



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У
НОВОМ САДУ



Лидиа Јунгер

Математички модели у дискретној томографији

МАСТЕР РАД

Нови Сад, 2015



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ • ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:	
Идентификациони број, ИБР:	
Тип документације, ТД:	Монографска документација
Тип записа, ТЗ:	Текстуални штампани материјал
Врста рада, ВР:	Дипломски мастер рад
Аутор, АУ:	Лидиа Јунгер
Ментор, МН:	Др Тибор Лукић, доцент
Наслов рада, НР:	Математички модели у дискретној томографији
Језик публикације, ЈП:	српски
Језик извода, ЈИ:	српски
Земља публикаовања, ЗП:	Р Србија
Уже географско подручје, УГП:	Војводина, Србија
Година, ГО:	2015
Издавач, ИЗ:	Ауторски репринт
Место и адреса, МА:	Трг Доситеја Обрадовића 6, 21000 Нови Сад
Физички опис рада, ФО: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	
Научна област, НО:	Примењена математика
Научна дисциплина, НД:	Рачунарска обрада слике
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	примењена математика, дискретна томографија, оптимизациони поступци
УДК	
Чува се, ЧУ:	У библиотеци ФТН-а
Важна напомена, ВН:	
Извод, ИЗ:	У овом дипломском мастер раду дат је опис дискретне томографије. Размотрени су реконструкциони модели који се користе у дискретној томографији. Дат је преглед оптимизационих поступака који се могу применити у реконструкционим моделима. Представљена је кратка анализа перформанси посматраних метода за реконструкцију слика.
Датум прихватања теме, ДП:	
Датум одбране, ДО:	
Чланови комисије, КО:	Председник: Др Биљана Михаиловић, ванредни професор
	Члан: Др Петар Ђапић, доцент
	Члан, ментор: Др Тибор Лукић, доцент
	Потпис ментора



UNIVERSITY OF NOVI SAD • FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES
21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :			
Identification number, INO :			
Document type, DT :	Monografical documentation		
Type of record, TR :	Textual printed material		
Contents code, CC :	Master thesis		
Author, AU :	Lidia Junger		
Mentor, MN :	Dr Tibor Lukić, docent		
Title, TI :	Mathematical models in discrete tomography		
Language of text, LT :	serbian		
Language of abstract, LA :	serbian		
Country of publication, CP :	Serbia		
Locality of publication, LP :	Vojvodina, Novi Sad		
Publication year, PY :	2015		
Publisher, PB :	Author's reprint		
Publication place, PP :	Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad		
Physical description, PD : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)			
Scientific field, SF :	Applied mathematics		
Scientific discipline, SD :	Computer imaging		
Subject/Key words, S/KW :	applied mathematics, discrete tomography, optimization methods		
UC			
Holding data, HD :	In the library of Faculty of Technical Sciences		
Note, N :			
Abstract, AB :	In this thesis an overview of discrete tomography is given. Recontraction models used in discrete tomography are considerd. A review of optimizion methods used in recontraction models is given. A short analysis of performance for given reconstruction methods is presented.		
Accepted by the Scientific Board on, ASB :			
Defended on, DE :			
Defended Board, DB :	President:	Dr Biljana Mihailović, Associate Professor	
	Member:	Dr Petra Đapić, Docent	Mentor's sign
	Member, Mentor:	Dr Tibor Lukić, Docent	

	УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ • ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА 21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6	Број:
	ЗАДАТАК ЗА МАСТЕР РАД	Датум:

(Податке уноси предметни наставник - ментор)

СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ:	Математика у техници
РУКОВОДИЛАЦ СТУДИЈСКОГ ПРОГРАМА:	Др Јованка Пантовић, ред. проф.

Студент:	Лидиа Јунгер	Број индекса:	B1 1/2012
Област:	Примењена математика		
Ментор:	Др Тибор Лукић, доцент		
НА ОСНОВУ ПОДНЕТЕ ПРИЈАВЕ, ПРИЛОЖЕНЕ ДОКУМЕНТАЦИЈЕ И ОДРЕДБИ СТАТУТА ФАКУЛТЕТА ИЗДАЈЕ СЕ ЗАДАТАК ЗА МАСТЕР РАД, СА СЛЕДЕЋИМ ЕЛЕМЕНТИМА: - проблем – тема рада; - начин решавања проблема и начин практичне провере резултата рада, ако је таква провера			

НАСЛОВ МАСТЕР РАДА:

Математички модели у дискретној томографији

ТЕКСТ ЗАДАТКА:

Задатак студента у оквиру овог мастер рада је да се упозна са актуелним научним резултатима из области дискретне томографије. Задатак, пре свега, подразумева проучавање одговарајуће научне литературе. Очекује се да у оквиру мастер рада буде анализиран реконструкциони проблем дискретне томографије на основу пројективних података. Мастер рад треба да садржи неколико најзначајнијих предложених поступака за решење овог проблема. Задатак подразумева и анализу и поређење перформанси посматраних метода за реконструкцију слика. У закључку се очекује да студент да преглед отворених проблема из посматране области, као и да у великим цртама изложи своје идеје и виђење даљег развоја истраживања на пољу дискретне томографије.

Руководилац студијског програма:	Ментор рада:
Др Јованка Пантовић, ред. проф.	Др Тибор Лукић, доцент

Примерак за: o - Студента; o - Ментора
--

Sadržaj

1	Uvod	2
2	Diskretna tomografija	4
2.1	Nastanak i razvoj diskretne tomografije	4
2.2	Rekonstrukcioni problem diskretne tomografije	5
3	Rekonstrukcioni postupci	10
3.1	Algebarsko rekonstrukciona tehnika (ART)	10
3.2	Energo-minimizacioni postupci	15
3.2.1	Problem najmanjih kvadrata	16
3.2.2	Regularizacioni problem	20
3.2.3	Minimizacija regularizacionih problema	21
3.3	Regularizovani postupci u diskretnoj tomografiji	22
3.3.1	Konveksno-konkavna regularizacija	23
3.3.2	Simulated Annealing	24
3.3.3	DC algoritam	25
4	Optimizacioni postupci	28
4.1	Optimizacioni problem	28
4.1.1	Primer problema optimizacije	29
4.2	Gradijentni postupci	30
4.2.1	Opšti <i>line search</i> algoritam	30
4.2.2	Metoda najbržeg pada	31
4.2.3	Pravac najbržeg pada	32
5	Zaključak	36
	Bibliografija	38

Oznake

- $\mathbb{N}$ - skup prirodnih brojeva;
- $\mathbb{R}$ - skup realnih brojeva;
- $\mathbb{R}^n$ - skup uređenih n -torki realnih brojeva, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$;
- $\mathbb{R}^{n \times n}$ - skup realnih matrica formata $n \times n$;
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ - skalarni proizvod dva vektora,
 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$;
- $\|\cdot\|$ - Euklidska norma; $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;

Za realnu funkciju $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$:

f je *Lipšic neprekidna* na nekom podskupu $D \subset \Omega$ ako postoji konstanta $L > 0$ takva da važi $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, za svako $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$;

- f_x - parcijalni izvod f po x -u, $\frac{\partial f}{\partial x}$;
- ∇ - operator gradijenta, $\nabla f = [\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}]^T$;
- CT - Kompjuterska tomografija;
- DT - Diskretna tomografija;
- BT - Binarna tomografija;
- ART - Algebarska rekonstrukciona tehnika;
- DART - Diskretna algebarska rekonstrukciona tehnika;
- SA - Simulated Annealing;
- DC - Difference of Convex functions.

Glava 1

Uvod

U svakodnevnom govoru reč *slika* nas asocira na umetničko delo, sliku na TV ekranu, na fotografiju... Za poznavaoca digitalne obrade slike njeno značenje, na prvom mestu, je jasno i precizno, i predstavlja skup brojeanih podataka koje treba što bolje predstaviti i eventualno dalje obraditi.

Digitalana obrada slike je oblast primenjene matematike koja se bavi obradom digitalnih slika primenom različitih matematičkih modela.

U digitalnoj obradi slike pojam *digitalna slika* ima preciznu definiciju: *digitalna slika* predstavlja dvodimenzionalnu funkciju $f(x, y)$, gde su x i y ravanske koordinate i mogu uzimati samo konačne diskretne vrednosti. Vrednost funkcije f predstavlja intenzitet, odnosno nivo sivog u datoj tački koji, opet, može imati samo konačnu i diskretnu vrednost.

Iz same definicije digitalne slike možemo zaključiti da se ona sastoji od konačnog broja elemenata pri čemu je svaki element prostorno određen svojim koordinatama (x, y) i ima svoju vrednost $f(x, y)$. Ti elementi su osnovni elementi digitalne slike i nazivaju se *pikseli*. Sam interval iz kog funkcija uzima vrednosti naziva se *siva skala* (*gray scale*). Diskretizacija prostornih koordinata slike naziva se uzorkovanje ili eng. *sampling*, a diskretizacija intenziteta slike naziva se kvantizacija, eng. *quantization*.

U savremenom svetu ne postoji sfera ljudskog života u kojoj digitalna obrada slike nije našla svoje mesto. Digitalne slike se obrađuju iz zabave kada koristimo digitalne fotoaparate i kamere, ali isto tako imaju široku primenu u industriji, astronomiji, mikroskopiji, biologiji, medicini, itd.

U ovom radu naša pažnja je fokusirana na diskretnu tomografiju, koja predstavlja pod oblast digitalne obrade slike, koja se bavi rekonstrukcijom digitalnih slika na osnovu projekivnih podataka.

U savremenoj medicinskoj dijagnostici veoma značajno mesto zauzimaju CT (*computerized tomography*) skeneri (slika 1.1) koji na osnovu dvodimenzionalnih snimaka ljudskog tela mogu da daju trodimenzionalni prikaz unu-

trašnjih organa. Princip rada ovih skenera zasnovan je na *tomografskoj rekonstrukciji* slika.



Slika 1.1: CT skener.

Govoreći matematičkim jezikom *tomografija* predstavlja proces rekonstrukcije nepoznate funkcije definisane nad trodimenzionalnim euklidskim prostorom $\mathbb{E}^3$ na osnovu ocena vrednosti integrala nad potprostorima tog prostora koje nazivamo *projekcije*. Ukoliko funkcija f može uzeti samo mali broj diskretnih vrednosti i samo mali broj projekcija je poznat, kompjuterska tomografija se svodi na *diskretnu tomografiju* (DT). Još više ograničen slučaj je slučaj u kom f može uzeti samo vrednosti 0 i 1. Tada se diskretna tomografija naziva *binarna tomografija* (BT).

Rad je organizovan na sledeći način. Dat je kratak opis nastanka diskretne tomografije kao i njen rekonstrukcioni problem (Glava 2). Razmotreno je nekoliko rekonstrukcionih postupaka koji se koriste u diskretnoj tomografiji (Glava 3). Opisani su optimizacioni postupci koji se koriste u rekonstrukcionim modelima DT (Glava 4). Na kraju rada (Glava 5) je data kratka analiza i poređenje performansi posmatranih metoda.

Glava 2

Diskretna tomografija

2.1 Nastanak i razvoj diskretne tomografije

Začeci diskretne tomografije javili su se mnogo pre nego što je njihova praktična primena bila moguća. Pojava računara bila je uslov za efikasniju obradu podataka i njenu praktičnu primenu. 1946. godine se u Japanu konstruiše prvi rendgen aparat za rotacionu tomografiju, a godine 1979. engleski fizičar Godfrey Newbold Hounsfield i američki matematičar Alan Mac Cormack dobijaju Nobelovu nagradu za konstrukciju prvog aparata za kompjutersku tomografiju (CT skener). Nakon toga ovi aparati se usavršavaju velikom brzinom, a danas predstavljaju najsavršeniju neinvazivnu i preciznu metodu za pregled ljudskog tela.

Kao što smo već rekli, diskretna tomografija podrazumeva da su podaci koji se koriste u njenim metodama konačni i diskretni. Zbog toga su i brojni problemi današnje diskretne tomografije najpre bili razmatrani kao kombinatorni. Tako je, na primer, američki matematičar H. J. Ryser 1957. godine [1] prvi otkrio potreban i dovoljan uslov da vertikalna i horizontalna projekcija obezbeđuju potpunu rekonstrukciju nekog diskretnog skupa (binarne slike, matrice). U svom dokazu opisao je i rekonstrukcioni algoritam koji predstavlja prvi algoritam za rekonstrukciju diskretnog skupa iz svoje dve ortogonalne projekcije. Ipak, sam pojam diskretne tomografije koja, u najvećem delu, predstavlja zasebnu oblast matematike, uveden je na "Mini simpozijumu diskretne tomografije" koji je održan na Rudžers Univerzitetu u Sjedinjenim Američkim Državama 1994 godine. Zahvaljujući razvoju računara, diskretna tomografija i njene metode se široko primenjuju u različitim sferama. Ovde spadaju primene u medicini (CT, PET-CT (*Positron emission tomography - computed tomography*)), prirodnim naukama, bezbedonosnim postupcima (skeniranje prtljaga na aerodromima), arheologiji i industrijskim procesima.

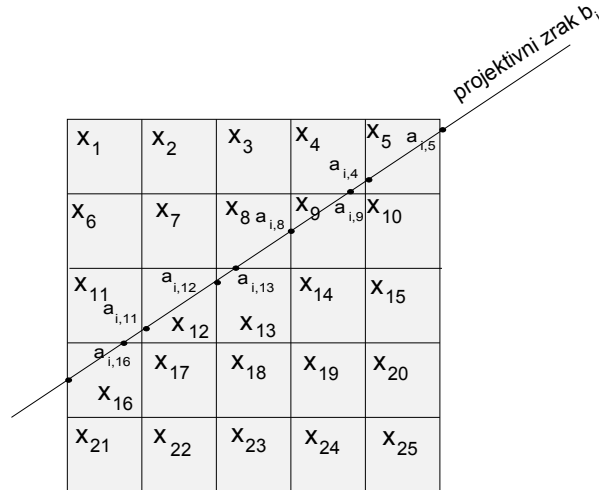
2.2 Rekonstrukcioni problem diskretne tomografije

Da bismo opisali glavne probleme diskretne tomografije i neke od metoda njihovog rešavanja, najpre ćemo dati nekoliko matematičkih formulacija i definicija. Glavni problem diskretne tomografije je problem rekonstrukcije koji se može predstaviti pomoću sistema linearnih jednačina.

Posmatrajmo sistem linearnih jednačina:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, A \in \mathbb{R}^{M \times N}, \mathbf{x} \in \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}^N, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^M, \quad (2.1)$$

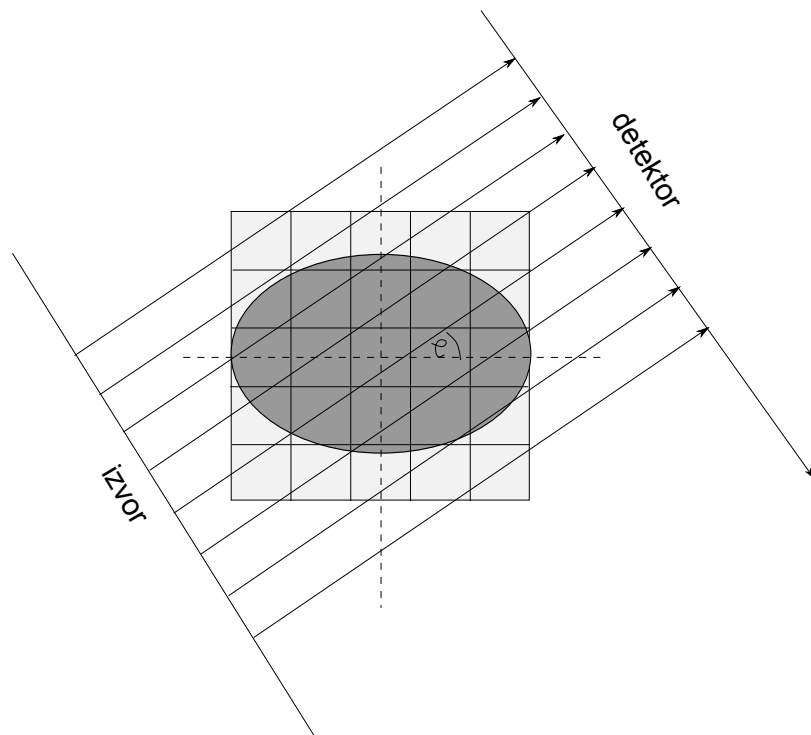
$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$ sadrži datih $k \geq 2$ sivih nivoa piksela. Matrica A se naziva *projekciona matrica* i svaka njena vrsta je određena jednim projektivnim zrakom. Odgovarajuće komponente vektora $\mathbf{b}$ sadrže projektovane vrednosti, dok vektor $\mathbf{x}$ predstavlja nepoznatu sliku koju treba rekonstruisati.



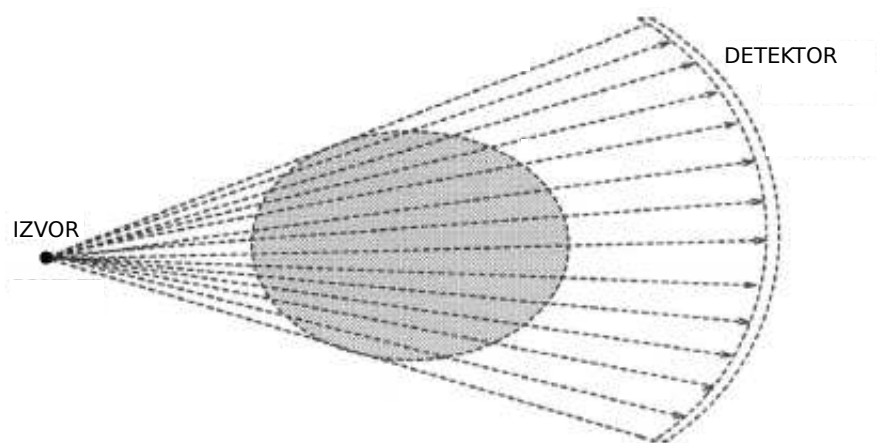
Slika 2.1: Vrednost projekcije b_i slike dimenzije $N = 5 \times 5$ izračunava se kao:
 $b_i = a_{i,4} \cdot x_4 + a_{i,5} \cdot x_5 + a_{i,8} \cdot x_8 + \dots + a_{i,16} \cdot x_{16}$

Komponente vektora $\mathbf{x}$ mogu uzeti vrednosti iz skupa sivih vrednosti $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$. U matrici A , svaki element i -te vrste predstavlja dužinu preseka projektivnog zraka i ivice piksela kroz koji projektivni zrak prolazi. Grafički prikaz primera izračunavanja jedne vrste $a_{i, \cdot}$ matrice A i vrednosti projekcije b_i dat je na slici 2.1.

U ovoj master tezi razmatraćemo samo DT probleme rekonstrukcije u kojima se vektor $\mathbf{b}$ u jednačini (2.1) dobija iz paralelnih projektivnih zraka. Napomenimo da postoje i drugi načini odabira projektivnog zraka, kao na

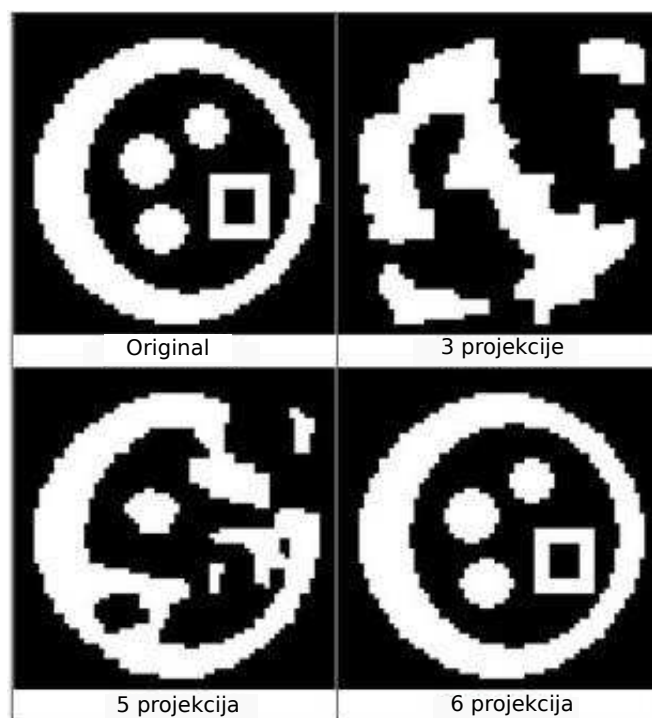


Slika 2.2: Paralelni zraci projekcije. Pravac projekcije određen je uglom φ i može se menjati rotacijom sistema izvor-detektor



Slika 2.3: Lepezasta projektivna metoda.

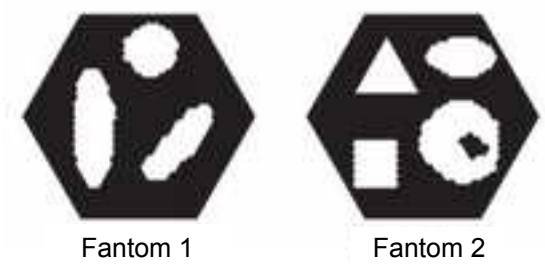
primer "lepažasta projektivna metoda" (*fan beam projection*)(slika 2.3) ali oni izlaze iz okvira ove teze. Primer paralelnih projektivnih zraka prikazan je na slici 2.2. Broj projektivnih zraka koji se razmatraju može da varira, ali je najčešće jednak broju vrsta ili kolona slike.



Slika 2.4: Rekonstrukcija slike u binarnoj tomografiji. Slika je preuzeta iz [22].

Primer rekonstrukcije slike u binarnoj tomografiji dat je na slici 2.4. Originalna (fantom) slika je rekonstruisana od projekcija iz različitih uglova. Svaka projekcija predstavlja skup paralelnih projektivnih zrakova određenih uglom projekcije. Jasno je da je povećanjem broja projekcija rekonstrukcija kvalitetnija. Međutim, u stvarnim aplikacijama broj projekcija je limitiran i obično mali. Kao posledicu imamo da je sistem (2.1) neodređen ($M < N$) i nema jedinstveno rešenje. U takvim slučajevima rekonstrukcija dobrog ili prihvatljivog rešenja je zahtevan problem. Ovo nas dovodi do jednog od glavnih problema diskretne tomografije: kako obezbediti rekonstrukciju zadovoljavajućeg kvaliteta od što manjeg broja projekcija? Postoje nekoliko metoda rekonstrukcije DT. U nastavku teze opisaćemo neke od njih.

Osim klasične, kvadratne mreže za rekonstrukciju slike u diskretnoj tomografiji mogu se koristiti i nekonvencionalne mreže kao što su trougaona



Slika 2.6: Slike originala. Slika je preuzeta iz [14].

3				
	PE=277 (6.83%)	PE=2 (0.05%)	PE=657 (16.20%)	PE=386 (9.52%)
6				
	PE=2 (0.05%)	PE=0 (0%)	PE=4 (0.10%)	PE=0 (0%)
Proj.	SA-T	SPG-T	SA-T	SPG-T
	Fantom 1		Fantom 2	

Slika 2.7: Rekonstrukcije fantom originala (2.6) od 3 i 6 projekcija, pomoću različitih algoritama. Ispod slike rekonstrukcija su slike koje pokazuju razlike između originala i rekonstruisanih slika. PE pokazuje broj pogrešno rekonstruisanih piksela. Slika je preuzeta iz [14].

Glava 3

Rekonstrukcioni postupci

3.1 Algebarsko rekonstrukciona tehnika (ART)

ART je predložio Herman Gabor 1971. godine [2]. ART predstavlja prvu rekonstrukcionu metodu za problem tomografije, koja je primenljiva i na modernim računarima.

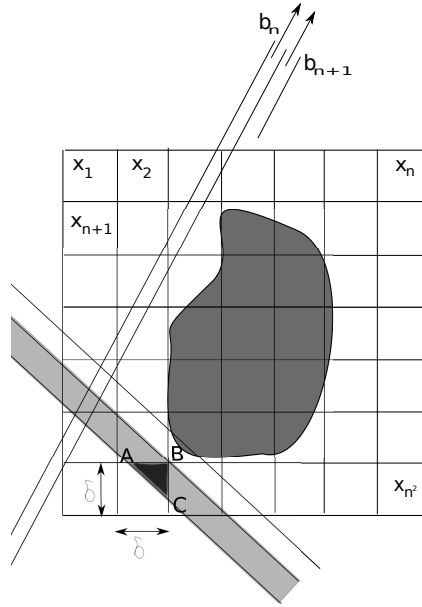
Neka je posmatrana digitalna slika predstavljena kvadratnom šemom, kao što je prikazano na slici 3.1. Intenziteti piksela su označeni promenljivama x_i , $i = 1, \dots, n^2$ gde je n^2 broj piksela ($N = n^2$). Neka je b_i suma vrednosti duž projekativnog zraka merena i -tim projekivnim zrakom, kao što je to prikazano na slici 3.1. Veza između projekivnih vrednosti i intenziteta piksela se može prikazati na sledeći način:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, M \iff Ax = b \quad (3.1)$$

gde je M ukupan broj projekivnih zrakova a a_{ij} je težinski faktor (koeficijent) koji predstavlja doprinos j -og piksela na i -tu projekciju. Koeficijent a_{ij} je jednak površini preseka j -tog piksela i i -tog projekivnog zraka. Većina koeficijenata a_{ij} ima vrednost 0 (mali broj piksela doprinosi sumi vrednosti duž projekivnog zraka).

Sistem (3.1) ima jedinstveno rešenje samo u slučaju kada je $M = N$. U praksi N može dostići veličinu od 65.000 piksela (za sliku rezolucija 256×256). Za ovakve M i N veličina matrice u (3.1) će biti 65.000×65.000 . Zbog velikog broja promenljivih x_i , sistem spada u probleme velikih dimenzija.

U nastavku, opisaćemo numerički postupak za rešavanje (3.1) predložen u ART postupku. Napominjemo, da je ovaj način rešavanja linearnog sistema dobrim delom zasnovan na rezultatima Tanabe-a [4] i Kaczmarz-a [3].



Slika 3.1: U algebarskim metodama mreža je postavljena na nepoznatu sliku.

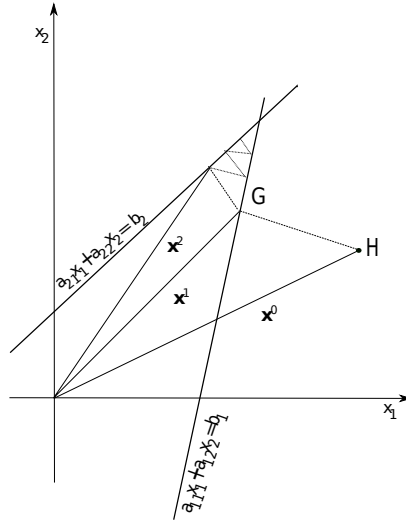
Zapisaćemo sistem (3.1) u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N &= b_2 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N &= b_M.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

U prostoru svaka od ovih jednačina predstavlja hiperravan. Kada jedinstveno rešenje jednačina postoji, presek hiperravni je jedna tačka koja je upravo to rešenje. Ova ideja je ilustrovana na slici 3.2, gde je radi lakšeg razumevanja predstavljen slučaj od 2 nepoznate (x_1, x_2) koje zadovoljavaju sledeći sistem:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2.
 \end{aligned}$$

Rešenje se nalazi tako što se krene od početne pretpostavke rešenja (početne iteracije) koja se prvo projektuje na prvu pravu pa se dobijena tačka reprojektuje na drugu pravu, pa tako dobijena tačka ponovu na prvu pravu i tako dalje. Ako jedinstveno rešenje postoji, ovako dobijen iterativni niz će uvek konvergirati ka rešenju x^* .



Slika 3.2: Rešenje algebarskih jednačina u slučaju od dve nepoznate.

Za kompjutersku implementaciju ove metode prvo polazimo od početne pretpostavke rešenja. Ovu pretpostavku rešenja obeležimo sa $\mathbf{x}^0$ (na slici 3.2 je $\mathbf{x}^0$ vektor položaja tačke H) u N dimenzionalnom prostoru. Početno rešenje se projektuje na hiperravan predstavljenu sa prvom jednačinom u (3.2), kao što je to ilustrovano na slici 3.3. Ta projekcija daje $\mathbf{x}^1$ koje se zatim projektuje na hiperravan predstavljenu drugom jednačinom u (3.2), i tako dobijamo $\mathbf{x}^2$. Rešenje $\mathbf{x}^{i-1}$ se projektuje na hiperravan predstavljenu i -tom jednačinom i daje rešenje $\mathbf{x}^i$. Gore naveden proces se matematički može opisati sa:

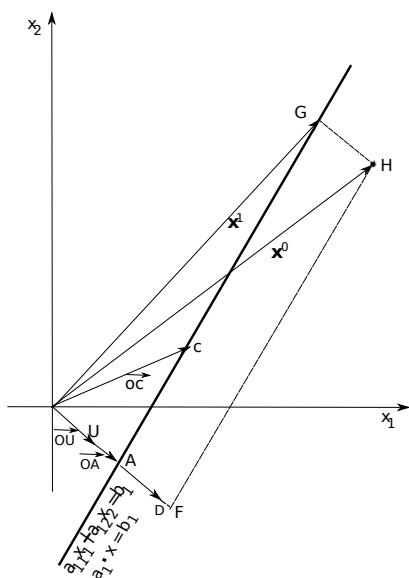
$$\mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i-1} - \frac{(\mathbf{x}^{i-1} \cdot \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)}{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i} \cdot \mathbf{a}_i, \quad (3.3)$$

gde je vektor $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN})$. Da bismo videli kako se dobija (3.3) napišemo prvu jednačinu iz (3.2) u obliku proizvoda:

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_1.$$

Hiperravan predstavljena ovom jednačinom je normalna na vektor $\mathbf{a}_1$ kao što je prikazano na slici 3.3, gde vektor $\vec{OD}$ predstavlja $\mathbf{a}_1$. Ovo znači da je projekcija vektora $\vec{OC}$ (za bilo koje C na hiperravni) na vektor $\mathbf{a}_1$ konstantne dužine. Jedinični vektor $\vec{OU}$ duž $\mathbf{a}_1$ je dat sa:

$$\vec{OU} = \frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}}. \quad (3.4)$$



A ortogonalno odstojanje hiperravni od koordinatnog početka, koje je jednako dužini $\vec{OA}$ je dato sa $\vec{OC} \cdot \vec{OU}$:

Da bi dobili $\mathbf{x}^1$ moramo oduzeti od $\mathbf{x}^0$ vektor $\vec{HG}$ ($\mathbf{x}^0$ je vektor položaja tačke H kao što je to prikazano na slici 3.3):

gde je dužina vektora $\vec{HG}$ data sa:

Kada zamenimo (3.4) i (3.5) u (3.7) dobijamo da je:

Pošto je pravac vektora $\vec{HG}$ isti kao pravac jediničnog vektora $\vec{OU}$, možemo napisati:

$$\vec{GH} = |\vec{GH}|\vec{OU} = \frac{\mathbf{x}^0 \cdot \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1} \cdot \mathbf{a}_1. \quad (3.8)$$

Zamenom (3.8) u (3.6) dobijamo iterativno pravilo (3.3) u slučaju kada je $i = 1$:

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 - \frac{\mathbf{x}^0 \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1}{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1} \cdot \mathbf{a}_1.$$

Ponavljajući gore opisani postupak, dolazimo do opšteg pravila (3.3).

Kao što je već gore navedeno, postupak izračunavanja za algebarsku rekonstrukciju se sastoji od uzastopne projekcije početne iteracije na hiperravni predstavljene jednačinama iz (3.2) konačno dajući M -tu iteraciju, $\mathbf{x}^M$. U sledećoj iteraciji, $\mathbf{x}^M$ se projektuje na hiperravan predstavljenu prvom jednačinom iz sistema (3.2) i zatim uzastopno na ostale hiperravni predstavljene u jednačinama (3.2) da bi dobili $\mathbf{x}^{2M}$. Postupak se nastavlja analogno za određivanje $\mathbf{x}^{3M}$, i $\mathbf{x}^{kM}$ uopšte. Tanabe [4] je pokazao da ako postoji jedinstveno rešenje $\mathbf{x}^s$ sistema jednačina (3.2) tada:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{kM} = \mathbf{x}^s. \quad (3.9)$$

U rekonstrukciji slike nije redak slučaj da sistem bude predeterminisan u prisustvu šuma. Tj. da je $M > N$ u (3.2) i $b_1, b_2, \dots, b_m$ budu iskvareni zbog šuma. Ne postoji jedinstveno rešenje za ovakav slučaj, rešenje ne konvergira do jedinstvene tačke, ali oscilira u blizini preseka hiperravni. Kada je $M < N$ jedinstveno rešenje za sistem linearnih jednačina (3.2) ne postoji, jer je sistem neodređen. Tada postoji beskonačno mnogo rešenja.

U primeni koja zahteva veliki broj "pogleda" i kada su rekonstrukcije velikih dimenzija, poteškoće sa upotrebom metoda na bazi iterativnog pravila (3.3) su u velikom broju izračunavanja i brzini pristupa koeficijentima a_{ij} . Na primer, za rekonstrukcije slike veličine 100×100 sa 100 projekcija i 150 projekivnih zraka u svakoj projekciji ukupan broj koeficijenata a_{ij} je 10^8 , što je ogroman broj i može biti problematično u aplikacijama za koje je brza rekonstrukcija važna.

Da bi se zaobišle poteškoće računanja koeficijenata, bezbroj modifikacija iterativnog pravila (3.3) je predloženo. Da bi razmotrili neke od tih aproksimacija, prvo ćemo (3.3) zapisati u drugom obliku:

$$x_j^i = x_j^{i-1} + \frac{b_i - q_i}{\sum_{k=1}^N a_{ik}^2} a_{ij},$$

gde je

$$\begin{aligned} q_i &= \mathbf{x}^{i-1} \cdot \mathbf{a}_i \\ &= \sum_{k=1}^N x_k^{i-1} a_{ik}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ove jednačine znače da kada projektujemo rešenje $(i - 1)$ na i -tu hiperravan (i -tu jednačinu u (3.2)) nivo sivila j -tog elementa (čija je trenutna vrednost x_j^{i-1}) se dobija korigovanjem trenutne vrednosti za $\nabla x_j^{(i)}$ gde je:

$$\nabla x_j^i = x_j^i - x_j^{i-1} = \frac{b_i - q_i}{\sum_{k=1}^N a_{ik}^2} a_{ij}. \quad (3.11)$$

U nastavku razmatraćemo kompjutersku implementaciju algebarske rekonstrukcione metode (ART). U ART implementaciji koeficienti a_{ik} su jednostavno zamenjeni sa 1 i 0, u zavisnosti da li je sredina k -tog piksela slike u i -tom projektivnom zraku. Ova zamena olakšava implementaciju, jer ova kva odluka može biti doneta u računarskom vremenu rada. U tom slučaju imenilac iz (3.11) je dat sa $\sum_{k=1}^N a_{ik}^2 = N_i$, što je broj piksela slike čiji centar je u i -tom projektivnom zraku. Korekcija j -tog piksela slike iz i -te jednačine (3.2) se može zapisati u obliku,

$$\nabla x_j^{(i)} = \frac{b_i - q_i}{N_i} \quad (3.12)$$

za sve piksele čiji centri su u i -tom projektivnom zraku.

Aproksimacije iz (3.12), iako lake za implementaciju, često imaju negativan uticaj na rekonstrukcionu sliku, posebno ako N_i nije dobra aproksimacija za imenilac. Bolja rekonstrukcija se može dobiti ako se (3.12) zameni sa:

$$\nabla x_j^{(i)} = \frac{b_i}{L_i} - \frac{q_i}{N_i},$$

gde je L_i dužina (normalizovana sa δ , slika 3.1) i -tog projektivnog zraka kroz oblast rekonstrukcije. ART rekonstrukcije obično trpe od "so i biber" šuma, što je prouzrokovano nedoslednošću uvedenom u sistem jednačina aproksimacijama za koeficijente a_{ik} . Rezultat je da su izračunate sume vrednosti duž projektivnog zraka u (3.10) loše aproksimacije za odgovarajuće stvarne sume duž projektivnog zraka. Takva nedoslednost se pogoršava sa činjenicom da je svaka jednačina odgovarajuća sa zrakom u projekciji "razmućena", što menja neke piksele tek promenjene prethodnom jednačinom u istoj projekciji. Relaksacijama je moguće ublažiti ove šumove. Dobijena poboljšanja u kvalitetu rekonstrukcija su obično na račun konvergencije.

3.2 Energo-minimizacioni postupci

Energo-minimizacioni postupci su široko korišćeni u oblasti obrade slike, posebno poslednje dve decenije. Osnovna ideja je da se problem formuliše

kao minimizacioni model (problem)

$$\arg\{\min_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x})\},$$

gde je E energetska funkcija cilja, a x funkcija koja predstavlja sliku. Pojam *energo* dolazi iz fizičke analogije, gde uopšteno možemo reći da je posmatrani sistem stabilan ako mu je totalna energija minimalna.

U svakom energo minimizacionom postupku moramo zadovoljiti dva važna kriterijuma. Prvi se odnosi na dizajniranje funkcije energije, tj. dizajniranje modela. Model mora dovoljno odgovarati posmatranom realnom problemu, i njegov minimum (ako je moguće globalni) mora predstavljati najbolje rešenje problema. Drugi kriterijum se odnosi na optimizacioni algoritam koji se koristi za minimizaciju energije. Uopšteno, optimizacioni algoritam mora biti brz i tačan, da bi bio u mogućnosti da nađe dobru aproksimaciju minimuma koristeći postojeća računarska sredstva. Ako ovi kriterijumi nisu zadovoljeni onda postupak može biti značajno slabiji ili potpuno beskoristan za bilo koju primenu.

3.2.1 Problem najmanjih kvadrata

Kvadratna funkcija u n dimenzionalnom prostoru se može zapisati u obliku:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \mathbf{c} \quad (3.13)$$

gde je $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b}$ realan n -vektor a A je $n \times n$ realna matrica iz $\mathbb{R}^n$. Ova funkcija ima važnu ulogu u teoriji optimizacije. Mnoge nekvadratne funkcije mogu biti aproksimirane kvadratnom funkcijom (3.13) u blizini lokalnog minimuma. Upravo zbog toga se optimizacioni postupci razvijeni za minimizaciju (3.13) često primenjuju i za ne-kvadratne funkcije. Kvadratna funkcija f je diferencijabilna za svako $\mathbf{x}$, a gradijent je linearna funkcija data sa:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}A^T \mathbf{x} + \frac{1}{2}A\mathbf{x} - \mathbf{b}.$$

Ako je A simetrična matrica, onda važi:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}.$$

Neka funkcija f ima sve parcijalne izvode drugog reda u tački $\mathbf{x}$. Tada matricu parcijalnih izvoda drugog reda nazivamo *Hessian matrica*:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) \right\} = \nabla^2 f(\mathbf{x})$$

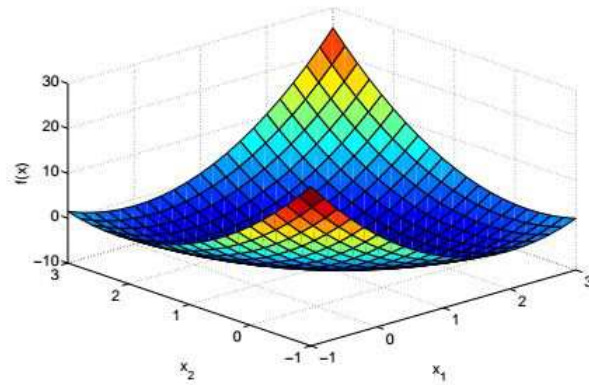
$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Matrica $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ je $n \times n$ dimenzionalna i simetrična matrica.

Hesian preslikavanja f , u slučaju kada je A simetrična matrica, je,

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = A.$$

Najvažnije osobine kvadratne funkcije f su određene osobinama matrice A i prirodom sistema $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$. Konveksnost funkcije f zavisi od definitnosti Hesian matrice, $\nabla^2 f(\mathbf{x})$. Rešenje (ili rešenja) linearnog sistema $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ je (su) ekstremna tačka (tačke) od f .

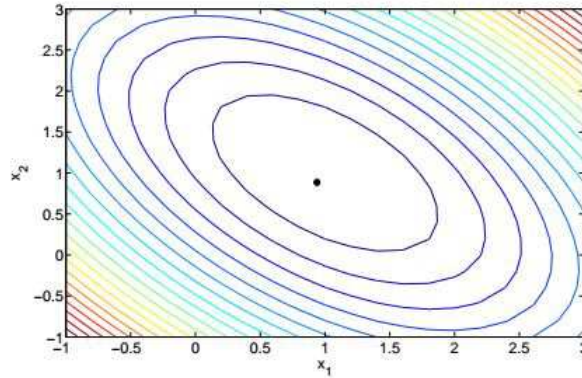


Slika 3.4: Površina definisana kvadratnom funkcijom (3.13). Tačka minimuma je jedinstveno rešenje sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Slika je preuzeta iz [22].

Za matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kažemo da je *pozitivno definitna*, ako za svako $\mathbf{u} \neq 0$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ važi:

$$\mathbf{u}^T A \mathbf{u} > 0. \quad (3.14)$$

U slučaju kada u (3.14) važi $\mathbf{u}^T A \mathbf{u} \geq 0$ onda za matricu A kažemo da je *pozitivno-semidefinitna*. U slučaju kada je A simetrična matrica i pozitivno-definitna, funkcija f je konveksna i ima jedinstveni minimum koji je rešenje



Slika 3.5: Konturne krive kvadratne funkcije predstavljene na slici 3.4. Slika je preuzeta iz [22].

linearnog sistema:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Ovaj slučaj je prikazan na slici 3.4. Na slici 3.5 se vide konturne krive funkcije $f(\mathbf{x})$, odnosno konture definisane sa jednačinom $f(\mathbf{x}) = v$, gde je v konstantno. Za svaku vrednost v postoji odgovarajuća konturna kriva. Kvadratna funkcija nema uvek minimum. Slučaj kada je A simetrična, pozitivno-semidefinitna i sistem $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ je neodređen, tj. ima beskonačno mnogo rešenja je dat na slici 3.6.

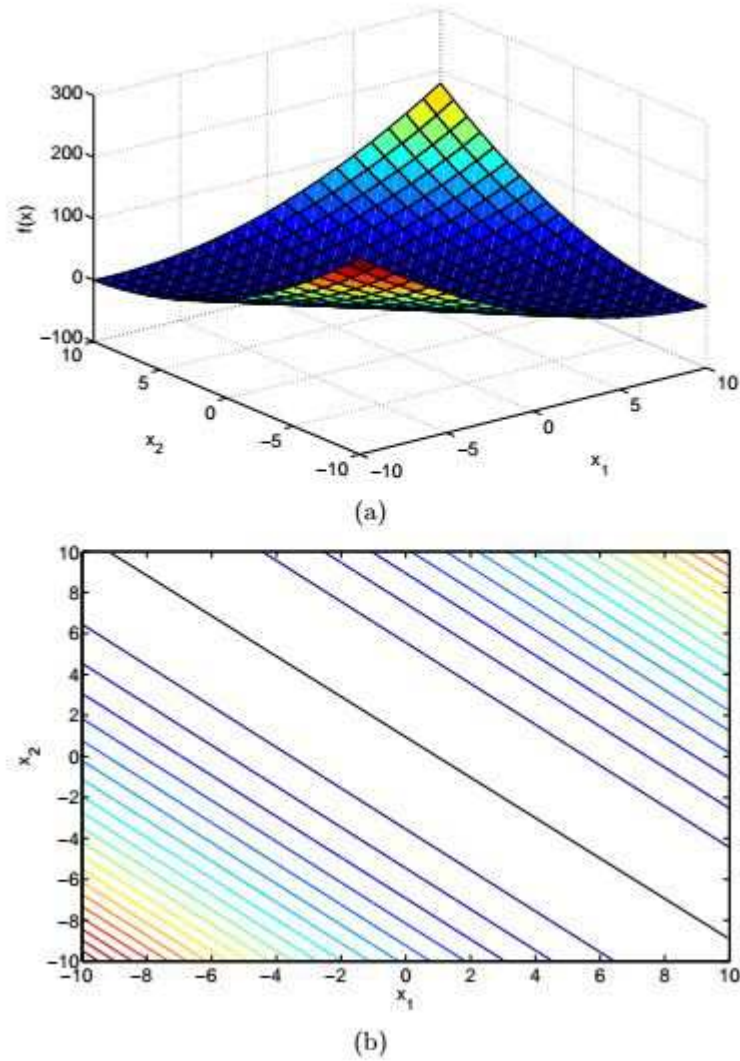
Problem *najmanjih kvadrata* je optimizacioni problem definisan sa:

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2, \quad (3.15)$$

gde je A data matrica (ne mora biti kvadratna), a $\mathbf{b}$ je dat vektor. Funkcija cilja:

$$\frac{1}{2} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \frac{1}{2} ((Ax)_1 - b_1)^2 + \frac{1}{2} ((Ax)_2 - b_2)^2 + \dots + \frac{1}{2} ((Ax)_N - b_N)^2 \quad (3.16)$$

je suma kvadrata grešaka svake linearne jednačine u $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Rešenje problema (3.15) minimizira sumu kvadrata, zato se problem naziva najmanji kvadrati. Funkcija (3.16) je često važan deo funkcije cilja u energo minimizacionim postupcima. Njena uloga u minimizacionim postupku jeste da minimizuje kvadratnu Euklidovu razliku između aproksimacije rešenja i datih podataka. Zbog toga se funkcija često naziva *data fitting izraz*. Postoji veza



Slika 3.6: (a) Površ funkcije f kada je A simetrična, pozitivno-semidefinitna i sistem $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ je neodređen. Ne postoji jedinstveni minimum. (b) Konturne krive površi date u (a). Zadebljana linija predstavlja skup rešenja. Slika je preuzeta iz [22].

između funkcije cilja najmanjih kvadrata (3.16) i kvadratne funkcije (3.13). Naime ciljna funkcija najmanjih kvadrata ima kvadratni oblik.

Za proizvoljnu matricu A , čak iako nije simetrična ni kvadratna, sledeće relacije važe:

1. $(A^T A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T A$
2. $\mathbf{x}^T (A^T A) \mathbf{x} = (A \mathbf{x})^T \cdot (A \mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \neq 0$.

Lako je proveriti da je $\nabla^2 \frac{1}{2} \|A \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = A^T A$. Iz 1. i 2. sledi da je $A^T A$ simetrična i pozitivno-semidefinitna. Sledi da je funkcija $\frac{1}{2} \|A \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ konveksna (ne mora biti svuda strogo konveksna) za svaku matricu A . Ovo znači da problem (3.15) uvek ima globalni minimum, ali ne mora biti jedinstven.

3.2.2 Regularizacioni problem

Definicija dobro postavljenog problema je matematički uvedena od strane Jacques Hadamard (1923) u [5]. Po ovoj definiciji matematički problem je dobro postavljen ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

1. rešenje postoji;
2. rešenje je jedinstveno;
3. problem je stabilan tj. male promene u datim podacima uvek daju male promene u rešenju.

Ako jedan od gore navedenih uslova nije zadovoljen tada je problem loše postavljen. Loše postavljene probleme je mnogo teže rešiti. Tipičan primer loše postavljenog problema je *inverzni problem*. Inverzni problemi uglavnom se sastoje od rekonstrukcije originala. Inverzni problemi kao i uopšteno loše postavljani problemi se teško rešavaju. Da bi se rešili moraju biti preformulisani. Ovo obično zahteva uvođenje dodatnih pretpostavki (ograničenja) obično zasnovanih na *a priori* informacijama o rešenju. Ovaj proces se naziva *regularizacija*. Prvi put je uvedena od strane Tikhonova (1963) [6]. U zadnje dve decenije regularizacioni postupci su se znatno unapredili. Za bolje razumevanje posmatrajmo sledeći jednostavan primer optimizacije:

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|A \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 \quad (3.17)$$

gde je $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ neodređen linearni sistem jednačina. Jasno je da problem (3.17) ima beskonačno mnogo rešenja i prema tome nije dobro postavljen problem. Međutim ako pretpostavimo, *a priori* informaciju, da je rešenje

malih dimenzija, možemo regularizovati problem koristeći Tikhonovi tip regularizacije $\|\mathbf{x}\|^2$. Problem je regularizovan na sledeći način:

$$\min_{\mathbf{x}} \left(\frac{\lambda}{2} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 \right) \quad (3.18)$$

gde je $\lambda > 0$ regularizacioni parametar. Za dovoljno malo λ , problem (3.18) je strogo konveksan pa ima jedinstveno rešenje, što znači da je problem postao dobro postavljen. Drugim rečima, regularizacija se koristi da bi se ograničio prostor rešenja i da bi se dobilo rešenje u saglasnosti sa *a priori* informacijama. Uopšteno, upotreba regularizacionih postupaka za minimizaciju funkcije cilja f loše postavljenih problema se svodi na sledeće:

$$\min_{\mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{x})), \quad (3.19)$$

gde je funkcija Ψ pogodan regularizacioni (stabilizacioni) izraz. Osobine izabrane funkcije Ψ će odrediti efekat regularizacije.

3.2.3 Minimizacija regularizacionih problema

Posmatrajmo minimizacioni problem,

$$\min_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x}), \quad (3.20)$$

gde je $E(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{x})$ kao što je navedeno u problemu (3.19).

U glavnom nije moguće naći analitičko rešenje, najviše zbog velikih razmera problema. Zbog toga problem mora biti rešen odgovarajućim optimizacionim pristupom. U optimizacionim postupcima koristi se tzv. data fitting izraz čiji zadatak je da obezbedi slaganje rešenja sa datim podacima. Drugim rečima data fitting izraz je mera korespodencije rešenja sa datim podacima. Kao što smo videli u odeljku 3.2.1 data fitting izraz $\frac{1}{2}\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ je konveksno kvadratna funkcija. Metoda konjugovanih gradijenata je najefikasnija metoda za njenu minimizaciju. Ova metoda nalazi rešenje u najviše N iterativnih koraka. U opštem slučaju Ψ može biti nelinearna, nekonveksna, čak i nediferencijabilna funkcija u nekim tačkama. Ovi faktori mogu učiniti minimizacioni problem (3.20) teško rešivim.

Problem (3.20) predstavlja optimizacioni problem bez ograničenja. Međutim neke aplikacije zahtevaju restrikciju prostora pretrage. Takve aplikacije se mogu upravo naći među ostalima i u diskretnoj tomografiji, gde je prostor pretrage ograničen na diskretni skup. U opštem slučaju regularizacioni problem je dat sa:

$$\min_{x \in \theta} E(\mathbf{x}), \quad (3.21)$$

gde je θ dopustiv skup. Ograničenja predstavljaju dodatni izazov. Jedna mogućnost je da se problem sa ograničenjima prevede u problem bez ograničenja. U tom slučaju ograničenja se preformulišu u novi regularizacioni izraz.

3.3 Regularizovani postupci u diskretnoj tomografiji

U ovom delu ćemo razmatrati tri pristupa za rešavanje regularizovanog problema u diskretnoj tomografiji. Posmatraćemo nedeterministički SA algoritam, *konveksno-konkavnu* regularizaciju, koja omogućuje determinističko rešavanje DT problema i DC (*Difference of Convex Functions*) algoritam.

Posmatrajmo ponovo moguća rešenja za:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, A \in \mathbb{R}^{M \times N}, \mathbf{x} \in \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}^N, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^M.$$

Uobičajen način za ograničenje mogućih rešenja je da se primeni prikladna regularizacija. Često se koristi tzv. glatka regularizacija. Njena primena je bazirana na prethodnom znanju o rešenju. Definicija *glatkog* regularizacionog izraza je data sa:

$$\sum_{i=1}^N \|\nabla(x_i)\|^2,$$

gde je $\nabla(x_i)$ diskretni gradijent u tački x_i . Operator diskretnog gradijenta se računa na sledeći način:

$$\nabla(x_i) = (x_i - x_r, x_i - x_b),$$

gde su x_r i x_b tačka desno i ispod od x_i . Nakon upotrebe ovakve regularizacije na DT regularizacioni problem, dobijamo regularizacioni minimizacioni problem:

$$\min_{\mathbf{x} \in \Lambda^N} E(\mathbf{x}; \lambda) := \frac{1}{2} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^N \|\nabla(x_i)\|^2, \quad (3.22)$$

gde je $\Lambda = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$ a prvi izraz je *kvadratna projekcija greške* tj. data fitting izraz. Formulacija (3.22) pokazuje da DT problem spada u klasu problema sa ograničenjima i da je regularizacijski problem definisan sa (3.21). Parametar $\lambda > 0$ je balansirajući parametar između regularizacionog izraza i data fitting izraza. Za "optimalan" izbor λ , minimimizacija (3.22) obezbeđuje i saglasnost sa datim projekcijskim podacima i kompaktnost rešenja.

3.3.1 Konveksno-konkavna regularizacija

Data fitting izraz, kao i regularizacioni izraz u (3.22) su konveksne funkcije na otvorenom skupu. Međutim, prostor pretrage je ograničen sa diskretnim skupom $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}^N$ i zbog toga u opštem slučaju jedinstvenost rešenja ne može biti garantovana. Iz ugla optimizacije, zbog ovog ograničenja, problem (3.22) je teško rešiv. Da se reši ovaj problem (ali za smo binaran slučaj ($k = 2$)), Schule [11] je predložio konveksno-konkavni regularizacioni pristup. Ovaj pristup se zasniva na poznatoj ekvivalentnosti između binarnih i konveksno ograničenih optimizacionih problema. Rezultat je formulisan u sledećoj Teoremi:

Teorema 1 [12] *Neka je F Lipšicova funkcija na otvorenom skupu $D \supset [0, 1]^n$ i dva puta neprekidno diferencijabilna na $[0, 1]^n$. Tada postoji $\mu_* \in R$ takvo da za sve $\mu > \mu_*$ važi:*

1. *problem celobrojne (binarne) optimizacije*

$$\min_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^n} F(\mathbf{x})$$

je ekvivalentan sa konkavnim minimizacionim problemom

$$\min_{\mathbf{x} \in [0,1]^n} (F(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mu \langle \mathbf{x}, \tau - \mathbf{x} \rangle),$$

gde je vektor $\tau = [1, 1, \dots, 1]^T$;

2. *funkcija $F(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mu \langle \mathbf{x}, \tau - \mathbf{x} \rangle$ je konkavna na $[0, 1]^n$.*

Prema gore navedenoj Teoremi problem (3.22) se može preformulisati na optimizacioni problem sa konveksnim ograničenjem:

$$\min_{\mathbf{x} \in [0,1]^n} (E(\mathbf{x}; \lambda) + \mu \langle \mathbf{x}, \tau - \mathbf{x} \rangle), \mu > 0, \quad (3.23)$$

gde parametar μ reguliše uticaj dodatog konkavnog regularizacionog izraza $\langle \mathbf{x}, \tau - \mathbf{x} \rangle$. Uloga ovog konkavnog izraza u optimizacionom postupku jeste dobijanje binarnog rešenja. Na osnovu konveksnog člana za ravnanje (*smoothing*) i konkavnog člana za binarizaciju ovaj pristup se zove konveksno-konkavna regularizacija. Glavne olakšice preformulisanog problema (3.23) jeste da se može tretirati sa postojećim determinističkim metodama razvijenim za konveksno ograničene probleme.

Za uopštenu DT rekonstrukcioni problem, koji se bavi sa *multi-sivi nivo* rekonstrukcijom slike, gde je $k > 2$, koristi se *diskretna algebarska rekonstrukciona tehnika* (DART) koju su uveli Batenburg i Sijbers [13]. Ova metoda

kombinuje ART metod, koji je modifikovan iterativni metod za rešavanje linearnih sistema i klasični *thresholding* metod. Ograničenja intenziteta piksela u odnosu na dati sivi nivo skup, su postignuta sa thresholding (neprekidnim) rešenjima dobijenim ART metodom. DART metod je jedan od široko primenjenih i aktuelnih metoda za DT.

3.3.2 Simulated Annealing

U proteklih 20 godina nekoliko optimizacionih postupaka se razvilo za rešavanje regularizacionih problema (sa i bez ograničenja). Dizajn ovih metoda najviše zavisi od osobina datog regularizacionog izraza, kao i od prirode date aplikacije. Jedan od značajnijih postupaka je postupak Simulated Annealing (SA) algoritam koji su prvi put uveli Geman i Reynolds 1992. godine [7]. Simulated Annealing je stohastički optimizacioni algoritam. Osnove ovog algoritma potiču iz rada izdatog od Metropolis (1953) [8]. Kasnije Krikpatrick (1982) [9] primenjuje ideju Metropolisovog algoritma na optimizacione probleme i uvodi opšti SA optimizacioni postupak.

Optimizacioni postupak počinje od date (visoke) početne temperature T_0 i početnog rešenja x^0 . Za vreme postupka trenutna iteracija je izmenjena za mali proizvoljni pomak ka blizini rešenja i dobijena razlika u energiji, $\Delta E = E_{novi} - E_{prethodni}$ se računa. Ako je ΔE pozitivna, nova iteracija se prihvata sa Boltzmannovim faktorom verovatnoće [10],

$$e^{-\Delta E/T}. \quad (3.24)$$

Ovaj postupak se ponavlja dovoljan broj puta dok se ne postigne ravnoteža stanja. Kriterijumom za ravnotežu se često posmatra kao izveden dovoljan veliki broj iteracija. Temperatura se tada smanjuje i algoritam se nastavlja na nižoj temperaturi. Smanjena temperatura umanjuje verovatnoću najgorog prihvatljivog rešenja, datog sa (3.24). Ceo postupak se ponavlja dok se smrznuto stanje tj. zaustavni kriterijum ne dostigne. Krajnja temperatura je najčešće 0, $T = 0$. U nastavku je dat opis za SA algoritam.

SA postupak ne zahteva informacije o izvodima posmatrane funkcije. U svakoj iteraciji koristi samo vrednosti funkcije cilja. Zbog toga je fleksibilna u odnosu na dizajniranje ciljne funkcije. Može se pored problema bez ograničenja koristiti i za probleme sa ograničenjima. Mane SA postupaka su dužina procesa i nedovoljno znanje za podešavanje parametara.

Algoritam SA

Ulazni parametri: Početno rešenje x^0 i početna temperatura $T^0 > 0$. $x = x^0; T = T^0;$ **repeat****repeat**Proizvoljan mali pomak od x ka novom pokušaju x^{novo} ;Računanje $\Delta E = f(x^{novo}) - f(x)$;Proizvoljan izbor $q \in U(0, 1)$;**if** $\Delta E > 0$ *ili* $e^{-\Delta E/T} > q$ **then** $x = x^{novo}$, (*promena prihvaćena*);**until** Ravnoteža stanja;Smanjivanje temperature T ;**until** Zaustavni kriterijum;

3.3.3 DC algoritam

DC Algoritam je deterministički optimizacioni metod. Prvi put je predložen od Pham Dinh-a i Hoai An-a [24] za nalaženje rešenja problema konveksnih razlika (Difference of Convex functions (DC) Programming problem.). Uopšteni DC Programming problem je definisan sa:

$$\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}),$$

gde su g i h konveksne funkcije u $\mathbb{R}^n$.Za funkciju $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup (-\infty, \infty)$ *efektivni domen* funkcije p je

$$\text{dom}(p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : p(\mathbf{x}) < +\infty\},$$

konjugovana funkcija od p je

$$p^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - p(\mathbf{x})\},$$

a *subdiferencijal* od p u tački x^* je skup:

$$\partial p(x^*) = \{t : p(x) \geq p(x^*) + \langle t, x - x^* \rangle, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Opšti DC Algoritam (DCA) je definisan sa dva iterativna koraka koji su opisani u sledećoj šemi:

Algoritam DC

- Izaberi proizvoljno $x^0 \in \text{dom}(g)$.
- Za $k = 0, 1, \dots$, računati do konvergencije:

$$y^k \in \partial h(x^k), \quad (3.25)$$

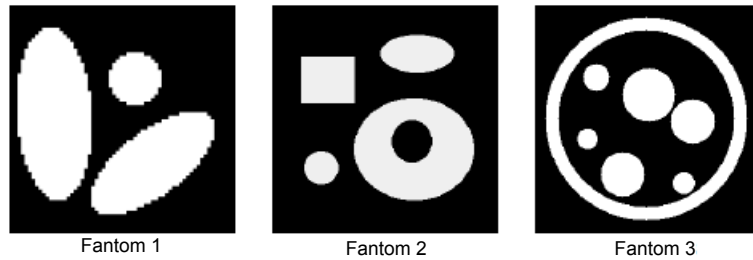
$$x^{k+1} \in \partial g^*(y^k). \quad (3.26)$$

Algoritam proizvodi sekvencu x^k , koja u opštem slučaju konvergira ka lokalnom minimumu posmatrane ciljne funkcije, $g - h$.

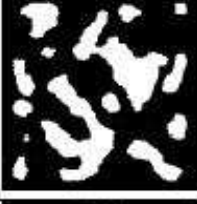
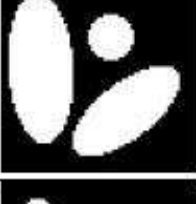
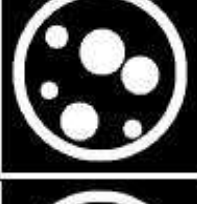
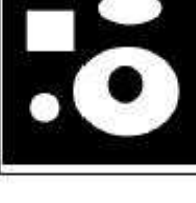
Iz definicije DC problema sledi da ciljna funkcija posmatranog problema minimizacije mora biti napisana kao razlika dve konveksne funkcije, npr $f = g - h$. Funkcija koja zadovoljava ovaj uslov se naziva DC funkcija. Ovakva dekompozicija funkcije cilja utiče na numeričku atraktivnost DC algoritma. Efikasnost računanja iterativnih koraka (3.25) i (3.26) najviše zavisi od osobine funkcija h i g . U nekim dekompozicijama, računanje ovih koraka može predstavljati problem. Ponekad ciljna funkcija ima više dekompozicija. Međutim nalaženje takve dekompozicije koja DC algoritam čini numerički atraktivnim je i dalje otvoreni problem.

Na slikama 3.7 i 3.8 date su originalne slike (fantom) i rekonstrukcije pomoću postupaka baziranih na SA [23] i DC [11].

Na slici 3.8 se vidi da nema znatne razlike između kvaliteta rekonstrukcionih slika pomoću DC i SA metoda.



Slika 3.7: Originalne slike. Slika je preuzeta iz [23].

Projekcije	Algoritam	Fantom 1	Fantom 2	Fantom 3
2	DC			
	SA			
5	DC			
	SA			
6	DC			
	SA			

Slika 3.8: Rekonstrukcije fantoma iz slike 3.7 iz $p = (2, 5, 6)$ projekcija. Slika je preuzeta iz [23].

Glava 4

Optimizacioni postupci

Teorija optimizacije se bavi razvojem modela i metoda kojima se određuju optimalna rešenja nekog posmatranog problema. Da bi se za neko rešenje reklo da je optimalno, mora postojati mera kojom se određuje njegov kvalitet i koja omogućava njegovo poređenje sa drugim mogućim rešenjima. U matematičkom modelu postoji funkcija kojom se svakom rešenju pridružuje odgovarajuća vrednost koja predstavlja njegovu meru kvaliteta. Ta funkcija izražava efikasnost postizanja cilja i naziva se funkcija cilja. Zadatak optimizacije je nalaženje rešenja koje daje ekstremnu vrednost, najveću - zadatak maksimizacije, ili najmanju - zadatak minimizacije. Matematički modeli optimizacije mogu biti bez ili sa ograničenjima. U ovom radu ćemo se baviti problemom nalaženja minimuma u modelima bez ograničenja. Posmatraćemo bezuslovni problem minimizacije,

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

gde je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija cilja. Složenost ovog problema najviše zavisi od osobina ciljne funkcije. Postoji više vrsta algoritama pomoću kojih se mogu rešiti optimizacioni problemi, od kojih ni jedan nije univerzalan. Od vrste problema i osobina ciljne funkcije zavisi metod kojim će se rešavati.

4.1 Optimizacioni problem

Posmatraćemo problem bezuslovne optimizacije:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

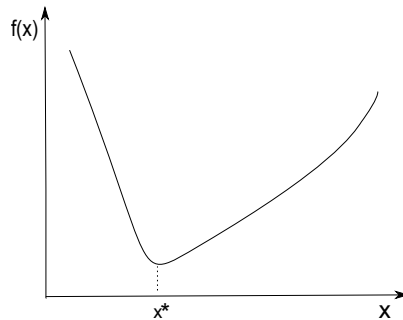
Postavlja se pitanje da li postoji minimum? Da li je on jedinstven? Kakva je osobina funkcije? Najbolja situacija je ako uspemo da nađemo globalni

minimum funkcije f , tj. mesto gde funkcija ima najmanju vrednost uzevši u obzir ceo domen. Globalni minimum je najčešće teško pronaći jer je naše znanje o f obično samo lokalno. Treba imati na umu i da je većina algoritama prikladna za nalaženje samo lokalnih minimuma. Iz svega navedenog čini nam se da je jedini način da otkrijemo da li je $\mathbf{x}^*$ lokalni minimum da ispitamo sve tačke u njegovoj neposrednoj blizini i uverimo se da ni u jednom od tih tačaka funkcija nema manju vrednost. Ako je funkcija f glatka, postoji efikasniji i praktičniji način da nađemo lokalni minimum. Konkretno, ako je f dva puta neprekidno diferencijabilna, možemo reći da je $\mathbf{x}^*$ lokalni minimum ispitujući samo gradijent $\nabla f(\mathbf{x}^*)$. Ukoliko se zna da je funkcija strogo konveksna nad domenom onda je lokalni minimum ujedno i globalni.

4.1.1 Primer problema optimizacije

Problem bezuslovne jednodimenizionalane minimizacije glatke, neprekidne i dva puta diferencijabilne ($\mathbb{C}^2$) funkcije dat je sa:

$$\min_x f(x), \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$



Slika 4.1: Funkcija jedne promenljive sa minimumom u x^*

Za strogi lokalni minimum potrebno je odrediti x^* takvo da za svako x važi: $f(x^*) < f(x)$. Vrednost x^* nalazimo tako da je nagib funkcije 0, odnosno da zadovoljava uslov:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 0.$$

Dalje, u x^* potrebno je da je zadovoljen i sledeći uslov:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} > 0$$

da bi x^* bio strogi lokalni minimum. Ilustracija ovakvog problema data je na slici 4.1.

Najjednostavniji slučaj je kad je funkcija $f(x)$ kvadratna, tj. ima oblik

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}.$$

Minimum će biti za $f'(x) = 0$ tj.,

$$x^* = -\frac{b}{2a} \text{ i pod uslovom da je } f''(x) = a > 0.$$

Kada $f(x)$ ima opštiji oblik, tada ovako jednostavna rešenja, naravno, nisu moguća. U tom slučaju rešenja se traže primenom odgovarajućeg numeričkog postupka. Jedan od često korišćenih algoritama za ovu namenu je *Newton-ov* algoritam [20]. Ako je x^0 data početna aproksimacija rešenja, iterativno računamo:

$$x^{i+1} = x^i - \frac{f'(x^i)}{f''(x^i)}; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Newton-ov postupak ima atraktivnu osobinu da je kvadratno konvergentan [21] u blizini rešenja. Međutim, njegov glavni nedostatak je što u svakoj iteraciji zahteva računanje drugog izvoda.

4.2 Gradijentni postupci

U ovoj glavi posmatraćemo numeričke postupke koji se baziraju na gradijentu ciljne funkcije minimizacionog problema.

4.2.1 Opšti *line search* algoritam

U proteklih 40 godina pojavilo se mnoštvo moćnih *direct search algoritama*. [18]. Ovi algoritmi polaze od date početne procene optimalnog rešenja $\mathbf{x}^0$. Od početne tačke algoritam generiše dalje tačke (korake) $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots$ uzastopnim traženjem. Potrebno je da vrednost ciljne funkcije u novoj iteraciji bude manja nego u predhodnoj iteraciji. Važna podklasa *direct search metoda* je takozvana *line search metoda*. U nastavku ćemo se baviti *line search* algoritmom.

Posmatrajmo sledeći bezuslovni optimizacioni problem:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \tag{4.1}$$

gde je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna. *Line search algoritam* za problem (4.1) generiše iteracije $\mathbf{x}^i$ na sledeći način:

$$\mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i-1} + \lambda_i \mathbf{u}^i,$$

gde je $\mathbf{x}^{i-1}$ aktuelna tačka iteracije, $\mathbf{u}^i$ pravac pretrage, a $\lambda_i > 0$ je dužina koraka. Različiti izbori $\mathbf{u}^i$ i $\lambda_i > 0$ će davati različite *line search metode*. Potrebno je da izvod u pravcu $\mathbf{u}^i$ bude opadajući, tj:

$$\left. \frac{df(\mathbf{x}^{i-1})}{d\lambda} \right|_{\mathbf{u}^i} = \nabla^T f(\mathbf{x}^{i-1}) \mathbf{u}^i < 0. \quad (4.2)$$

Drugi važan korak u svakoj iteraciji je izbor dužine koraka λ_i . Ovde bitnu ulogu ima jednodimenzionalni minimizacioni problem:

$$\min_{\lambda_i} F(\lambda_i) := f(\mathbf{x}^{i-1} + \lambda_i \mathbf{u}^i).$$

Koraci opšteg algoritma *descent* metoda su:

1. Data je početna tačka $\mathbf{x}^0$ i pozitivne tolerancije ε_1 i ε_2 , neka je $i = 1$.
2. Izaberemo opadajući pravac $\mathbf{u}^i$ koji zadovoljava uslov (4.2).
3. Biramo dužinu koraka λ_i .
4. Postavimo $\mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i-1} + \lambda_i \mathbf{u}^i$.
5. Zaustavni kriterijumi:

$$\text{Ako je } \|\nabla f(\mathbf{x}^i)\| < \varepsilon_1 \text{ i/ili } \|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^{i-1}\| < \varepsilon_2.$$

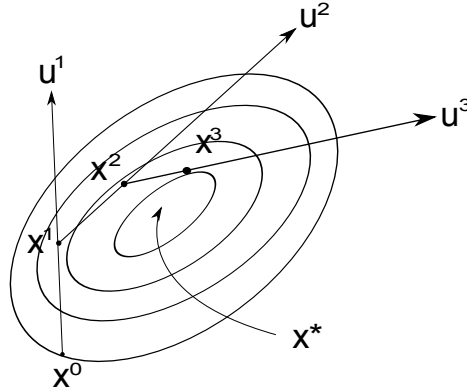
tada je $\mathbf{x}^* \cong \mathbf{x}^i$, inače nastavljamo sa korakom 6.

6. Postavimo $i = i + 1$ i vraćamo se na korak 2.

Različite *line search* metode se razlikuju u načinu biranja pravca $\mathbf{u}^i$ i u načinu biranju koraka λ_i . Struktura navedenog algoritma je data na slici 4.2.

4.2.2 Metoda najbržeg pada

Ova metoda je specijalan slučaj opšteg *line search* algoritma. Pravac pretrage i dužina koraka u svakoj iteraciji se određuju tako da obezbeđuju najveće moguće opadanje vrednosti ciljne funkcije.

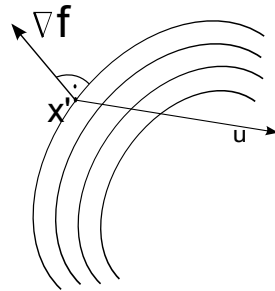
Slika 4.2: Niz *line search* pravaca i koraka

4.2.3 Pravac najbržeg pada

U tački $\mathbf{x}'$ tražimo jedinični vektor $\mathbf{u}$ tako da funkcija $F(\lambda) = f(\mathbf{x}' + \lambda\mathbf{u})$ ima najmanji mogući izvod za $\lambda = 0$. Pretpostavimo da izvod u pravcu ima najmanju vrednost za sve moguće izbore vektora $\mathbf{u}$ u tački $\mathbf{x}'$, tj.

$$\left. \frac{df(\mathbf{x}')}{d\lambda} \right|_u = \frac{dF(0)}{d\lambda} = \nabla^T f(\mathbf{x}')\mathbf{u} \text{ ima minimalnu vrednost.}$$

Proizvoljan pravac pretrage $\mathbf{u}$ u odnosu na gradijent vektor u tački $\mathbf{x}'$ je dat na slici 4.3.

Slika 4.3: Proizvoljan pravac pretrage $\mathbf{u}$ u odnosu na gradijent vektor u tački $\mathbf{x}'$

Koristeći Švarcovu nejednakost ($|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$) i činjenicu da je $\mathbf{u}$ jedinični vektor, traženu najmanju vrednost m možemo izraziti kao:

$$\nabla^T f(\mathbf{x}')\mathbf{u} \geq -\|\nabla f(\mathbf{x}')\|\|\mathbf{u}\| = -\|\nabla f(\mathbf{x}')\| = m.$$

Uvrštavanjem konkretne vrednosti $\mathbf{u} = \frac{-\nabla f(\mathbf{x}')}{\|\nabla f(\mathbf{x}')\|}$ izvod u pravcu $\mathbf{u}$ u tački $\mathbf{x}'$ se jednostavno može izraziti kao:

$$\frac{dF(0)}{d\lambda} = -\nabla^T f(\mathbf{x}') \frac{-\nabla f(\mathbf{x}')}{\|\nabla f(\mathbf{x}')\|} = -\|\nabla f(\mathbf{x}')\| = m.$$

Tako da na ovakav način određen jedinični vektor odgovara pravcu najbržeg pada.

Pravac pretrage

$$\mathbf{u} = \frac{-\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$$

naziva se *normalizovani najbrži pad pravca* u tački $\mathbf{x}$.

Algoritam metode najbržeg pada

Polazeci od date početne iteracije $\mathbf{x}^0$ za iteracije $i = 1, 2, 3, \dots$ koraci algoritma metode najbržeg pada su:

1. Računamo $\mathbf{u}^i = \frac{-\nabla f(\mathbf{x}^{i-1})}{\|\nabla f(\mathbf{x}^{i-1})\|}$.
2. Računamo $\mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i-1} + \lambda_i \mathbf{u}^i$ tako da

$$F(\lambda_i) = f(\mathbf{x}^{i-1} + \lambda_i \mathbf{u}^i) = \min_{\lambda} f(\mathbf{x}^{i-1} + \lambda \mathbf{u}^i).$$

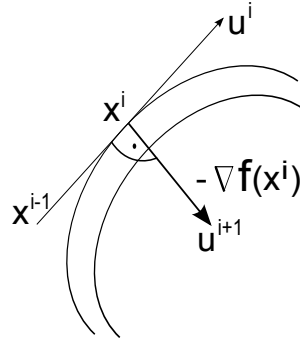
Algoritam se zaustavlja ako je zadovoljen jedan ili oba zustavna kriterijuma:

- $\|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^{i-1}\| < \varepsilon_1$,
- $\|\nabla f(\mathbf{x}^i)\| < \varepsilon_2$ dge su ε_1 i ε_2 pozitivne tolerancije.

Može se pokazati da su uzastopni pravci pretrage ortogonalni. Razmotrimo *line search* kroz tačku $\mathbf{x}^{i-1}$ u pravcu $\mathbf{u}^i$ da bismo dobili $\mathbf{x}^i$. Uslov za minimum u λ_i tj. optimalni pad, je dat sa:

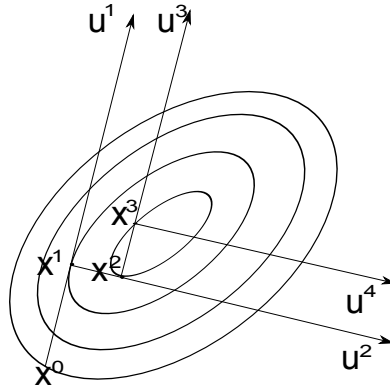
$$\left. \frac{df(\mathbf{x}^{i-1} + \lambda_i \mathbf{u}^i)}{d\lambda} \right|_{\mathbf{u}^i} = \nabla^T f(\mathbf{x}^i) \mathbf{u}^i = 0$$

Pošto je $\mathbf{u}^{i+1} = \frac{-\nabla f(\mathbf{x}^i)}{\|\nabla f(\mathbf{x}^i)\|}$ sledi $\mathbf{u}^{i+1^T} \mathbf{u}^i = 0$. Ova karakteristika prikazana je na slici 4.4.



Slika 4.4: Ortogonalnost uzastopnih pravaca pretrage kod metode najbržeg pada

Metoda najbržeg pada je jedna od jednostavnijih *line search* metoda. Ima široku primenu u problemima minimizacije velikih dimenzija. Međutim ova metoda često rezultuje takozvanim *zig-zag* (slika 4.5) fenomenom, koji čini proces veoma sporim. Iako se teorijski može dokazati da metod konvergira, u praktičnoj primeni efikasna konvergencija se ne postiže u konačnom broju koraka.



Slika 4.5: Ortogonalno *zig-zag* ponašanje metode najbržeg pada

Konačne razlike

Komponente gradijent vektora se često analitički ne mogu izvesti. U tom slučaju se one aproksimiraju sa konačnim razlikama:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \cong \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\delta_j} \cong \frac{f(\mathbf{x} + \delta) - f(\mathbf{x})}{\delta_j} \quad (4.3)$$

gde je $\delta_j = [0, 0, \dots, \delta_j, 0, \dots, 0]^T$, $\delta_j > 0$ na j -tom mestu.

Gradijentni postupci se baziraju na izvodima prvog reda. Ovo svojstvo ih čini atraktivnim za primenu u problemima velikih dimenzija i u slučajevima složene ciljne funkcije. Često se primenjuju u aktuelnim problemima primenjene matematike. Između ostalog primenjuju se kod postupaka kompjuterske tomografije (CT), digitalne obrade slike (otklanjanje šuma, segmentacija, restauracija slika itd) [22], kao i obrade signala uopšte.

Glava 5

Zaključak

Diskretna tomografija se bavi postupcima za kreiranje slika na osnovu projekivnih podataka. U primenama to znači rekonstrukciju slika koje prikazuju unutrašnju oblast/strukturu posmatranog objekta. Najčešće je korišćena u medicini, ali ima primenu i u arheologiji, geofizici, biologiji itd. Moderne tehnike diskretne tomografije su bazirane na različitim matematičkim modelima i oslanjaju se na mogućnosti savremenih računarskih sistema.

U mnogim savremenim oblastima nauke i mnogim savremenim primenama postoji potreba da se slika rekonstruiše iz određenog broja svojih projekcija. Teoretsku mogućnost ovakve rekonstrukcije u slučaju binarne matrice je analizirao H.J. Ryser još 1957. godine [1]. Ipak, praktična primena postaje moguća tek sa razvojem savremenih računara. Sedamdesetih godina XX veka dolazi do ekspanzije postupaka rekonstrukcije tada se javlja prvi skener za kompjutersku tomografiju. Sa razvojem računara i savremenih tehnologija razvijaju se i sve moćniji metodi za rekonstrukciju.

Danas se diskretna tomografija primenjuje u različitim oblastima kao što su humana medicina, nuklearna fizika, industrija (industrijski procesi) i biologija. Takođe je značajna primena u ne erozivnim metodama kod postupaka za konzervaciju i analizu istorijskih i drugih predmeta značajnih za kulturno nasledstvo. Najznačajniji kriterijumi za dobar rekonstrukcioni postupak su: kvalitet rekonstrukcije, brzina rada, osetljivost na prisustvo šuma. U zavisnosti od primene zavisi i koje od navedenih kriterijuma je važno poboljšati. U medicini je bitno da sa što manje zračenja (projekcija) dobijemo što kvalitetniju/precizniju sliku. Dok kod konzervacije istorijskih predmeta je bitno smanjiti pristustvo šuma.

U ovom radu dat je pregled nekoliko rekonstrukcionih metoda u diskretnoj tomografiji. Opisana je ART metoda koja spada u jednu od najstarijih rekonstrukcionih metoda primenljivu na računarima. Takođe su opisani neki od energo-minimizacionih postupaka koji imaju značajnu primenu u poslednjih

20 godina. Opisana je metoda Simulated Annealing i konveksno-konkavna metoda. Kratko je opisana i DC (difference of convex functions) metoda.

Trenutno najaktuelnije metode (state of the art) su metode koje se snažno razvijaju u poslednjih 10 godina, među koje spadaju neke od sledećih. SA - Simulated Annealing [23] je stohastična metoda koja je fleksibila u odnosu na dizajniranje ciljne funkcije. Može se koristiti i za rešavanje problema sa ograničenjima. SPG - *Spectar Projected Gradient optimization* [17] je deterministička metoda. Bazira se na metodi gradijenata za rešavanje optimizacionih problema. DART - Diskretna algebarska rekonstrukciona tehnika [13] je metoda koja kombinuje ART metod i klasični tresholding metod. DC - Difference of Convex functions [11] je deterministička metoda u kojoj se ciljna funkcija mora napisati kao razlika dve konveksne funkcije. Nalaženje takve dekompozicije koja DC algoritam čini numerički atraktivnim je i dalje otvoreni problem.

Na kraju možemo zaključiti da je razvoj novih i usavršavanje već postojećih metoda diskretne tomografije i dalje aktuelan proces. Motivacija, s jedne strane, dolazi iz mogućnosti razvoja novih matematičkih modela, koji se mogu uspešnije primeniti. Sa druge strane, primene u realnim situacijama takođe postavljaju nove zahteve za poboljšanjem metoda diskretne tomografije.

Bibliografija

- [1] H. J. Ryser, Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. *Canad. J. Math.*, 9. pp. 371-377, 1957.
- [2] G. T. Herman, S. Rowland, Resolution in ART: An experimental investigation of the resolving power of an algebraic picture reconstruction. *J. Theor. Biol.*, vol. 33, pp. 213-233, 1971.
- [3] S. Kaczmarz, Angenaherte auflosung von systemen linearer gleichungen. *Bull. Acad. Pol. Sci. Lett. A*, vol. 6-8A, pp. 355-357, 1937.
- [4] K. Tanabe, Projection method for solving a singular system. *Numer. Math.*, vol. 17, pp. 203-214, 1971.
- [5] J. Hadamard, Lectures on Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations. Yale University Press, New Haven, 1923.
- [6] A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin, Solutions of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method. *Soviet Math. Dokl.*, 1986.
- [7] D. Geman, G. Reynolds, Constrained Restoration and Recovery of Discontinuities. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1992.
- [8] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, E. Teller, Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *Journal of Chemical Physics*, 1953.
- [9] S. Krikpatrick, C. Gelatt, M. Vecchi, Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 1983.
- [10] C. Kittel, H. Kroemer, Thermal Physics. Freeman Co., New York, 1980.
- [11] T. Schule, C. Schnörr, S. Weber, J. Hornegger, Discrete Tomography by Convex-concave Regularization and D.C. Programming. *Discrete Appl. Math.*, pp. 229-243, 2005.

- [12] F. Giannessi, F. Niccolucci, Connections Between Nonlinear and Integer Programming problems. *Symposia Mathematica*, pp. 161-176, 1976.
- [13] K. J. Batenburg, J. Sijbers, DART: A Fast Heuristic Algebraic Reconstruction Algorithm for Discrete Tomography. In *Proceeding of International Conference on Image Processing (ICIP)*, pp. 133-136, 2007.
- [14] T. Lukić, B. Nagy, Deterministic Discrete Tomography Reconstruction Method for Images on Triangular Grid. *Pattern Recognition Letters*, Elsevier, Vol. 49, pp. 11-16, 2014.
- [15] T. Lukić, Benedek Nagy, Energy-minimization based Discrete Tomography Reconstruction Method for Images on Triangular Grid. *Proceedings of Combinatorial Image Analysis - 15th International Workshop (IWCIA)*, Austin (TX), USA, LNCS, Vol. 7655, Springer-Verlag, pp. 274-284, 2012.
- [16] E. Moisi, B. Nagy, Discrete tomography on the triangular grid: A memetic approach. *Image and Signal Processing and Analysis (ISPA)*, pp. 579-584, 2011.
- [17] T. Lukić, A. Lukity, A Spectral Projected Gradient Optimization for Binary Tomography. *Computational Intelligence in Engineering, Studies in Computational Intelligence*, Vol. 313, Springer-Verlag, pp. 263-272, 2010.
- [18] J. Snyman, Practical Mathematical Optimization: An Introduction to Basic Optimization Theory and Classical and New Gradient-Based Algorithms. *Springer*, 2005.
- [19] H. Reiner, T. Hoang, Global Optimization. *Springer*, 1996.
- [20] J. Nocedal, S. J. Wright, Numerical optimization. *Springer*, 2000.
- [21] N. Krejić, D. Herceg, Numerička Analiza. *Stylos Art*, 1998.
- [22] T. Lukić, Regularized Problems in Image Processing. Doktorska disertacija, *FTN Novi Sad*, 2011.
- [23] S. Weber, A. Nagy, T. Schüle, C. Schnörr, A. Kuba, A Benchmark Evaluation of Large-Scale Optimization Approaches to Binary Tomography. *Proceedings*, pp. 146-156, 2006.
- [24] T. Pham Dinh, L. T. Hoai An, A D.C. Optimization Algorithm for Solving the Trust-Region Subproblem. *SIAM J. on Optimization*, 1998.

Kratka biografija



Lidia Junger je rođena 25.09.1981. godine u Subotici. Osnovnu školu je završila u Novom Sadu. Gimnaziju " Jovan Jovanović - Zmaj " je završila u Novom Sadu. Prirodno - matematički fakultet, smer diplomirani matematičar je upisala 2000 godine. Diplomirala je 2004. godine.

Radila je kao profesor matematike u srednjoj školi u Budimpešti. Više godina je radila u softverskoj kući *AdviseSoft* kao *System Manager* u Budimpešti.

Trenutno živi u Švajcarskoj. Udata je i majka dvoje dece.