokalizacije karakterističnih korena je sledeća teorema.

Teorema 3.9. *Svi karakteristični koreni date matrice* $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$*,* $n \geq 2$ *pripadaju skupu*

$$\mathcal{D}(A) := \bigcap_{i \in N} \bigcup_{\substack{j \in N, \\ j \neq i}} D_{i,j}(A),$$

gde je

$$D_{i,j}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}|(|z - a_{j,j}| - r_j(A) + |a_{j,i}|) \leq r_i(A)|a_{j,i}|\}.$$

Klasa DZ-matrica jedna je od retkih potklasa H-matrica za koju se može eksplicitno reći kakvog je oblika skalirajuća matrica.

Naime, DZ-matrice se mogu okarakterisati kao potklasa H-matrica za koju odgovarajuća skalirajuća matrica pripada skupu svih dijagonalnih matrica, čiji su dijagonalni elementi jednaki 1, svi izuzev jednog, koji je jednak nekom pozitivnom realnom broju γ, tj.

$$X = diag[x_1, x_2, ..., x_n] : x_i = \gamma > 0,\ i \in N,\ x_j = 1,\ j \neq i,\ j \in N.$$

Dakle, problem skaliranja svodi se na nalaženje pozitivne dijagonalne matrice X gornjeg tipa, takve da je AX SDD.

Ideja za to sadržana je u dokazu Teoreme 3.8, koji iz tih razloga ovde navodimo u celini.

Dokaz teoreme 3.8: Neka je $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ DZ matrica, tj. neka postoji indeks $i \in N$ takav da važi (9). Prvo, primetimo da iz ovog uslova direktno sledi da su svi dijagonalni elementi matrice A različiti od nule. Stoga, za $i \in N$ i svaki indeks $j \in N \backslash \{i\}$, nejednakost (9) možemo zapisati u obliku:

$$\frac{r_i(A)}{|a_{i,i}|} < \frac{|a_{j,j}| - r_j(A) + |a_{j,i}|}{|a_{j,i}|}$$

za $|a_{j,i}| \neq 0$, odnosno, kao

$$|a_{j,j}| > r_j(A), \quad \text{za } |a_{j,i}| = 0.$$

Uvedimo sledeće oznake:

$$\alpha_i(A) = \frac{r_i(A)}{|a_{i,i}|}, \text{ i}$$

$$\beta_i(A) = \min_{j \in N \setminus \{i\},\, |a_{j,i}| \neq 0} \frac{|a_{j,j}| - r_j(A) + |a_{j,i}|}{|a_{j,i}|},$$

gde je, po dogovoru, $\beta_i(A) = +\infty$ u slučaju kada je $|a_{j,i}| = 0$, za svako $j \in N \setminus \{i\}$. Očigledno, matrica A je DZ-matrica ako i samo ako postoji indeks $i \in N$, takav da je $\alpha_i(A) < \beta_i(A)$.
Drugim rečima, interval $(\alpha_l(A), \beta_l(A))$ je neprazan, pa postoji

$$\gamma \in (\alpha_i(A), \beta_i(A)).$$

Za tako izabrani parametar γ, dalje, konstruišemo dijagonalnu matricu $X = diag(x_1, x_2, ..., x_n)$ tako da je $x_i = \gamma$ i $x_j = 1$ za sve indekse $j \in N \setminus \{i\}$.
Kako iz $\alpha_i(A) < \gamma$ sledi

$$\gamma |a_{i,i}| > r_i(A) = r_i(AX), \tag{10}$$

a iz $\gamma < \beta_i(A)$ sledi

$$|a_{j,j}| > r_j(A) - |a_{j,i}| + \gamma |a_{j,i}| = r_j(AX), \quad \text{za sve } j \in N \setminus \{i\}, \tag{11}$$

zaključujemo da je matrica AX SDD matrica, odnosno, da je A GDD matrica. $\triangle$

3.5 S-SDD matrice

Naredna potklasa H-matrica za koju je takođe poznato kako izgleda skalirajuća matrica jeste klasa S-SDD matrica. Ova potklasa može se definisati na nekoliko ekvivalentnih načina, od kojih ovde navodimo samo jedan, pogodan za odgovarajuću oblast lokalizacije karakterističnih korena.

Definicija 3.5. *(S-SDD matrice) Za datu matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, i dati neprazan pravi podskup S skupa indeksa N, A je* ***S-strogo dijagonalno dominantna*** *(S-SDD), ako važe sledeća dva uslova*

$$|a_{i,i}| > r_i^S(A), \quad \textit{za svako } i \in S$$

$$(|a_{i,i}| - r_i^S(A))(|a_{j,j}| - r_j^{\bar{S}}(A)) > r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A), \quad \textit{za svako } i \in S, j \in \bar{S}.$$

U gornjoj definiciji izostavljen je slučaj $S = N$, jer je tada $\bar{S} = \phi$ i gornji uslovi se redukuju na $|a_{i,i}| > r_i(A)$ za sve indekse $i \in N$, što je, u stvari, definicija stroge dijagonalne dominacije matrice A.

Primetimo da, ako je matrica A SDD, tada je ona i $\mathcal{S}$-SDD za svaki neprazan pravi podskup $S \subset N$.

Nadalje, gornja definicija se može preformulisati u sledeći oblik:

Definicija 3.6. *Za datu matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, i dati neprazan pravi podskup S skupa indeksa N, A je **S-strogo dijagonalno dominantna** (S-SDD), ako važe sledeća dva uslova*

$$|a_{i,i}| > r_i^S(A), \quad \textit{za bar jedno } \; i \in S$$

$$(|a_{i,i}| - r_i^S(A))(|a_{j,j}| - r_j^{\bar{S}}(A)) > r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A), \quad \textit{za svako } \; i \in S, j \in \bar{S}.$$

Važi sledeća teorema:

Teorema 3.10. *([6]) Ako data matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ pripada klasi S-SDD matrica, za neki neprazan pravi podskup S skupa indeksa, tada je ona regularna, štaviše, ona je H-matrica.*

Dokaz:

Neka je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, S-SDD matrica. Drugim rečima, postoji neprazan skup indeksa $S \subsetneq N$, takav da je

$$|a_{i,i}| > r_i^S(A) \quad \text{za svako } \; i \in S \tag{12}$$

$$(|a_{i,i}| - r_i^S(A))(|a_{j,j}| - r_j^{\bar{S}}(A)) > r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A) \quad \text{za sve } \; i \in S, \; j \in \bar{S}, \tag{13}$$

Konstruišimo dijagonalnu matricu $X = diag(x_1, x_2, ..., x_n)$, takvu da je AX SDD matrica. Drugim rečima, konstruisaćemo skalirajuću matricu X koja datu S-SDD matricu prevodi u SDD oblik.

Ukoliko elemente matrice X biramo na sledeći način:

$$x_i = \begin{cases} \gamma > 0, & \text{za} \quad i \in S, \\ 1, & \text{za} \quad i \in \bar{S}, \end{cases}$$

gde je $\gamma > 0$ proizvoljan broj, elementi matrice $\tilde{A} = [\tilde{a}_{i,j}] := AX \in \mathbb{C}^{n,n}$ dati su sa:

$$\tilde{a}_{i,j} = \begin{cases} \gamma |a_{i,j}|, & \text{za } j \in S, \\ |a_{i,j}|, & \text{za } j \in \bar{S}. \end{cases}$$

Time su sume njenih vandijagonalnih elemenata po vrstama date sa:

$$r_k(\tilde{A}) = r_k^S(\tilde{A}) + r_k^{\bar{S}}(\tilde{A}) = \gamma r_k^S(A) + r_k^{\bar{S}}(A)$$

za sve indekse $k \in N$.

Imajući to u vidu, zaključujemo da je AX SDD matrica ako i samo ako važi

$$\begin{cases} \gamma|a_{i,i}| > \gamma r_i^S(A) + r_i^{\bar{S}}(A), & \text{za svako } i \in S, \\ |a_{j,j}| > \gamma r_j^S(A) + r_j^{\bar{S}}(A), & \text{za svako } j \in \bar{S} \end{cases}$$

ili, ekvivalentno tome,

$$\begin{cases} \gamma(|a_{i,i}| - r_i^S(A)) > r_i^{\bar{S}}(A), & \text{za svako } i \in S, \\ |a_{j,j}| - r_j^{\bar{S}}(A) > \gamma r_j^S(A), & \text{za svako } j \in \bar{S}. \end{cases}$$

Međutim, kako je matrica A S-SDD, zaključujemo da je $|a_{i,i}| - r_i^S(A)$ pozitivna veličina za svaki indeks $i \in S$, pa će AX biti SDD matrica ako i samo ako važi:

$$\frac{r_i^{\bar{S}}(A)}{(|a_{i,i}| - r_i^S(A))} < \gamma, \quad \text{za sve } i \in S, \tag{14}$$

$$\gamma < \frac{|a_{j,j}| - r_j^{\bar{S}}(A)}{r_j^S(A)}, \quad \text{za sve } j \in \bar{S}, \text{ takve da je } r_j^S(A) \neq 0 \tag{15}$$

i

$$|a_{j,j}| > r_j^{\bar{S}}(A), \quad \text{za sve } j \in \bar{S}, \text{ takve da je } r_j^S(A) = 0. \tag{16}$$

Uslov (16) važi zbog pretpostavke da je A S-SDD matrica.
Nejednakosti (14) i (15) daju, redom, donje i gornje granice za ocenu parametra γ, pa ćemo posmatrati najveću donju i najmanju gornju granicu za γ, koje obezbedjuju da je AX SDD matrica:

$$\alpha_S(A) := \max_{i \in S} \frac{r_i^{\bar{S}}(A)}{(|a_{i,i}| - r_i^S(A))} < \gamma < \min_{j \in \bar{S}, r_j^S(A) \neq 0} \frac{|a_{j,j}| - r_j^{\bar{S}}(A)}{r_j^S(A)} =: \beta_S(A), \tag{17}$$

gde je, u slučaju kada je $r_j^S(A) = 0$ za svaki indeks $j \in \bar{S}$, $\beta_S(A) := +\infty$. Primetimo, takodje, da je $0 \leq \alpha_S(A)$.

Konačno, kako je A S-SDD matrica, sledi da je $\alpha_S(A) < \beta_S(A)$, pa postoji parametar $\gamma > 0$ takav da je $\alpha_S(A) < \gamma < \beta_S(A)$, što je potreban i dovoljan uslov da je matrica AX SDD. Dakle, A je GDD matrica. △

Odgovarajući rezultat u oblasti lokalizacije karakterističnih korena je sledeća teorema:

Teorema 3.11. *Neka je S neprazan pravi podskup skupa indeksa N i $n \geq 2$. Za svaku matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, definišemo krugove Geršgorinovog tipa*

$$\Gamma_i^S(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq r_i^S(A)\},$$

za sve indekse $i \in S$ i skupove

$$V_{i,j}^S(A) := \{z \in \mathbb{C} : (|z - a_{i,i}| - r_i^S(A))(|z - a_{j,j}| - r_j^{\bar{S}}(A)) \leq r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A)\},$$

za sve indekse $i \in S$, $j \in \bar{S}$. Tada svi karakteristični koreni date matrice A pripadaju skupu

$$C^S(A) =: (\bigcup_{i \in S} \Gamma_i^S(A)) \cup (\bigcup_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S}}} V_{i,j}^S(A).$$

Očigledno se bolja lokalizacija karakterističnih korena može dobiti skupom

$$\mathcal{C}(A) := \bigcap_{\substack{S \subset N \\ S \neq \phi, S \neq N}} C^S(A) \tag{18}$$

3.6 Dalja generalizacija nekih potklasa H-matrica

Dalja generalizacija nekih potklasa H-matrica data je sledećim teoremama. Za proizvoljnu kompleksnu kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, čiji su svi dijagonalni elementi različiti od nule, sa $R_i^S(A)$ ćemo označiti skup:

$$R_i^S(A) = \sum_{k \in S \setminus \{i\}} \frac{r_k^S(A)|a_{i,k}|}{|a_{k,k}|} \quad \text{za } i \in N \tag{19}$$

za proizvoljan neprazan skup $S \subset N$. Takodje, definišemo $R_i^\phi(A) = 0$.

Važe sledeća tvrdjenja:

Teorema 3.12. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, kvadratna matrica čiji su svi dijagonalni elementi različiti od nule. Ako postoji neprazan skup $S \subset N$ takav da važe sledeća dva uslova*

$$r_i^S(A) > R_i^S(A) \quad \text{za svako } i \in S, \tag{20}$$

$$(r_i^S(A) - R_i^S(A))(r_j^{\bar{S}}(A) - R_j^{\bar{S}}(A)) > R_i^{\bar{S}}(A) R_j^S(A) \text{ za svako } i \in S,\ j \in \bar{S}, \tag{21}$$

tada je A H-matrica.

Teorema 3.13. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, kvadratna matrica čiji su svi dijagonalni elementi različiti od nule. Ako važi*

$$r_i(A) r_j(A) > R_i^N(A) R_j^N(A) \text{ za sve } i, j \in N,\ i \neq j,$$

tada je A H-matrica.

Dalje generalizacije potklasa H-matrica mogu se dobiti korišćenjem osobina nerazloživosti (videti [7]).

3.7 Brualdijeve matrice

Značajne rezultate u oblasti lokalizacije karakterističnih korena dao je Brualdi 1982. godine, koristeći teoriju grafova. Razvijajući vezu teorije grafova i teorije matrica, on uvodi pojam ciklusa u teoriju matrica, čime povezuje regularnost sa lokalizacijom karakterističnih korena preko teorije grafova. Njegov rad proširuje Varga, uvodeći pojam slabog ciklusa i dajući odgovarajući rezultat u oblasti lokalizacije karakterističnih korena. U Varginoj knjizi "Geršgorin And His Circles"(vidi [33]) može se naći deo Brualdijevih rezultata.

Za datu matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\mathbb{G}(A)$ je njen usmereni graf opisan u prvom poglavlju.

U usmerenom grafu $\mathbb{G}(A)$, pod pojmom **jaki ciklus** $\gamma(A)$ ćemo podrazumevati uredjenu p-torku indeksa $\gamma = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$ takvih da je $\overrightarrow{v_{i_j} v_{i_{j+1}}}$ grana, za sve $j = 1, 2, \ldots, p$, pri čemu je $i_{p+1} = i_1$. Drugim rečima, uređeni skup $\gamma = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$ je jaki ciklus u $\mathbb{G}(A)$, ako su svi elementi $a_{i_1,i_2}, a_{i_2,i_3}, \ldots a_{i_p,i_{p+1}}$ matrice A različiti od nule.

Za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, za koju ne postoji jaki ciklus koji prolazi kroz čvor v_i, bez obzira na to da li postoji petlja u čvoru v_i, definišemo **slabi ciklus** $\gamma = (i)$. Na ovaj način obezbedili smo da za svaki čvor v_i postoji bar jedan (slabi ili jaki) ciklus u grafu $\mathbb{G}(A)$. Skup svih ciklusa u grafu $\mathbb{G}(A)$ označavaćemo sa $C(A)$.

Za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ i jaki ciklus γ u $\mathbb{G}(A)$, pridružena **Brualdijeva lemniskata** $B_\gamma(A)$ se definiše kao

$$B_\gamma(A) = \{z \in \mathbb{C} : \prod_{i \in \gamma} |z - a_{i,i}| \leq \prod_{i \in \gamma} r_i(A)\}.$$

Ako je $\gamma = (i)$ slabi ciklus u $\mathbb{G}(A)$, pridruženu Brualdijevu lemniskatu $B_\gamma(A)$ ćemo definisati kao

$$B_\gamma(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| = 0\} = \{a_{i,i}\}.$$

Odgovarajuću uniju ovakvih Brualdijevih lemniskata označavaćemo sa

$$\mathcal{B}(A) := \bigcup_{\gamma \in C(A)} B_\gamma(A).$$

Važi sledeća teorema o lokalizaciji karakterističnih korena matrice A:

Teorema 3.14. *(Brualdi-Varga) Za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ i svaki karakteristični koren λ te matrice, postoji slabi ili jaki ciklus $\gamma \in C(A)$ takav da važi $\lambda \in B_\gamma(A)$.*

Posledica prethodne teoreme je da svi karakteristični koreni matrice A pripadaju skupu $\mathcal{B}$(A).

Odgovarajući rezultat o regularnosti matrica je:

Teorema 3.15. *Za svaku matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, za koju važi*

$$\prod_{i\in\gamma} |a_{i,i}| > \prod_{i\in\gamma} r_i(A)$$

za svaki jaki ciklus iz $\mathbb{G}(A)$, kao i ako je $|a_{i,i}| > 0$ za svaki indeks i za koji je $\gamma = (i)$ slabi ciklus u $\mathbb{G}(A)$, sledi da je A regularna, štaviše, A je H-matrica.

Matrice koje zadovoljavaju gore navedeni uslov nazivaju se **Brualdijeve** matrice. Što se veze ove klase matrica sa prethodnim klasama tiče, u smislu da li su podskup, nadskup ili ni jedno ni drugo u odnosu na prethodne klase, lako je zaključiti da je svaka SDD matrica istovremeno Brualdijeva, dok poređenje Ostrovski i Brualdijeva matrica nije očigledno. Brualdijeve matrice sadrže Ostrovski matrice, o čemu govori naredna teorema:

Teorema 3.16. *Svaka Ostrovski matrica je Brualdijeva matrica.*

Obrnut smer ne mora da važi, što pokazuje sledeći primer:

Primer 3.2. *Neka je data matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0.9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Za njen jedini ciklus $\gamma = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{G}(A)$ važi $|a_{1,1}||a_{2,2}||a_{3,3}||a_{4,4}| = 1 > 0.9 = r_1(A)r_2(A)r_3(A)r_4(A)$. Dakle, data nerazloživa matrica je Brualdijeva, ali, očigledno, nije Ostrovski matrica.

3.8 Nekrasov matrice

Nekrasov matrice čine potklasu klase H-matrica koja, za razliku od prethodnih, ne daje praktično upotrebljivu lokalizaciju karakterističnih korena. Ipak, mi je u ovom radu navodimo jer upravo ova klasa matrica daje druge značajne rezultate u pravcu ostalih primena dijagonalne dominacije.

Kao što je već pomenuto, $N = \{1, 2, ..., n\}$ je skup indeksa, S je neprazan pravi podskup skupa indeksa, $\bar{S} = N \backslash S$ je komplement skupa S u odnosu na skup indeksa N, i $r_i(A)$ i $r_i^S(A)$ predstavljaju vandijagonalnu sumu i-te vrste i deo sume te vrste koji odgovara podskupu S, respektivno.

Definišemo $h_i(A)$ na sledeći način (rekurzivno):

$$h_1(A) = \sum_{j \neq 1} |a_{1,j}|, \tag{22}$$

$$h_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{j,j}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}|, \tag{23}$$

i $h_i^S(A)$:

$$h_1^S(A) = r_1^S(A), \tag{24}$$

$$h_i^S(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| \frac{h_j^S(A)}{|a_{j,j}|} + \sum_{j=i+1, j \in S} |a_{ij}|. \tag{25}$$

Očigledno je da za proizvoljan skup S i svaki indeks $i \in N$ važi

$$r_i(A) = r_i^S(A) + r_i^{\bar{S}}(A),$$

$$h_i(A) = h_i^S(A) + h_i^{\bar{S}}(A).$$

Koristeći ove oznake možemo definisati klase matrica koje uopštavaju klasu SDD matrica.

Definicija 3.7. *Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ se naziva Nekrasov matrica ako za svaki indeks $i \in N$ važi:*

$$|a_{i,i}| > h_i(A).$$

Definicija 3.8. *Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ se naziva Gutkov matrica ako postoji permutaciona matrica P (vidi Definiciju 1.9), takva da je PAP^T Nekrasova matrica.*

Za ove matrice, poznato je da, s jedne stane važi

$$SDD \subset Ostrovski \subset S - SDD \subset H - matrice,$$

dok, s druge strane je

$$SDD \subset Ostrovski \subset Gudkov \subset H - matrice.$$

3.9 S-Nekrasov matrice

Definicija 3.9. *Za datu matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, i dati neprazan pravi podskup skupa indeksa S,matrica A je S-Nekrasov matrica ako*

$$|a_{i,i}| > h_i^S(A), \quad \text{za sve indekse } i \in S, \tag{26}$$

$$|a_{ii}| > h_i^{\bar{S}}(A), \quad \text{za sve indekse } j \in \bar{S}, \tag{27}$$

$$(|a_{i,i}| - h_i^S(A))(|a_{j,j}| - h_j^{\bar{S}}(A)) > h_i^{\bar{S}}(A)h_j^S(A), \quad \text{za sve } i \in S, j \in \bar{S}. \tag{28}$$

Definicija 3.10. *Za datu matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, i dati neprazan pravi podskup indeksa S, A je S-Gudkov matrica ako postoji permutaciona matrica P, takva da je PAP^T S-Nekrasov matrica.*

Teorema 3.17. *Ako je matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ S-Gudkov matrica, tada je ona regularna, štaviše H-matrica.*

Dokaz: Dovoljno je dokazati da je svaka S-Nekrasov matrica jedna H-matrica. Da bi se to postiglo, za proizvoljan neprazan pravi podskup indeksa S, definišimo interval $J_A(S)$ na sledeći način:

$$J_A(S) = (\mu_1^S(A), \mu_2^S(A)),$$

$$\mu_1^S(A) = max_{i \in S} \frac{h_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{i,i}| - h_i^S(A)}$$

i

$$\mu_2^S(A) = min_{j \in \bar{S}, h_j^S(A) \neq 0} \frac{|a_{j,j}| - h_j^{\bar{S}}(A)}{h_j^S(A)}.$$

Kako je matrica A S-Nekrasova, poznato je da:

$$|a_{i,i}| > h_i^S(A), \quad \text{za sve indekse } i \in S, \tag{29}$$

$$|a_{i,i}| > h_i^{\bar{S}}(A), \quad \text{za sve indekse } j \in \bar{S}, \tag{30}$$

i

$$(|a_{i,i}| - h_i^S(A))(|a_{j,j}| - h_j^{\bar{S}}(A)) > h_i^{\bar{S}}(A)h_j^S(A), \quad \text{za sve indekse } i \in S,\ j \in \bar{S}. \tag{31}$$

odakle sledi

$$\frac{h_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{i,i}| - h_i^S(A)} < \frac{|a_{j,j}| - h_j^{\bar{S}}(A)}{h_j^S(A)},$$

za sve indekse $i \in S$, $j \in \bar{S}$ i $h_j^S(A) \neq 0$. Tada je, očigledno, interval $J_A(S)$ neprazan, pa možemo birati $\gamma \in J_A(S)$, i definisati dijagonalnu matricu X na sledeći način:

$$X = diag[x_1, x_2, ..., x_n] : x_i = \gamma > 0,\ i \in S,\ x_j = 1, i \in \bar{S}.$$

Pokazaćemo da je matrica AX Nekrasova, i stoga, regularna. Drugim rečima, dokazaćemo da matrica AX zadovoljava sledeću nejednakost:

$$|(AX)_{i,i}| > h_i(AX), \quad \text{za sve indekse } i \in N. \tag{32}$$

Najpre dokazujemo indukcijom da važi

$$h_i(AX) = \gamma h_i^S(A) + h_i^{\bar{S}}(A),$$

za sve indekse $i \in N$. Za $i = 1$ je

$$h_1(AX) = \sum_{j \neq 1} |(AX)_{1,j}| = \sum_{j \neq 1} |a_{1,j} x_j| =$$

$$\gamma \sum_{j \in S, j \neq 1} |a_{1,j}| + \sum_{j \in \bar{S}, j \neq 1} |a_{1,j}| = \gamma r_1^S(A) + r_1^{\bar{S}}(A) = \gamma h_1^S(A) + h_1^{\bar{S}}(A).$$

Pretpostavimo da jednakost (32) važi za sve indekse $i < k$, i dokažimo da važi za $i = k$:

$$h_k(AX) = \sum_{j=1}^{k-1} |(AX)_{k,j}| \frac{h_j(AX)}{|(AX)_{j,j}|} + \sum_{j=k+1}^{n} |(AX)_{k,j}| =$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}| \frac{\gamma h_j^S(A) + h_j^{\bar{S}}}{|a_{j,j}|} + \sum_{j=k+1, j \in S}^{n} \gamma |a_{k,j}| + \sum_{j=k+1, j \in \bar{S}} |a_{k,j}| =$$

$$\gamma \sum_{j=1}^{k-1} |a_{k,j}| \frac{h_j^S(A)}{|a_{j,j}|} + \gamma \sum_{j=1}^{k+1, j \in S} |a_{k,j}| + \sum_{j=1}^{k-1} |a_{k,j}| \frac{h_j^{\bar{S}}(A)}{|a_{j,j}|} + \sum_{j=k+1, j \in \bar{S}} |a_{k,j}| = \gamma h_k^S + h_k^{\bar{S}}.$$

Kako $\gamma \in J_A(A)$, važi

$$\frac{h_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{i,i}| - h_i^S(A)} < \gamma < \frac{|a_{j,j}| - h_j^{\bar{S}}(A)}{h_j^S(A)},$$

za sve $i \in S, j \in \bar{S}$ i $h_j^S(A) \neq 0$, odakle je

$$\gamma |a_{ii}| > \gamma h_i^S + h_i^{\bar{S}}$$

i

$$|a_{j,j}| > \gamma h_j^S + h_j^{\bar{S}},$$

za sve $i \in S, j \in \bar{S}$. Dakle, imamo

$$|(AX)_{i,i}| = \gamma |a_{i,i}| > \gamma h_i^S + h_i^{\bar{S}} = h_i(AX)$$

za sve $i \in S$ i

$$|(AX)_{j,j}| = \gamma h_j^S + h_j^{\bar{S}} = h_j(AX),$$

za sve indekse $j \in \bar{S}$, što znači da je $|(AX)_{i,i}| > h_i(AX)$, za sve $i \in N$.

Time smo dobili da je matrica AX Nekrasova matrica, pa je i regularna., Stoga je i matrica A regularna. Da bismo dokazali da je A i H-matrica, dovoljno je istaći činjenicu da je svaka Nekrasova matrica H-matrica, stoga se, na osnovu poznate teoreme, može skalirati do SDD oblika. Preciznije, kako je AX Nekrasova matrica, postoji dijagonalna regularna matrica D, takva da je AXD SDD matrica. Dakle, A je H-matrica. $\triangle$

4 MEĐUSOBNI ODNOSI POTKLASA

Ukoliko želimo da dobijemo odgovor na pitanje da li je data matrica H-matrica ili ne, u konačno mnogo koraka, to se uglavnom svodi na proveru da li data matrica pripada nekoj od poznatih potklasa H-matrica. Bilo da proveravamo uslov kojim je neka potklasa definisana, bilo da tražimo skalirajuću matricu unapred zadatog oblika, u suštini, mi uvek proveravamo da li data matrica pripada odgovarajućoj potklasi klase H-matrica. Moramo biti svesni činjenice da su u pitanju samo dovoljni uslovi za pripadnost klasi H matrica, naime, činjenica da posmatrana matrica možda ne pripada nijednoj od nama poznatih potklasa H-matrica, još uvek ne znači da ona nije H-matrica.

Odgovor da matrica nije H-matrica može se dobiti proverom nekog od potrebnih uslova, od kojih navodimo ssledeće:

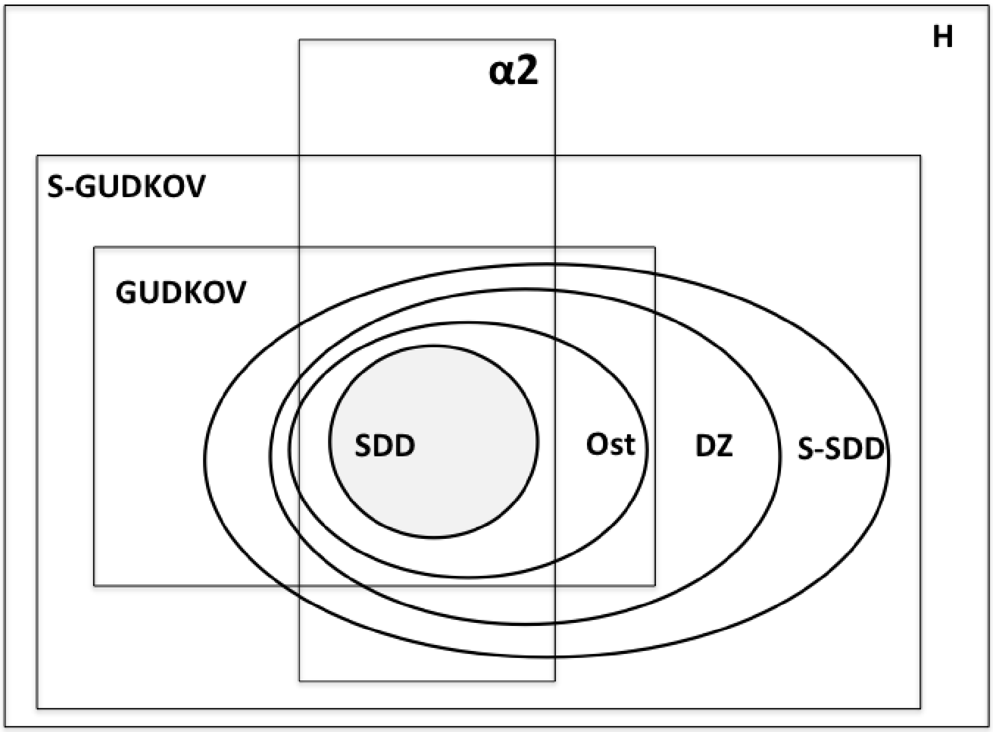
- svaka H-matrica ima bar jednu SDD vrstu,
- svaka H-matrica ima bar jednu SDD kolonu,
- svaka H-matrica ima bar dve vrste za koje važi da je proizvod modula dijagonalnih elemenata strogo veći od proizvoda odgovarajućih vandijagonalnih suma,
- svaka H-matrica ima bar dve kolone za koje važi da je proizvod modula dijagonalnih elemenata strogo veći od proizvoda odgovarajućih vandijagonalnih suma (u koloni).

Klasa SDD matrica zauzima centralno mesto u razmatranju međusobnih odnosa potklasa H-matrica, dok sve ostale pomenute potklase predstavljaju generalizacije SDD svojstva.

U ovom radu naveli smo četiri "pravca"generalizacije :

- Pravac izdvajanja podskupa indeksa,
- Pravac kombinacija vrsta i kolona,
- Pravac uopštenja pomoću grafova,
- Pravac rekurzivnog formiranja vandijagonalnih suma.

Odnos pravaca generalizacije, kao i medjusobni odnos navedenih potklasa prikazan je na sledećoj slici.



U narednom poglavlju ovi odnosi biće ilustrovani numeričkim primerima.

4.1 Ilustrativni primeri

U sledećoj tabeli oznaka + znači da je za matricu iz date vrste odgovarajuća osobina iz posmatrane kolone zadovoljena, odnosno da matrica iz date vrste pripada klasi iz odgovarajuće kolone, dok znak − znači da matrica iz date vrste ne pripada klasi iz odgovarajuće kolone.

	SDD	Ostrovski	DZ	S-SDD*	$\alpha 2$	Gudkov	S-Gudkov*	H
A_1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
A_2	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
A_3	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
A_4	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
A_5	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
A_6	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
A_7	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
A_8	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
A_9	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
A_{10}	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
A_{11}	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
A_{12}	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

*) znak + u kolonama S-SDD i S-Gudkov znači da je uslov ispunjen neki izbor skupa S.

4.1.1 Primer za matricu A_1

Svaka SDD matrica istovremeno je i Ostrovski, DZ, S-SDD za svako S, $S \neq \phi, S \neq N$, takodje je iz klase $\alpha 2$, jeste Gudkov, S-Gudkov i, naravno, H-matrica. Na primer:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

4.1.2 Primer za matricu A_2

Matrica

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

očigledno nije SDD, jer prva vrsta nije SDD, naime $|a_{1,1}| = 3 = r_1(A)$. Medjutim, lako se vidi da je za svaka dva različita indeksa $i, j = 1, 2, 3, 4$, zadovoljen uslov

$$|a_{i,i}||a_{j,j}| > r_i(A)r_j(A),$$

pa, dakle, A_2 jeste Ostrovski matrica. Samim tim, ona je i DZ matrica i S-SDD matrica bar za jedan neprazan pravi podskup S skupa indeksa N.

Dakle, ona je i H-matrica. Pokažimo da A_2 pripada i klasi $\alpha 2$. Zaista, za $\alpha = 0$, važi

$$|a_{i,i}| > (r_i(A))^0 (r_i(A^T))^1 = r_i(A^T), \text{ za svako } i = 1, 2, 3, 4.$$

Jeste i Gudkov matrica jer ima svojstvo Ostrovski matrica, a time pripada i klasi S-Gudkov matrica.

4.1.3 Primer za matricu A_3

Matrica

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

nije SDD, jeste Ostrovski, pa, dakle i DZ i S-SDD bar za jedan neprazan pravi podskup S skupa indeksa N. Ona je, znači H-matrica, ali nije iz klase $\alpha 2$, jer kako god birali $\alpha \in [0, 1]$, pošto je A_3 simetrična matrica, važi

$$r_i(A)^\alpha r_i(A^T)^{1-\alpha} = r_i(A) = 3, \text{ za svako } i = 1, 2, 3, 4,$$

pa SDD uslov nije ispunjen za $i = 1$. Jeste i Gudkov matrica jer ima svojstvo Ostrovski matrica.

4.1.4 Primer za matricu A_4

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ova matrica nije SDD i nije Ostrovski, jer nije zadovoljen uslov

$$|a_{1,1}||a_{4,4}| = 2 \cdot 4 > 3 \cdot 3 = r_1(A) r_4(A).$$

Ona, medjutim, jeste DZ, i to za $i = 1$, jer važe sledeća tri uslova:

$$|a_{1,1}|(|a_{2,2}| - r_2(A) + |a_{2,1}|) = 2 \cdot (4 - 2 + 0) > 3 \cdot 0 = r_1(A)|a_{2,1}|,$$

$$|a_{1,1}|(|a_{3,3}| - r_3(A) + |a_{3,1}|) = 2 \cdot (4 - 2 + 0) > 3 \cdot 0 = r_1(A)|a_{3,1}| \text{ i}$$

$$|a_{1,1}|(|a_{4,4}| - r_4(A) + |a_{4,1}|) = 2 \cdot (4 - 3 + 1) > 3 \cdot 1 = r_1(A)|a_{4,1}|.$$

Takodje, A_4 je i $\alpha 2$ matrica za $\alpha = 0$ (tj. A_4 je SDD po kolonama). Jeste Gudkov matrica jer je za permutaciju

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ispunjen uslov $|(PA_4P^T)_{ii}| > h_i(PA_4P^T)$, gde je $i = 1, 2, 3, 4$.

Kako je matrica A_5 Gudkova, time je i S-Gutkova za svako izbor skupa S.

4.1.5 Primer za matricu A_5

$$A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Slično kao u prethodnom primeru, zaključujemo da A_5 nije SDD, nije Ostrovski, jeste DZ, dakle i S-SDD, ali nije $\alpha 2$, jer je u pitanju simetrična matrica, pa za $i = 1$ uslov $|a_{1,1}| = 2 > 3 = r_1(A)^\alpha r_1(A^T)^{1-\alpha}$ ne važi ni za jedno $\alpha \in [0, 1]$.

Matrica A_5 je Gudkova i S-Gutkova iz istih razloga kao i prethodna matrica A_4.

4.1.6 Primer za matricu A_6

Matrica

$$A_6 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

nije SDD, nije Ostrovski (jer ima dve ne-SDD vrste), nije DZ, jer:

- za $i = 1$ postoji $j = 3$ za koje ne važi

  $$|a_{1,1}|(|a_{3,3}| - r_3(A) + |a_{3,1}| = 2 \cdot (3 - 4 + 2) > 1 \cdot 2 = r_1(A)|a_{3,1}|$$

- za $i = 2$ postoji $j = 3$ za koje ne važi

  $$|a_{2,2}|(|a_{3,3}| - r_3(A) + |a_{3,2}| = 3 \cdot (3 - 4 + 1) > 2 \cdot 1 = r_2(A)|a_{3,2}|$$

- za $i = 3$ postoji $j = 4$ za koje ne važi

  $$|a_{3,3}|(|a_{4,4}| - r_4(A) + |a_{4,3}| = 3 \cdot (3 - 4 + 1) > 4 \cdot 1 = r_3(A)|a_{4,3}|$$

- za $i = 4$ postoji $j = 3$ za koje ne važi

$$|a_{4,4}|(|a_{3,3}| - r_3(A) + |a_{3,4}| = 3 \cdot (3 - 4 + 1) > 4 \cdot 4 = r_4(A)|a_{3,4}|$$

Medjutim, za $S = \{1, 2\}$, ovo jeste S-SDD matrica, jer je

$$r_1^S = 1, \;\; r_2^S = 2, \;\; r_3^S = 3, \;\; r_4^S = 3, \;\; r_1^{\overline{S}} = 0, \;\; r_2^{\overline{S}} = 0, \;\; r_3^{\overline{S}} = 1, \;\; r_4^{\overline{S}} = 1,$$

pa se lako proverava da važe uslovi

$$(|a_{1,1}| - r_1^S)(|a_{3,3}| - r_3^{\overline{S}}) = (2-1)(3-1) > 3 \cdot 0 = r_3^S r_1^{\overline{S}},$$

$$(|a_{1,1}| - r_1^S)(|a_{4,4}| - r_4^{\overline{S}}) = (2-1)(3-1) > 3 \cdot 0 = r_4^S r_1^{\overline{S}},$$

$$(|a_{2,2}| - r_2^S)(|a_{3,3}| - r_3^{\overline{S}}) = (3-2)(3-1) > 3 \cdot 0 = r_3^S r_2^{\overline{S}},$$

$$(|a_{2,2}| - r_2^S)(|a_{4,4}| - r_4^{\overline{S}}) = (3-2)(3-1) > 3 \cdot 0 = r_4^S r_2^{\overline{S}}.$$

A_6 je, takodje, i $\alpha 2$ matrica, i to za $\alpha = 2/3$, jer je

$$|a_{1,1}| = 2 > 1^{2/3} \cdot 6^{1/3} = r_1(A)^\alpha r_1(A^T)^{1-\alpha},$$

$$|a_{2,2}| = 3 > 2^{2/3} \cdot 3^{1/3} = r_2(A)^\alpha r_2(A^T)^{1-\alpha},$$

$$|a_{3,3}| = 3 > 4^{2/3} \cdot 1^{1/3} = r_3(A)^\alpha r_3(A^T)^{1-\alpha},$$

$$|a_{4,4}| = 3 > 4^{2/3} \cdot 1^{1/3} = r_4(A)^\alpha r_4(A^T)^{1-\alpha}.$$

Data matrica je Nekrasov matrica, pa je time Gudkov i S-Gudkov za svaki skup S.

4.1.7 Primer za matricu A_7

$$A_7 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ova matrica nije SDD, nije Ostrovski i nije DZ, što se može zaključiti analognim rasudjivanjem kao u prethodnom primeru (primetimo da su u odnosu na prethodni primer izmenjeni samo dijagonalni elementi $|a_{3,3}|$ i $|a_{4,4}|$, koji su kod matrice A_6 jednaki 3, a kod ove matrice A_7 jednaki su 2. Takodje se, slično kao u prethodnom primeru, lako zaključuje da je ovo S-SDD matrica za $S = \{1, 2\}$. Medjutim, ni za jedno $\alpha \in [0, 1]$ ovo nije $\alpha 2$ matrica, jer da bi važio uslov

$$|a_{4,4}| = 2 > 4^\alpha \cdot 1^{1-\alpha} = r_4(A)^\alpha r_4(A^T)^{1-\alpha},$$

očigledno mora biti $\alpha < 1/2$. Medjutim, tada je

$$r_1(A)^\alpha r_1(A^T)^{1-\alpha} = 1^\alpha \cdot 6^{1-\alpha} > 6^{1/2},$$

pa uslov $|a_{1,1}| = 2 > r_1(A)^\alpha r_1(A^T)^{1-\alpha}$ ne važi.

Kako ni za jednu permutaciju PA_7P^T nije Nekrasov matrica, A_7 nije Gudkov matrica. Medjutim, proverom se može utvrditi da je A_7, za izbor skupa $S = \{12\}$, S-Nekrasov matrica, pa je time i S-Gutkov matrica.

4.1.8 Primer za matricu A_8

$$A_8 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ova matrica nije S-SDD ni za jedno S, koje je neprazan pravi podskup skupa indeksa N. Naime, iz definicije sledi da ako je A S-SDD matrica, onda je ona i $\overline{S}$-SDD matrica, kao i da su podmatrice $A[S]$ i $A[\overline{S}]$ obe SDD matrice. Stoga, za izbore $S = \{1\}$, $S = \{1,3\}$, $S = \{1,4\}$, $S = \{1,2,3\}$, $S = \{1,2,4\}$, $S = \{1,3,4\}$, matrica sigurno ne može biti S-SDD, pa ostaje samo da prokomentarišemo izbor $S = \{1,2\}$. Medjutim, tada uslov

$$(|a_{1,1}| - r_1^S)(|a_{4,4}| - r_4^{\overline{S}}) = (5-4)(5-0) > 1 \cdot 10 = r_4^S r_1^{\overline{S}}$$

nije zadovoljen, pa ni za takvo S matrica nije S-SDD. Ona, medjutim, jeste iz klase $\alpha 2$, i to za $\alpha = 1/2$, što se lako proverava:

$$|a_{1,1}| = 5 > 14^{1/2} \cdot 1^{1/2} = r_1(A)^\alpha r_1(A^T)^{1-\alpha},$$

$$|a_{2,2}| = 5 > 5^{1/2} \cdot 4^{1/2} = r_2(A)^\alpha r_2(A^T)^{1-\alpha},$$

$$|a_{3,3}| = 5 > 4^{1/2} \cdot 5^{1/2} = r_3(A)^\alpha r_3(A^T)^{1-\alpha},$$

$$|a_{4,4}| = 5 > 1^{1/2} \cdot 14^{1/2} = r_4(A)^\alpha r_4(A^T)^{1-\alpha}.$$

Ova matrica jeste Gudkov matrica jer je za permutaciju

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ispunjen uslov $|(PA_8P^T)_{ii}| > h_i(PA_8P^T)$, gde je $i = 1,2,3,4$.

Kako je matrica A_5 Gudkova, time je i S-Gutkova za svako izbor skupa S.

4.1.9 Primer za matricu A_9

$$A_9 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ova matrica nije S-SDD ni za jedno S, koje je neprazan pravi podskup skupa indeksa N, jer, kako god birali podskup S, ne mogu obe podmatrice $A[S]$ i $A[\overline{S}]$ istovremeno biti SDD matrice, što je neophodan uslov za matricu A da bude S-SDD. Takodje, ova matrica nije ni iz klase $\alpha 2$, jer kako god birali $\alpha \in [0,1]$, uslov

$$|a_{3,3}| = 5 > 5 = 5^{\alpha} \cdot 5^{1-\alpha} = r_3(A)^{\alpha} r_3(A^T)^{1-\alpha}$$

nije zadovoljen. Nije Nekrasov matrica pa nije ni Gudkov matrica jer za prvu vrstu važi $h_1 = 15 > 5 = |a_{11}|$. Ipak, ovo je H-matrica, jer postoji regularna dijagonalna matrica $X = diag(4, 1, 1, 0.9)$, takva da je AX SDD-matrica:

$$A_9 X = \begin{bmatrix} 20 & 5 & 5 & 4.5 \\ 0 & 5 & 0 & 4.5 \\ 0 & 0 & 5 & 4.5 \\ 4 & 0 & 0 & 4.5 \end{bmatrix}.$$

Matrica je, pored toga, i Gudkova i S-Gudkova, iz istih razloga kao i prethodna.

4.1.10 Primer za matricu A_{10}

Matrica

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 9 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

nije SDD, ni Ostrovski, ni S-SDD matrica za bilo koji skup indeksa S. Ova matrica nije ni matrica Gudkova. Medjutim, jeste S-Gudkov matrica za izbor skupa $S = \{2, 3\}$.

Primetimo da ova matrica nije $\alpha 2$-matrica jer istovremeno treba da važi

$$|a_{1,1}| = 5 > 4^{\alpha} \cdot 11^{1-\alpha} = r_3(A)^{\alpha} r_3(A^T)^{1-\alpha},$$

i

$$|a_{3,3}| = 5 > 8^{\alpha} \cdot 2^{1-\alpha} = r_3(A)^{\alpha} r_3(A^T)^{1-\alpha},$$

što je nemoguće.

4.1.11 Primer za matricu A_{11}

Matrica

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 7 & 10 & 5 \\ 7 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

je $\alpha 2$-matrica, jer su neophodni uslovi ispunjeni za $\alpha = 0.7$. Medjutim, ova matrica nije S-Gutkova, ni za jedno S, pa time nije ni SDD, ni Ostrovski, ni DZ, ni S-SDD, ni Gudkov matrica

4.1.12 Primer za matricu A_{12}

Poznato je da je neophodan uslov da matrica bude H-matrica, da ima bar jednu SDD vrstu (i bar jednu SDD kolonu). Stoga, na primer, matrica

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

nije H-matrica, pa samim tim nije ni iz jedne od potklasa H-matrica.

5 ZAKLJUČAK

U ovom radu napravili smo pregled poznatih potklasa klase H-matrica koje su se pokazale kao veoma korisne, kako u samoj teoriji matrica, tako i u drugim oblastima matematike i njenih primena. Pri tome smo naveli tvrdjenja i formirali primere koji rasvetljavaju odnose izmedju navedenih klasa, što je posebno značajno sa stanovišta konkretne primene ovih rezultata u teorijskom smislu, kao i ispitivanja da li je konkretna data matrica H-matrica ili ne.

Sadržaj ovog rada, time, predstavlja polazišnu tačku za dalja, dublja istraživanja na temu H-matrica i njenih primena.

Literatura

[1] Alanelli, M., Hadjidimos, A.: *On iterative criteria for H- and non-H-matrices* (2007) Applied Mathematics and Computation 188(1), pp. 19-30.

[2] Alanelli, M., Hadjidimos, A.: *A new iterative criterion for H-matrices* (2006) SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 29(1), pp. 160-176.

[3] Bru., R., Cvetković, L., Kostić, V. and Pedroche, F. Characterization of Alpha1 and Alpha2-matrices. Central European Journal of Mathematics, 8(1), pp. 32-40, 2010.

[4] Cvetković, Lj.: *Convergence theory for relaxation methods to solve systems of equations*, MB-5 PAMM, Tehnical University of Budapest, 1998.

[5] Cvetković, Lj.: *H-matrix theory vs. eigenvalue localization* Numer. Algor. 42 (2006), 229-245.

[6] Cvetković, Lj., Kostić, V., Varga, R.: *A new Geršgorin-type inclusion area*, ETNA 18 (2004), 73-80.

[7] Cvetković, Lj., Kostić, V.: *New criteria for identifying H-matrices*, J. Comput. Appl. Math. 180 (2005), 265-278.

[8] Cvetković, Lj., Kostić, V.: *Between Geršgorin and minimal Geršgorin set*, J. Comput. Appl. Math. 196 (2006), 452-458.

[9] Cvetković, Lj., Kostić, V.: *New subclasses of block H-matrices with applications to parallel decomposition-type relaxation methods.*, Numerical Algorithms 42, 3-4 (2006), 325334.

[10] Bru, R., Cvetković, Lj., Kostić, V., Pedroche, F., *Sums of ?-strictly diagonally dominant matrices.* Linear and Multilinear Algebra 58(1) (2010), 7578.

[11] Cvetković, Lj., Kostić, V., Rauski, S.: *A new subclass of H-matrices*, Applied Math. and Computations 208 (2009), 206-210.

[12] Cvetković, Lj., Bru, R., Kostić, V., Pedroche, F., A simple generalization of Gersgorin's theorem. Advances in Computational Mathematics (in print). DOI 10.1007/s10444-009-9143-6

[13] Dashnic, L.S., Zusmanovich, M.S.: *O nekotoryh kriteriyah regulyarnosti matric i lokalizacii ih spektra*, Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. 5 (1970), 1092-1097.

[14] Dashnic, L.S., Zusmanovich, M.S.: *K voprosu o lokalizacii harakteristicheskih chisel mattricy*,Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. 10,6 (1970), 1321-1327.

[15] Gan, T.B., Huang, T.Z.: *Simple criteria for nonsingular H-matrices*, Linear Algebra Appl. 374 (2003), 317-326.

[16] Gao, Y.M., Xiao, H.W.: *Criteria for generalized diagonally dominant matrices and M-matrices*, Linear Algebra Appl. 169 (1992), 257-268.

[17] He, A., Liu, J.: *A new non-parametar criterion for H-matrices* (2008), Computers and Mathematics with Applications, 55(6), pp. 1148-1153.

[18] Huang, T.Z.: *A note on generalized diagonally dominant matrices*,Linear Algebra Appl. 225 (1995), 237-242.

[19] Huang, T.Z.: *Iterative algorithm criterion for H-matrices* (2004), International Journal of Computer Mathematics 81(2), pp. 251-257.

[20] Huang, T.Z., Zhang, X.-Q.: *An improved iterative algorithm for generalized diagonally dominant matrices* (2006), Applied Mathematics and Computation 181(1), pp. 742-746.

[21] Huang, T.Z., Li, C.: *An iterative algorithm for searching a scalling matrix for diagonally dominance* (2005), Applied Mathematics and Computation 164(3), pp. 821-828.

[22] Huang, T.Z., Leng, J.S., Wachspress, E.L., Tang, Y.Y.: *Characterization of H-matrices* (2004), Computers and Mathematics with Applications, 48(6), pp. 1587-1601.

[23] Kohno, T., Niki, H., Sawami, H., Gao, Y.M.: *An iterative test for H-matrix* (2000), Journal of Computational and Applied Mathematics 115(1-2), pp. 349-355.

[24] Li, B., Tsatsomeros, M.J.: *Doubly diagonally dominant matrices*, Linear Algebra Appl. 261 (1997), 221-235.

[25] Li, B., Li, L., Harada, M., Niki, H., Tsatsomeros, M.J.: *An iterative criterion for H-matrices*, Linear Algebra Appl. 271 (1998), 179-190.

[26] Li, L.: *On the iterative criterion for generalized diagonally dominant matrices* (2003), SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 24(1), pp. 17-24.

[27] Liu, J., He, A.: *An interleave iterative criterion for H-matrices* (2007), Applied Mathematics and Computation 186(1), pp. 727-734.

[28] Liu, J., He, A.: *A new algorithmic characterization of H-matrices* (2006), Applied Mathematics and Computation 183(1), pp. 603-609.

[29] Ojiro, K., Niki, H., Usui, M.: *A new criterion for the H-matrix property* (2003), Journal of Computational and Applied Mathematics 150(2), pp. 293-302.

[30] Ostrowski, A.M.: *Uber die Determinanten mit uberwiegender Hauptidiagonale*, Comment. Math. Helv. 10 (1937), 69-96.

[31] Plemmons, R.J., Berman, A.: *Nonnegative matrices in mathematical sciences*, SIAM Press, Philadelphia, 1994.

[32] Spiteri, P.: *A new characterization of M-matrices and H-matrices* (2003) BIT Numerical Mathematics 43(5), pp. 1019-1032.

[33] Varga, R.: *Geršgorin and his circles*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 36, 2004.

[34] Xie, Q., He, A., Liu, J.: *On the iterative method for H-matrices* (2007), Applied Mathematics and Computation 189(1), pp. 41-48.

[35] Kolotilina, L.Yu.: *Bounds for the inverses of PM i PH matrices*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 165, No 5, 2010.