UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
NOVI SAD
Odsek/smer/usmerenje: Matematika u tehnici

DIPLOMSKI - MASTER RAD

Kandidat: Ljubo Nedović
Broj indeksa: 8
Tema rada: Pseudo-operacije i primena u teoriji verovatnoće
Mentor rada: prof. dr Nebojša Ralević

Novi Sad, 2009.

Predgovor

U teoriji matematičke analize, oblast istraživanja raznih operacija na skupu realnih brojeva i intervala realnih brojeva, i na njima zasnovanih mera i integrala je relativno savremena oblast. Danas se intenzivno primenjuje u raznim drugim fundamentalnim, kao i inženjerskim disciplinama.

Teorija neaditivnih mera i na njima zasnovanih integrala je razvijana i primenjivana i u odnosu na operacije realnih projeva koje, za razliku od sabiranja i množenja realnih brojeva imaju neka drugačija svojstva (npr. idempotentnost), te se umesto klasične mere (zasnovane na operaciji sabiranja pozitivnih brojeva), razmatraju skupovne funkcije koje su zasnovane na operacijama kao što je npr. maksimum. Ovaj master-rad se bavi upravo takvim pristupom teoriji mera i integrala, kao i verovatnoćom koja se zasniva na ovakvim merama i integralima.

U atraktivnu teoriju nestandardnih mera uputili su me moj mentor prof. dr Nebojša Ralević i prof. dr Endre Pap, od kojih sam dobio i ideje i veliku pomoć pri istraživanju. Ovom prilikom im se zbog toga posebno zahvaljujem.

Novi Sad, 07.05.2009. Ljubo Nedović

Sadržaj

Oznake

$\mathcal{D}(f)$ - domen funkcije f.

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ - prošireni skup realnih brojeva.

$\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$.

$\overline{\mathbb{R}}^+ = [0, \infty]$.

Γ^{c} - komplement skupa Γ.

χ_A - karakteristična funkcija skupa A.

κ_A - pseudo-karakteristična funkcija skupa A.

I_A - indikator iskaza ili događaja A ($I_A = \begin{cases} 1 & , \quad A \\ 0 & , \quad \rceil A \end{cases}$).

P - verovatnoća.

P_X - verovatnoća generisana slučajnom promenljivom X.

F_X - funkcija raspodele slučajne promenljive X.

φ_X - gustina raspodele slučajne promenljive X.

E - matematičko očekivanje.

D - disperzija.

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} X$ - konvergencija u verovatnoći niza slučajnih promenljivih X_n, $n \in \mathbb{N}$ ka slučajnoj promenljivoj X.

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ - konvergencija u raspodeli niza slučajnih promenljivih X_n, $n \in \mathbb{N}$ ka slučajnoj promenljivoj X.

$\xrightarrow{\mu-a.e.}$ - konvergencija skoro svuda u odnosu na meru μ.

$\xrightarrow{\mu}$ - konvergencija u meri μ.

S_n - suma slučajnih promenljivih $X_1, \ldots, X_n$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

$\hat{S}_n$ - srednja vrednost slučajnih promenljivih $X_1, \ldots, X_n$, $\hat{S}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

$\mathcal{B}_E$ - Borel-ovo σ-polje na topološkom prostoru E.

$\vee$ - maksimum, odnosno supremum ($a \vee b = \max\{a, b\}$).

$\wedge$ - minimum, odnosno infimum ($a \wedge b = \min\{a, b\}$).

Glava 1

Pseudo-analiza

U ovoj glavi su prezentovani pojmovi nekih tipova tzv. pseudo-operacija i poluprstena, kao i njihove osobine. Na ovim strukturama se zasnivaju, između ostalog, pojmovi pseudo-mera i pseudo-integrala, koji dalje imaju razne primene, kao npr. u teoriji verovatnoće, rešavanju diferencijalnih jednačina, fazi-logici, itd.

Postoje razne vrste pseudo-operacija, a u ovom master-radu su prezentovana dva tipa. Prvi tip, prezentovan u sekciji 1.1, su triangularne norme i konorme, koje su definisali Schweizer i Sklar u svojim radovima [ScSk58],[ScSk60],[ScSk83]. Drugi tip, prezentovan u sekciji 1.2, su pseudo-sabiranje i pseudo-množenje na intervalu $[a, b]$ koje je definisao E. Pap u svojim radovima [Pa95],[Pa93].

1.1 Triangularne norme i konorme

U ovom odeljku su date definicije triangularne norme i konorme, koje su uveli Schweizer i Sklar u svojim radovima [ScSk58],[ScSk60],[ScSk83]. Takođe se razmatraju i neke njihove dodatne osobine kao što su neka njihova algebarska svojstva, neprekidnost, Arhimedovsko svojstvo, poredak među triangularnim normama i konormama, kao i uzajamna veza između njih. Dato je i nekoliko važnih primera triangularnih normi i konormi.

1.1.1 Triangularne norme

U ovom odeljku su navedeni definicija i osnovne osobine osobine t-normi. Takođe su dati i neki važni primeri.

Definicija 1.1 *Binarna operacija $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ je* ***triangularna norma****, skraćeno* ***t-norma****, ukoliko za sve $x, z, y \in [0, 1]$ važi:*

(T1) $T(x, y) = T(y, x)$ *(operacija T je komutativna),*

(T2) $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ *(operacija T je asocijativna),* (T3) $y \leq z \;\Rightarrow\; T(x,y) \leq T(x,z)$ *(operacija T je monotona),*

(T4) $T(x,1) = x$ *(granični uslov).*

Sledeća teorema daje osnovne osobine t-normi.

Teorema 1.1 *Za svaku t-normu T važi:*

(a) *Za svako $x \in [0,1]$ važi $T(0,x) = T(x,0) = 0$ i $T(1,x) = T(x,1) = x$ (sve t-norme se poklapaju na rubovima intervala $[0,1]$).*

(b) *Svaka t-norma je monotona po obe komponente:*
$(x_1 \leq x_2 \;\wedge\; y_1 \leq y_2) \;\Rightarrow\; T(x_1,y_1) \leq T(x_2,y_2)$.

(c) *Za sve $x,y \in [0,1]$ važi $T(x,y) \leq x$ i $T(x,y) \leq y$.*

Postoji beskonačno (neprebrojivo) mnogo t-normi, pri čemu su neke specijalne t-norme od posebnog interesa:

(T_M) ***„minimum”*** t-norma:

$T_M(x,y) = \min\{x,y\}$,

(T_P) ***„proizvod”*** t-norma:

$T_P(x,y) = xy$,

(T_L) ***„Lukasiewich-eva”*** t-norma:

$T_L(x,y) = \max\{x+y-1, 0\}$,

(T_D) ***„drastic product”*** t-norma:

$$T_D(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad (x,y) \in [0,1)^2 \\ \min\{x,y\} & , \quad (x,y) \notin [0,1)^2 \end{cases} .$$

☞ Minimum t-norma T_M je jedina idempotentna t-norma (tj. jedina koja zadovoljava uslov $\forall x \in [0,1]$, $T_M(x,x) = x$).

☞ t-orma T_D je jedina koja zadovoljava uslov $\forall x \in [0,1)$, $T(x,x) = 0$.

Na skupu t-normi je od interesa uvesti poredak na uobičajeni način.

Definicija 1.2 *Ako za t-norme T_1 i T_2 važi $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$, tada kažemo da je T_1* ***slabija*** *od T_2, odnosno da je T_2* ***jača*** *od T_1, i pišemo $T_1 \leq T_2$. Ako je $T_1 \leq T_2 \;\wedge\; T_1 \neq T_2$, tada kažemo da je T_1* ***strogo slabija*** *od T_2, odnosno da je T_2* ***strogo jača*** *od T_1, i pišemo $T_1 < T_2$.*

Za navedene t-norme T_M, T_P, T_L, T_D i proizvoljnu t-normu T važi sledeći poredak:

$$T_D \leq T_L \leq T_P \leq T_M \qquad \wedge \qquad T_D < T < T_M .$$

Dakle, T_D je „najslabija”, a T_M je „najjača” t-norma.

Polazeći od proizvoljne komutativne, asocijativne i monotone binarne operacije skupa $A \subseteq [0,1)$, možemo na intervalu $[0,1)$ konstruisati t-normu na sledeći način.

Teorema 1.2 *Neka je $A \subseteq [0,1)$, i neka je $*$ binarna operacija skupa A koja zadovoljava uslove* (T1)-(T3) *i za koju važi $\forall x, y \in A,\ \ x * y \le \min\{x,y\}$. Tada je funkcija $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ definisana sa*

$$T(x,y) = \begin{cases} x * y & , \quad (x,y) \in A \\ \min\{x,y\} & , \quad (x,y) \notin A \end{cases}$$

t-norma.

✎ Zahvaljujući asocijativnosti i tome što je svaka t-norma T slabija od minimum norme T_M, možemo uvesti sledeće oznake, gde je $x_i \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, a I je proizvoljna familija indeksa:

$$\mathop{\mathsf{T}}_{i=1}^{0} x_i \overset{\text{def}}{=} 1, \qquad \mathop{\mathsf{T}}_{i=1}^{n} x_i \overset{\text{def}}{=} T(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} T\left(\mathop{\mathsf{T}}_{i=1}^{n-1} x_i, x_n\right),$$

$$x_T^{(n)} \overset{\text{def}}{=} T(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{n\ puta}),$$

$$\mathop{\mathsf{T}}_{i=1}^{\infty} x_i \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathop{\mathsf{T}}_{i=1}^{n} x_i$$

$$\mathop{\mathsf{T}}_{i\in I} x_i \overset{\text{def}}{=} \inf\left\{ \mathop{\mathsf{T}}_{j=1}^{k} x_{i_j} \ \middle|\ \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\} \text{ je konačan podskup od } \{x_i\}_{i\in I} \right\}$$

Specijalno, za gore navedene t-norme T_M, T_P, T_L, T_D važi

$$T_M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

$$T_P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n,$$

$$T_L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1), 0\right\},$$

$$T_D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_i & , \quad x_j = 1 \text{ za sve } j \ne i \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}.$$

1.1.2 Triangularne konorme

Analogno pojmu t-norme se definiše pojam t-konorme. Takođe su, kao i kod t-normi, od interesa osobine t-konormi, kao i specijalni primeri t-konormi. U ovom odeljku je takođe opisana uzajamna veza između t-normni i t-konormi.

Definicija 1.3 *Binarna operacija $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ je* ***triangularna konorma****, skraćeno* ***t-konorma****, ukoliko ya sve $x, z, y \in [0,1]$ važi:*

(S1) $S(x,y) = S(y,x)$ *(operacija S je komutativna),*

(S2) $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$ *(operacija S je asocijativna),*

(S3) $y \le z \ \Rightarrow\ S(x,y) \le S(x,z)$ *(operacija S je monotona),*

(S4) $S(x,0) = x$ *(granični uslov).*

Kao što vidimo, osobine (S1)-(S3) su iste kao osobine (T1)-(T3) t-normi, a razlika je u graničnom uslovu (S4). Naravno, za t-konorme važe odgovarajuće osobine koje važe za t-norme.

Teorema 1.3 *Za svaku t-konormu S važi:*

(a) *Za svako $x \in [0,1]$ važi $S(1,x) = S(x,1) = 1$ i $S(0,x) = S(x,0) = x$ (sve t-konorme se poklapaju na rubovima intervala $[0,1]$).*

(b) *Svaka t-konorma je monotona po obe komponente:* $(x_1 \leq x_2 \;\wedge\; y_1 \leq y_2) \;\Rightarrow\; S(x_1,y_1) \leq S(x_2,y_2)$.

(c) *Za sve $x, y \in [0,1]$ važi $x \leq S(x,y)$ i $y \leq S(x,y)$.*

Neke specijalne t-konorme:

(S_M) **„maksimum"** t-konorma:

$$S_M(x,y) = \max\{x,y\},$$

(S_P) **„probabilistička suma"**:

$$S_P(x,y) = x + y + xy,$$

(S_L) **„ograničena suma"**:

$$S_L(x,y) = \min\{x+y, 1\},$$

(S_D) **„drastic sum"** t-konorma:

$$S_D(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad (x,y) \in (0,1]^2 \\ \max\{x,y\} & , \quad (x,y) \notin (0,1]^2 \end{cases}.$$

Sledeća teorema uspostavlja „1-1" korespodenciju između t-normi i t-konormi.

Teorema 1.4 *Funkcija $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ je t-konorma ako i samo ako postoji t-norma T takva da za sve $(x,y) \in [0,1]$ važi $S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$.*

✎ Za normu i konormu koje odgovaraju jedna drugoj u smislu prethodne teoreme kažemo da su ***uzajamno dualne***. Tako su, na primer, (T_M, S_M), (T_P, S_P), (T_L, S_L), (T_D, S_D) uzajamno dualni parovi.

Poredak među konormama definišemo na isti način kao i među normama.

Definicija 1.4 *Ako za t-konorme S_1 i S_2 važi $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $S_1(x,y) \leq S_2(x,y)$, tada kažemo da je S_1* ***slabija*** *od S_2, odnosno da je S_2* ***jača*** *od S_1, i pišemo $S_1 \leq S_2$. Ako je $S_1 \leq S_2 \;\wedge\; S_1 \neq S_2$, tada kažemo da je S_1* ***strogo slabija*** *od S_2, odnosno da je S_2* ***strogo jača*** *od S_1, i pišemo $S_1 < S_2$.*

Pri tome važi da ako su (T_1, S_1) i (T_2, S_2) dva para uzajamno dualnih normi, tada je

$$S_1 \leq S_2 \;\Leftrightarrow\; T_1 \geq T_2.$$

Za navedene t-konorme S_M, S_P, S_L, S_D i proizvoljnu t-konormu S važi poredak:

$$S_D \leq S_L \leq S_P \leq S_M \qquad \wedge \qquad S_D < S < S_M.$$

Dakle, slično kao kod t-normi, S_D je „najslabija", a S_M „najjača" t-konorma.

✎ Analogno kao kod t-normi, za t-konormu S možemo uvesti sledeće oznake, gde je $x_i \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, a I je proizvoljna familija indeksa:

$$\mathop{\mathsf{S}}_{i=1}^{0} x_i \stackrel{\text{def}}{=} 0, \qquad \mathop{\mathsf{S}}_{i=1}^{n} x_i \stackrel{\text{def}}{=} S(x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} S\left(\mathop{\mathsf{S}}_{i=1}^{n-1} x_i, x_n\right),$$

$$x_S^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} S(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{n\ puta}),$$

$$\mathop{\mathsf{S}}_{i=1}^{\infty} x_i \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathop{\mathsf{S}}_{i=1}^{n} x_i$$

$$\mathop{\mathsf{S}}_{i\in I} x_i \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{ \mathop{\mathsf{S}}_{j=1}^{k} x_{i_j} \;\middle|\; \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\} \text{ je konačan podskup od } \{x_i\}_{i\in I}\right\}$$

Specijalno, za gore navedene t-konorme T_M, T_P, T_L, T_D važi

$$S_M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

$$S_P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i),$$

$$S_L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i, 1\right\},$$

$$S_D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_i & , \quad x_j = 0 \text{ za sve } j \neq i \\ 1 & , \quad \text{inače} \end{cases}.$$

Pri tome, za uzajamno dualan par norma-konorma (T, S) za $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq [0, 1]$ (gde je I proizvoljan skup indeksa) važi

$$\mathop{\mathsf{S}}_{i\in I} x_i = 1 - \mathop{\mathsf{T}}_{i\in I}(1 - x_i),$$

$$\mathop{\mathsf{T}}_{i\in I} x_i = 1 - \mathop{\mathsf{S}}_{i\in I}(1 - x_i).$$

1.1.3 Neprekidnost triangularnih normi i konormi

t-norme i t-konorme ne moraju biti neprekidne funkcije. Ne moraju biti čak ni Borel-merljive. Tako na primer t-norme i t-konorme T_M, S_M, T_P, S_P, T_L, S_L jesu neprekidne, dok T_D i S_D to nisu. Sledeća teorema daje jedan jednostavan kriterijum za neprekidnost t-normi.

Teorema 1.5 *t-norma T je neprekidna ako i samo ako je neprekidna po svojoj prvoj (drugoj) komponenti, tj. ako je za svako $y_0 \in [0, 1]$ funkcija $T(\cdot, y_0) : [0, 1] \to [0, 1]$, $x \mapsto T(x, y_0)$ je neprekidna.*

Neke od navedenih t-normi i t-konormi su poluneprekidne funkcije.

Definicija 1.5 *Funkcija $F : [0, 1] \to [0, 1]$ je **poluneprekidna odozdo**, odnosno **poluneprekidna odozgo**, ako za svaku tačku $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$ važi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je zadovoljeno*

$$\forall (x, y) \in (x_0 - \delta, x_0] \times (y_0 - \delta, y_0], \quad F(x, y) > F(x_0, y_0) - \varepsilon,$$

odnosno

$$\forall (x, y) \in [x_0, x_0 + \delta) \times [y_0, y_0 + \delta), \quad F(x, y) < F(x_0, y_0) - \varepsilon.$$

✎ Za t- normu T važi da je odozdo (odozgo) poluneprekidna ako i samo ako je njoj odgovarajuća dualna t-konorma S poluneprekidna odozgo (odozdo). Na primer, „drastic product" t-norma T_D je poluneprekidna odozgo, a nije poluneprekidna odozdo. Sledeća teorema daje jedan kriterijum za poluneprekidnost t-normi.

Teorema 1.6 *t-norma T je poluneprekidna odozdo (odnosno poluneprekidna odozgo) ako i samo ako je neprekidna s leva (odnosno neprekidna s desna) po prvoj komponenti (ili drugoj komponenti), tj. ako za svako $y_0 \in [0,1]$ i za svaki niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ važi*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \{T(x_n, y_0)\} = T\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}, y_0\right) \quad \textit{(odnosno } \min_{n\in\mathbb{N}} \{T(x_n, y_0)\} = T\left(\inf_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}, y_0\right)\textit{).}$$

Uvodimo još jednu vrstu neprekidnosti t-normi i t-konormi.

Definicija 1.6 *Za t-normu T, odnosno t-konormu S kažemo da je* ***rubno neprekidna*** *ako je neprekidna na rubu oblasti $[0,1]^2$, tj. na skupu $[0,1]^2 \setminus (0,1)^2$.*

Da bi t-norma T bila rubno neprekidna, dovoljno je da bude neprekidna na „gornjem" rubu ($x = 1$ i $y = 1$), a da bi t-konorma S bila rubno neprekidna, dovoljno je da bude neprekidna na „donjem" rubu ($x = 0$ i $y = 0$).

1.1.4 Elementarna algebarska svojstva t-normi i t-konormi.

U ovom odeljku definišemo neke specijalne elemente za t-normu T, i navodimo neka njihova svostva vezana za t-norme.

Definicija 1.7 *Neka je T neka t-norma.*

(a) *Element $a \in [0,1]$ je* ***idempotentan*** *ako je $T(a,a) = a$.*

(b) *Element $a \in [0,1]$ je* ***nilpotentan*** *ako je postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $a_T^{(n)} = 0$.*

(c) *Element $a \in [0,1]$ je* ***delilac nule*** *ako je postoji $b \in (0,1)$ takvo da je $T(a,b) = 0$.*

Teorema 1.7 *Za proizvoljnu t-normu T važe sledeće osobine.*

(a) *Element $a \in [0,1]$ je idempotentan ako i samo ako za svako $x \in [a,1]$ važi $T(a,x) = \min\{a,x\}$.*

(b) *Ako je T neprekidna t-norma, tada je $a \in [0,1]$ idepotentan element za T ako i samo ako za sve $x \in [0,1]$ važi $T(a,x) = \min\{a,x\}$.*

(c) *Svaki nilpotentan element je delilac nule, a obratno ne važi.*

(d) *Ni jedan element iz $(0,1)$ ne može istovremeno biti idempotentan i nilpotentan.*

(e) *Ako je $a \in (0,1)$ nilpotentan element (odnosno ako je delilac nule), tada je i svako $b \in (0,a)$ nilpotentan element (odnosno delilac nule). To znači da su skupovi nilpotentih elemenata i delilaca nule ili prazan skup ili intervali oblika $(0,c]$ ili $(0,c)$.*

U sledećim teoremama su navedene još neke interesantne osobine t-normi.

Teorema 1.8 *t-norma ima delioca nule ako i samo ako ima nilpotentni element.*

Teorema 1.9 *Neka je t-norma T neprekidna s desna na dijagonali* $\{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}$ *skupa* $[0, 1]^2$*. Tada je $a \in [0, 1]$ idempotentan element za T ako i samo ako postoji* $x \in [0, 1]$ *takvo da je* $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_T^{(n)}$.

Teorema 1.10 *Neka je I skup za koji važi* $\{0, 1\} \subseteq I \subseteq [0, 1]$*. Tada postoji t-norma T čiji je skup idempotentnih elemenata skup I ako i samo ako postoji najviše prebrojiv skup indeksa A i familija po parovima disjunktnih otvorenih podintervala* $\{(a_\alpha, b_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ *od* $[0, 1]$ *tako da važi*

$$\bigcup_{\alpha\in A} (a_\alpha, b_\alpha) \subseteq [0, 1] \setminus I \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} (a_\alpha, b_\alpha] \, .$$

Posledica 1.1 *Neka je t-norma T takva da za svako $a \in [0, 1)$ važi* $\lim\limits_{x\to a^+} T(x, x) = a$*. Tada je skup idempotentnih elemenata t-norme T zatvoren podskup intervala* $[0, 1]$*. Obrnuto ne važi.*

Za t-normu T definišemo još neka svojstva koja ona može imati.

Definicija 1.8

(SM) *T je* ***striktno monotona*** *ako važi*

$$(x > 0 \ \wedge \ y < z) \quad \Rightarrow \quad T(x, y) < T(x, z).$$

(CL) *T zadovoljava* **kancelativni zakon** *ako važi*

$$T(x, y) = T(x, z) \quad \Rightarrow \quad (x = 0 \ \vee \ y = z).$$

(CCL) *T zadovoljava* **uslovni kancelativni zakon** *ako važi*

$$T(x, y) = T(x, z) > 0 \quad \Rightarrow \quad y = z.$$

(AP) *T je* ***Arhimedovska*** *t-norma ako važi*

$$\forall x, y \in (0, 1)\, , \ \exists n \in N, \ x_T^{(n)} < y.$$

(LP) *T ima* ***granično svojstvo*** *ako važi*

$$\forall x \in (0, 1)\, , \ \lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = 0.$$

☞ t-norma T_M nema ni jedno od navedenih svojstava, T_P ima svako od navedenih svojstava, t-norme T_L i T_D imaju svojstva (AP), (CCL) i (LP).

☞ Ako t-norma T ima (CL) svojstvo, tada ima i (CCL) svojstvo.

Za t-norme koje imaju neka od navedenih spucijalnih osobina, važe sledeća tvrđenja.

Teorema 1.11 *Za svaku t-normu T važi:*

(a) *T je striktno monotona ako i samo ako zadovoljava kancelativni zakon* (CL)*;*

(b) *ako je T striktno monotona, tada T ima samo trivijalne idempotentne elemente;*

(c) *ako je T striktno monotona, tada T nema delitelja nule.*

Teorema 1.12 *Za svaku t-normu T su sledeći iskazi ekvivalentni:*

(a) *T je Arhimedovska;*

(b) *T ima granično svojstvo* (LP)*;*

(c) *T ima samo trivijalne idempotentne elemente, i važi*

$$\forall x_0 \in (0,1)\,,\ \exists y_0 \in (x_0,1)\,,\ T(y_0,y_0) = x_0.$$

Izdvajamo još neke specijalne tipove t-normi i još neke važne osobine t-normi.

Definicija 1.9

(a) *Za t-normu kažemo da je* ***striktna*** *ako je neprekidna i striktno monotona.*

(b) *Za t-normu kažemo da je* ***nilpotentna*** *ako je neprekidna i svako $a \in (0,1)$ je njen nilpotentni element.*

☞ t-norma T_P je striktna, a T_L je nilpotentna t-norma.

Teorema 1.13 *t-norma je striktna ako i samo ako je neprekidna i zadovoljava kancelativni zakon* (CL). *Svaka nillpotentna t-norma zadovoljava uslovni kancelativni zakon* (CCL).

Teorema 1.14 *Za proizvoljnu t-normu T važe sledeća tvrđenja.*

(a) *Ako je T neprekidna s desna i ima samo trivijalne idempotentne elemente, tada je T Arhimedovska.*

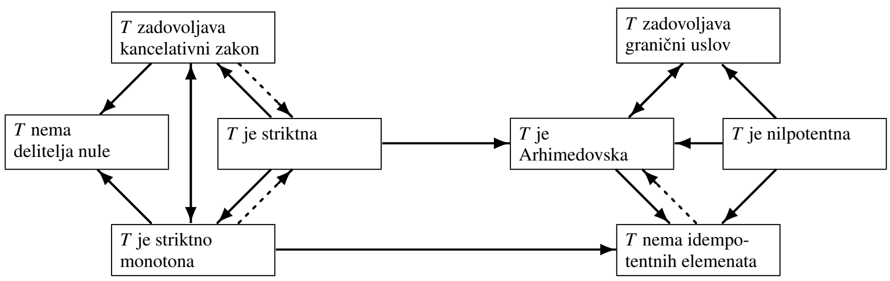
(b) *Ako je T neprekidna s desna i zadovoljava uslovni kancelativni zakon* (CCL)*, tada je T Arhimedovska.*

(c) *Ako za svako $x_0 \in (0,1)$ važi $\lim\limits_{x \to x_0^+} T(x,x) < x_0$, tada je T Arhimedovska.*

(d) *Ako je T striktna, tada je i Arhimedovska.*

(e) *Ako je svako $x \in (0,1)$ nilpotentan element za T, tada je T Arhimedovska.*

Na sledećoj slici je prikazan odnos raznih svojstava t-norme. Obične odnosno duple strelice označavaju da svojstvo A implicira odnosno da je ekvivalentno sa svojstvom B, a isprekidana strelica označava da odgovarajuća implikacija važi za neprekidnu t-normu.



1.1.5 Primeri t-normi

Sledi još nekoliko interesantnih primera t-normi.

Primer 1.1 *„Nilpotentna minimum t-norma T^{nM} je definisana sa*

$$T^{nM}(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x+y \le 1 \\ \min\{x,y\} & , \quad x+y > 1 \end{cases} .$$

Poluneprekidna je odozdo, ali nije poluneprekidna odozgo i nije neprekidna.

Primer 1.2 *Sledeća t-norma je rubno neprekidna, ali nije poluneprekidna s leva.*

$$T(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad (x,y) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)^2 \\ \min\{x,y\} & , \quad (x,y) \notin \left(0, \frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} .$$

Primer 1.3 *Sledeća t-norma je neprekidna u tački* $(0,1)$*, a nije rubno neprekidna.*

$$T(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad (x,y) \in (0,1)^2 \setminus \left[\frac{1}{2}, 1\right)^2 \\ \min\{x,y\} & , \quad (x,y) \notin (0,1)^2 \setminus \left[\frac{1}{2}, 1\right)^2 \end{cases} .$$

Primer 1.4

$$T(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad (x,y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2 \\ 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} & , \quad (x,y) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]^2 \\ \min\{x,y\} & , \quad \textit{inače} \end{cases} .$$

Primer 1.5 *Kod sledeće t-norme je skup nilpotentnih elemenata kao i skup delitelja nule interval* $(0,c)$*, gde je* $c \in \mathbb{R}$*.*

$$T(x,y) = \begin{cases} \max\{0, x+y-c\} & , \quad (x,y) \in [0,c]^2 \\ \min\{x,y\} & , \quad (x,y) \notin [0,c]^2 \end{cases} .$$

1.2 Poluprsten

U ovom odeljku su navedeni neki pojmovi i rezultati vezani za pseudo-sabiranje i pseudo-množenje koje je definisano E. Pap (vidi npr. [Pa95], [Pa93]). Na ovim operacijama je zasnovan pojam tzv. poluprstena, i navedeni su neki važni primeri i osobine ovih operacija i strukture poluprstena. Na strukturi poluprstena se dalje u glavi glavi 2 definišu pojmovi neaditivne mere i pseudo integrala (vidi npr. [Ko96], [MePa99], [Pa90], [Pa95], [Pa02]) koji imaju brojne primene u rešavanju diferencijalnih jednačina, verovatnoći, fazi-kontrolerima itd.

Neka je $[a,b] \subseteq [-\infty, \infty]$ (u nekim situacijama se posmatraju poluzatvoreni intervali), neka su $\oplus$ i $\odot$ binarne operacije na intervalu $[a,b]$, i neka je relacija $\preceq$ linearni poredak na $[a,b]$.

✎ Nadalje će se u tekstu koristiti konvencija $\infty \cdot 0 = 0$.

Definicija 1.10 *Uređena trojka* $([a,b],\oplus,\odot)$ *je* ***poluprsten*** *ukoliko važi:*

(a) *operacija* $\oplus$ *je asocijativna, komutativna, neopadajuća u odnosu na relaciju* $\preceq$ $(\forall x,y,z\in[a,b],\ x\preceq y\ \Rightarrow\ x\oplus z\preceq y\oplus z)$*, i u odnosu na nju postoji neutralni element (tzv.* ***nula****)* $\mathbb{0}$ *(obično je* $\mathbb{0}=a$ *ili* $\mathbb{0}=b$*),*

(b) *operacija* $\odot$ *je asocijativna, komutativna, pozitivno neopadajuća u odnosu na relaciju* $\preceq$ $(\forall x,y,z\in[a,b],\ (x\preceq y\ \wedge\ \mathbb{0}\preceq z)\ \Rightarrow\ x\odot z\preceq y\odot z)$*, i u odnosu na nju postoji neutralni element (tzv.* ***jedinica****)* $\mathbb{1}$*,*

(c) (c.1) $\forall x\in[a,b],\ \mathbb{0}\odot x=\mathbb{0}$*,*

(c.2) *operacija* $\odot$ *je distributivna u odnosu na operaciju* $\oplus$*.*

Operacije $\oplus$ *i* $\odot$ *nazivamo redom* ***pseudo-sabiranje*** *i* ***pseudo-množenje****.*

Postoje tri važna tipa poluprstena.

(I) Operacija $\oplus$ je idempotentna ($\oplus=\sup$ ili $\oplus=\inf$), a operacija $\odot$ to nije.

(Ia) Ako je $\oplus=\sup$, a $\odot$ je proizvoljna operacija na intervalu $[a,b]$ (ili $[a,b)$) koja nije idempotentna, tada je $\mathbb{0}=a$, a relacija $\preceq$ je obična $\leq$. Pri tome je $\mathbb{1}\neq a$. Posebno je važan slučaj kada se pseudo-množenje $\odot$ može predstaviti pomoću tzv. generatora g, tj. neprekidne, striktno rastuće, sirjektivne funkcije $g:[a,b]\to[0,\infty]$ takve da je

$$g(\mathbb{0})=g(a)=0,$$
$$x\odot y=g^{-1}(g(x)\cdot g(y)).$$

(Ib) Ako je $\oplus=\inf$, a $\odot$ je proizvoljna operacija na intervalu $[a,b]$ (ili $(a,b]$) koja nije idempotentna, tada je $\mathbb{0}=b$, a relacija $\preceq$ je obična $\geq$. Pri tome je $\mathbb{1}\neq b$. Posebno je važan slučaj kada se pseudo-množenje $\odot$ može predstaviti pomoću tzv. generatora g, tj. neprekidne, striktno opadajuće, sirjektivne funkcije $g:[a,b]\to[0,\infty]$ takve da je

$$g(\mathbb{0})=g(b)=0,$$
$$x\odot y=g^{-1}(g(x)\cdot g(y)).$$

(II) Obe operacije $\oplus$ i $\odot$ su generisane neprekidnom i striktno monotonom funkcijom (generatorom) g, tj. postoji funkcija $g:[a,b]\to[0,\infty]$ takva da je

$$x\oplus y=g^{-1}(g(x)+g(y)),$$
$$x\odot y=g^{-1}(g(x)\cdot g(y)).$$

U ovom slučaju je $g(\mathbb{0})=0$ i $g(\mathbb{1})=1$.

Poluprsten ovog tipa se naziva ***g-poluprsten***.

(III) Obe operacije $\oplus$ i $\odot$ su idempotentne (tj. $([a,b],\oplus,\odot)=([a,b],\sup,\inf)$ ili $([a,b],\oplus,\odot)=([a,b],\inf,\sup)$).

Što se tiče slučaja (II), na osnovu Aczél-ove teoreme reprezentacije za svaku striktno rastuću binarnu operaciju $\oplus$ postoji striktno monotona, sirjektivna funkcija (generator) $g:[a,b]\to[0,\infty]$ operacije $\oplus$ takva da je $x\oplus y=g^{-1}(g(x)+g(y))$ i $g(\mathbb{0})=0$. Ako je $\mathbb{0}=a$, tada je g rastuća funkcija i važi $g(a)=0$, $g(b)=\infty$, i funkcija g je izomorfizam između $([a,b],\oplus)$ i $([0,\infty],+)$. U slučaju $\mathbb{0}=b$, situacija je obrnuta. Pseudo-množenje definisano sa $x\odot y=g^{-1}(g(x)\cdot g(y))$ je takva operacija da je uređena trojka $([a,b],\oplus,\odot)$ poluprsten.

Primer 1.6 *Slede primeri za svaki od gore pomenutih tipova poluprstena.*

(I) (I.1) *Uređena trojka* $([-\infty, \infty), \sup, +)$ *je poluprsten, pri čemu su u njemu neutralni elementi* $\mathbb{0} = -\infty$, $\mathbb{1} = 0$, *i pseudo-množenje* $\odot$ *je generisano funkcijom* $g(x) = e^x$. *Uz konvenciju* $(-\infty) + (+\infty) = -\infty$ *dobijamo poluprsten* $([-\infty, \infty], \sup, +)$.

Analogno, uređena trojka $((-\infty, \infty], \inf, +)$ *je takođe poluprsten.*

(I.2) *Uređena trojka* $([0, \infty], \sup, \cdot)$, *uz konvenciju* $0 \cdot \infty = 0$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbb{0} = 0$, $\mathbb{1} = 1$.

(II) (II.1) *Za monotono rastući generator* $g : [-\infty, \infty) \to [0, \infty]$, $g(x) = e^x$, *uz konvenciju* $e^{-\infty} = 0$, *dobijaju se na intervalu* $[-\infty, \infty)$ *operacije*

$$x \oplus y = \ln(e^x + e^y) \qquad x \odot y = x + y.$$

Uređena trojka $([-\infty, \infty), \oplus, \odot)$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbb{0} = -\infty$ *i* $\mathbb{1} = 0$.

(II.2) *Za monotono rastući generator* $g : [0, \infty] \to [0, \infty]$, $g(x) = x^2$, *dobijaju se na intervalu* $[0, \infty]$ *operacije*

$$x \oplus y = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x \odot y = x \cdot y.$$

Uređena trojka $([0, \infty], \oplus, \odot)$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbb{0} = 0$ *i* $\mathbb{1} = 1$.

(III)(III.1) *Za* $[a, b] \subseteq [-\infty, \infty]$, *uređena trojka* $([a, b), \sup, \inf)$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbb{0} = a$, $\mathbb{1} = b$, *a relacija* $\preceq$ *je uobičajeni linearni poreak* $\leq$.

(III.2) *Za* $[a, b] \subseteq [-\infty, \infty]$, *uređena trojka* $([a, b), \inf, \sup)$ *je poluprsten, pri čemu je* $\mathbb{0} = b$, $\mathbb{1} = a$, *a relacija* $\preceq$ *je uobičajeni obrnuti linearni poredak* $\geq$.

✎ Zahvaljujući asocijativnosti i komutativnosti operacija $\oplus$ i $\odot$, možemo uvesti sledeće oznake, gde je $x, x_i \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\bigoplus_{i=1}^{0} x_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{0}, \qquad \bigoplus_{i=1}^{n} x_i \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^{n-1} x_i \oplus x_n,$$

$$\bigodot_{i=1}^{0} x_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}, \qquad \bigodot_{i=1}^{n} x_i \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \odot x_2 \odot \ldots \odot x_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigodot_{i=1}^{n-1} x_i \odot x_n,$$

$$nx \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{x \oplus x \oplus \ldots \oplus x}_{n \text{ puta}}, \qquad x^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{x \odot x \odot \ldots \odot x}_{n \text{ puta}},$$

Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten tipa (II) sa generatorom $g : [a, b] \to [0, \infty]$. Kao što je pokazano u radu [MePa99], za $\lambda \in (0, \infty)$ je funkcija g^λ generator za poluprsten $([a, b], \oplus_\lambda, \odot_\lambda)$, gde je

$$x \oplus_\lambda y = \left(g^\lambda\right)^{-1} \left(g^\lambda(x) + g^\lambda(y)\right),$$

$$x \odot_\lambda y = \left(g^\lambda\right)^{-1} \left(g^\lambda(x) \cdot g^\lambda(y)\right) = x \odot y.$$

Stoga je $([a, b], \oplus_\lambda, \odot_\lambda) = ([a, b], \oplus_\lambda, \odot)$.

Naredna teorema, dokazana u [MePa99], pokazuje da se poluprsten tipa (I) može dobiti kao granična vrednost familije g^{λ}-generisanih poluprstenova $([a,b], \oplus_{\lambda}, \odot_{\lambda})$ (pri čemu je $\odot_{\lambda} = \odot$).

Teorema 1.15 *Neka je* $g : [a,b] \to [0,\infty]$ *striktno opadajuća funkcija - generator poluprstena* $([a,b], \oplus, \odot)$ *koji je tipa* (II)*, i neka je* g^{λ} *funkcija* g *na stepen* $\lambda \in (0,\infty)$. *Tada je* g^{λ} *generator poluprstena* $([a,b], \oplus_{\lambda}, \odot)$*, i za svako* $\varepsilon > 0$ *i svako* $(x,y) \in [a,b]^2$ *postoji* λ_0 *takvo da je* $|x \oplus_{\lambda} y - \inf(x,y)| < \varepsilon$ *for all* $\lambda \geq \lambda_0$. *Ako je* g *rastuća funkcija, isti rezultat važi za* sup *umesto* inf.

Na poluprstenu $([a,b], \oplus, \odot)$ je od interesa posmatrati i metriku $d : [a,b]^2 \to [0,\infty]$ koja je kompatibilna sa supremumom i infimumom, tj. za svaki niz x_n, $n \in \mathbb{N}$ elemenata intervala $[a,b]$ važi

$$\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = x \ \wedge\ \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = x\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0,$$

za koju važi još bar jedan od sledeća dva uslova:

(a) $\forall x, x', y, y' \in [a,b], \quad d(x \oplus y, x' \oplus y') \leq d(x,x') + d(y,y'),$

(b) $\forall x, x', y, y' \in [a,b], \quad d(x \oplus y, x' \oplus y') \leq \max\{d(x,x'), d(y,y')\},$

i koja je monotona, tj. važi

$$x \leq z \leq y \quad \Rightarrow \quad \max\{d(x,z), d(y,z)\} \leq d(x,y).$$

Napomena 1.1 *Iz oba uslova* (a) *i* (b) *sledi da važi implikacija*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n \oplus z, y_n \oplus z) = 0$$

za sve $x_i, y_j, z \in [a,b]$.

Napomena 1.2 *Iz uslova* (b) *sledi da za svaka dva niza* x_i*,* $i \in \mathbb{N}$ *i* y_j*,* $j \in \mathbb{N}$ *elemenata skupa* $[a,b]$ *važi nejednakost*

$$d\left(\bigoplus_{i=1}^{n} x_i, \bigoplus_{j=1}^{n} y_j\right) \leq \min_{j\in\{1,2,\ldots,n\}} \max_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} d\left(x_i, y_j\right)$$

✎ Metrika d indukuje odgovarajuću topologiju na intervalu $[a,b]$, te koristeći pojam granične vrednosti u smislu ove topologije, možemo definisati tj. koristiti sledeći zapis

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} x_i \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} x_i$$

za svaki niz x_i, $i \in \mathbb{N}$ elemenata skupa $[a,b]$.

Primer 1.7 *Na poluprstenu* $([-\infty, 0), \max, +)$*, funkcija*

$$d(x,y) = e^{\max(x,y)} - e^{\min(x,y)}$$

je metrika koja zadovoljava gore navedene uslove.

Primer 1.8 *Na poluprstenu* $([-\infty, \infty], \max, \min)$*, funkcija*

$$d(x, y) = \operatorname{arctg}(\max(x, y)) - \operatorname{arctg}(\min(x, y))$$

je metrika koja zadovoljava gore navedene uslove.

Primer 1.9 *Na poluprstenu* $((-\infty, \infty], \min, +)$*, funkcija*

$$d(x, y) = \left| e^{-\max(x,y)} - e^{-\min(x,y)} \right|$$

je metrika koja zadovoljava gore navedene uslove.

Primer 1.10 *Na poluprstenu* $((-\infty, \infty], \min, +)$*, funkcija*

$$d(x, y) = \left| e^{-x} - e^{-y} \right|$$

je metrika koja zadovoljava gore navedene uslove.

Primer 1.11 *Na poluprstenu tipa* (II)*, tj. poluprstenu sa operacijama generisanim funkcijom g, funkcija*

$$d(x, y) = |g(x) - g(y)|$$

je metrika koja zadovoljava gore navedene uslove.

Glava 2

Pseudo-mera i pseudo-integral

U ovoj glavi su prezentovani pojmovi pseudo-mera i pseudo-integrala, kao i njihove osobine.

2.1 Mere sa vrednostima u poluprstenu

U ovom odeljku su navedene definicije i osobine mera i integrala sa vrednostima u poluprstenu. Ovakve mere i itegrale nazivamo još i ***dekompozabilnim merama*** odnosno ***pseudo-integralima***. Kao glavni izvor za ovaj odeljak je korišćeno [Pa95]. Takođe su navedena i dva rezultata iz [MePa99] vezana za konvergenciju dekompozabilnih mera i pseudo-integrala.

Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten[1] sa standardnom relacijom poretka $\leq$, sa neutralnim elementima $\mathbb{0}$ i $\mathbb{1}$ redom operacija $\oplus$ i $\odot$, neka je $[a,b]_+ = \{x \in [a,b] \mid \mathbb{0} \leq x\}$, i neka je $\sum$ σ-algebra podskupova skupa X.

Definicija 2.1 *Skupovna funkcija $m : \sum \to [a,b]_+$ je* **$\oplus$-dekompozabilna mera** *ukoliko važi*

(1) $m(\emptyset) = \mathbb{0}$,

(2) *ako je $\oplus$ neidempotentna operacija, tada*
$\forall A, B \in \sum, \quad A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; m(A \cup B) = m(A) \oplus m(B)$,

(2') *ako je $\oplus$ idempotentna operacija (*min *ili* max*), tada*
$\forall A, B \in \sum, \; m(A \cup B) = m(A) \oplus m(B)$.

Specijalno, za $\oplus = \max$, funkciju m nazivamo još i **konačno maksitivnom merom**.
Ako je $\oplus$ neidempotentna operacija, tada se $\oplus$-dekompozabilna mera $m : \sum \to [a,b]_+$ naziva **σ-$\oplus$-dekompozabilna mera** *ako*

[1] Umesto zatvorenog se po potrebi posmatra poluotvoreni interval.

(3) *za svaki niz A_i, $i \in \mathbb{N}$ po parovima disjunktnih elemenata A_i σ-algebre $\sum$ važi*

$$m\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

gde je $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} a_i.$

Specijalno, za $\oplus = \max$, funkciju m nazivamo još i ***prebrojivo maksitivnom merom****.* *Takođe, u slučaju kada je $\oplus = \max$, za maksitivnu meru $m : \sum \to [a,b]_+$ kažemo da je* ***kompletno maksitivna*** *ako*

(3') *za svaku familiju A_i, $i \in I$ skupova $A_i \in \sum$ sa osobinom $\bigcup_{i\in I} A_i \in \sum$ važi*

$$m\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sup_{i\in I} m(A_i).$$

Kompletno maksitivna mera m je jednoznačno određena svojom tzv. ***gustinom***, tj. funkcijom $\varphi : \mathbb{R} \to [a,b]_+$ koja ima osobinu

$$m(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in A} \varphi(x),$$

za svaki merljiv skup A.

Napomena 2.1 *Ako je m σ-$\oplus$-dekompozabilna mera pri čemu je operacija $\oplus$ generisana generatorom g, tada je $\mu = g \circ m$ Lebesgue-ova σ-aditivna mera, i pri tome važi $m = g^{-1} \circ \mu$.*

2.2 Integrali sa vrednostima u poluprstenu

Konstrukcija integrala zasnovanog na σ-$\oplus$-dekompozabilnoj meri sa vrednostima u poluprstenu $([a,b], \oplus, \odot)$, analogna je konstrukciji Lebesgue-ovog integrala (vidi [Pa95]). Neka je m je σ-$\oplus$-dekompozabilna mera definisana na $\sum$. Na skupu funkcija na uobičajen način uvodimo operacije „sabiranja" funkcija, „množenja" funkcija, i „množenja" funkcije skalarom.

Definicija 2.2 *Za $c \in [a,b]$ i funkcije $f : X \to [a,b]$ i $g : X \to [a,b]$ definiše se*

$$(c \odot g)(x) = c \odot g(x), \quad x \in X,$$
$$(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x), \quad x \in X,$$
$$(f \odot g)(x) = f(x) \odot g(x), \quad x \in X.$$

Funkcija $f : X \to [a,b]$ je ***merljiva od dole*** ukoliko su merljivi (tj. pripadaju $\sum$) svi skupovi $\{x \in X \mid f(x) \le c\}$ i $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ za svako $c \in [a,b]$. Funkcija f je ***merljiva*** ako je merljiva od dole i merljivi su svi skupovi $\{x \in X \mid f(x) \ge c\}$ i $\{x \in X \mid f(x) > c\}$ za svako $c \in [a,b]$.

Definicija 2.3 ***Pseudo-karakteristična funkcija skupa*** *$A \subseteq X$ je funkcija $\kappa_A : X \to [a,b]$ definisana sa*

$$\kappa_A(x) = \begin{cases} \mathbb{0} & , \quad x \notin A \\ \mathbb{1} & , \quad x \in A \end{cases} .$$

Definicija 2.4 *Neka su $A_i \in \sum$, $i \in \mathbb{N}$ merljivi skupovi koji su disjunktni ukoliko operacija $\oplus$ nije idempotentna, i neka su a_i, $i \in \mathbb{N}$ elementi intervala $[a,b]$. Funkcija oblika*

$$e = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \kappa_{A_i}$$

odnosno oblika

$$e = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \kappa_{A_i}$$

se naziva ***elementarna funkcija****.*

Naravno, elementarna funkcija je merljiva, i karakteristična funkcija skupa A je merljiva ako i samo ako je A merljiv skup (tj. $A \in \sum$).

Pretpostavićemo dalje da su polugrupe $([a,b], \oplus)$ i $([a,b], \odot)$ ***kompletne mreže sa poretkom***, tj. za svaki od gore ograničen skup $A \subseteq [a,b]$ postoji $\sup A$, i svaki od dole ograničen skup $A \subseteq [a,b]$ postoji $\inf A$. Takođe, neka je na $[a,b]$ definisana metrika $d : [a,b]^2 \to [0,\infty]$ koja je kompatibilna sa supremumom i infimumom, tj. za svaki niz x_n, $n \in \mathbb{N}$ elemenata intervala $[a,b]$ važi

$$\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = x \ \wedge \ \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = x \right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0,$$

za koju važi još bar jedan od sledeća dva uslova:

(a) $\forall x, x', y, y' \in [a,b], \quad d(x \oplus y, x' \oplus y') \le d(x, x') + d(y, y')$,

(b) $\forall x, x', y, y' \in [a,b], \quad d(x \oplus y, x' \oplus y') \le \max\{d(x, x'), d(y, y')\}$,

i koja je monotona, tj. važi

$$x \le z \le y \quad \Rightarrow \quad \max\{d(x,z), d(y,z)\} \le d(x,y).$$

Definicija 2.5 *Neka je $\varepsilon > 0$ i $B \subseteq [a,b]$. Niz $\left\{ l_i^{(\varepsilon)} \;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}$ je* ***ε-mreža*** *za skup B ukoliko za svako $x \in B$ postoji neko $l_i^{(\varepsilon)}$ takvo da je $d\left(l_i^{(\varepsilon)}, x\right) \le \varepsilon$. Ako za svako $x \in B$ postoji $l_i^{(\varepsilon)}$ takvo da je $d\left(l_i^{(\varepsilon)}, x\right) \le \varepsilon$ i $l_i^{(\varepsilon)} \le x$, tada je $\left\{ l_i^{(\varepsilon)} \;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}$* ***opadajuća ε-mreža****. $\left\{ l_i^{(\varepsilon)} \;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}$ je* ***monotona ε-mreža*** *ukoliko je $\forall i$, $l_i^{(\varepsilon)} \le l_{i+1}^{(\varepsilon)}$.*

Teorema 2.1 *Neka je $f : X \to [a,b]$ funkcija koja je od dole merljiva ukoliko je $\oplus$ idempotentna operacija, ili je merljiva i za svako $\varepsilon > 0$ postoji monotona ε-mreža skupa $f(X)$. Tada postoji niz elementarnih funkcija e_n, $n \in \mathbb{N}$ takvih da je*

$$\lim_{n \to \infty} d(e_n(x), f(x)) = 0$$

uniformno po $x \in X$.

Kao i kod Lebesgue-ovog integrala, definiciju pseudo-integrala uvodomo u koracima.

Definicija 2.6

(a) ***Pseudo-integral*** *elementarne funkcije oblika* $e = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \kappa_{A_i}$, *odnosno oblika* $e = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \kappa_{A_i}$, *gde su skupovi* A_i *disjunktni ukoliko* $\oplus$ *nije idempotentna operacija, je definisan sa*

$$\int_X^{\oplus} e \odot dm \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot m(A_i)$$

odnosno

$$\int_X^{\oplus} e \odot dm \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot m(A_i).$$

(b) ***Pseudo-integral*** *ograničene, merljive, odnosno merljive od dole ako je* $\oplus$ *idempotentna operacija, funkcije* $f : X \to [a, b]$, *za koju, ukoliko* $\oplus$ *nije idempotentna operacija važi da za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji monotona* ε*-mreža skupa* $f(X)$, *je definisan sa*

$$\int_X^{\oplus} f \odot dm \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X^{\oplus} e_n \odot dm, \tag{2.1}$$

gde je e_n, $n \in \mathbb{N}$ *niz elementarnih funkcija iz teoreme* 2.1.

(c) ***Pseudo-integral*** *ograničene, merljive, odnosno merljive od dole ako je* $\oplus$ *idempotentna operacija, funkcije* $f : X \to [a, b]$ *nad skupom* $A \in \sum$, *za koju, ukoliko* $\oplus$ *nije idempotentna operacija važi da za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji monotona* ε*-mreža skupa* $f(A)$, *je definisan sa*

$$\int_A^{\oplus} f \odot dm \overset{\text{def}}{=} \int_X^{\oplus} (f \odot \kappa_A) \odot dm.$$

Napomena 2.2 *Integral definisan sa* (2.1) *ne zavisi od od izbora elementarnih funkcija* e_n.

Primer 2.1 *Posmatrajmo poluprsten* $([-\infty, \infty), \sup, +)$, *i neku proizvoljnu funkciju* $\varphi : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$. *Neka je* $\mathcal{B}$ *Borel-ova* σ*-algebra na* $\mathbb{R}$. *Funkcija* $m : \mathcal{B} \to [-\infty, \infty)$ *definisana sa*

$$m(A) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\in A} \varphi(x), \quad A \in \mathcal{B}$$

je sup*-mera na skupu* $\mathbb{R}$, *i za pseudo operacije* $\oplus = \sup$ *i* $\odot = +$ *odgovarajući pseudo-integral od gore ograničene funkcije* $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ *se izračunava na sledeći način:*

$$\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dm = \sup_{x\in\mathbb{R}} (f(x) + g(x)).$$

Napomena 2.3 *Posmatrajmo g-poluprsten* $([a,b], \oplus, \odot)$. *Neka je* $\sum$ σ*-algebra skupa* Ω*, i posmatrajmo i neku* $\oplus$*-dekompozabilnu meru na* Ω*. Funkcija* $\lambda \overset{\text{def}}{=} g \circ m : \sum \to [-\infty, \infty]$ *je aditivna mera, i za merljivu funkciju* $f : \Omega \to [a,b]$ *se pseudo-integral funkcije* f *može izračunati na sledeći način:*

$$\int_{\Omega}^{\oplus} f \odot dm = g^{-1}\left(\int_{\Omega} (g \circ f) d\lambda\right)$$

gde je integral sa desne strane Lebesque-ov integral.

Sledeće teoreme daju neke osobine pseudo-integrala, i specijalno sup-integrala (vidi [Pa95] - glave 2 i 8, i [Pu01]). Neka je m neka σ-$\oplus$-dekompozabilna mera na Ω.

Teorema 2.2 *Neka su* $\oplus$ *i* $\odot$ *neprekidne, i neka je* $\oplus$ *beskonačno komutativna operacija. Tada pseudo integral* 2.1 *ima sledeće osobine: za svako* $c \in [a,b]$ *i funkcije* $f : \Omega \to [a,b]$ *i* $g : \Omega \to [a,b]$ *za koje je pseudo-integral definisan, važi*

(a) $$m(A) = \int_{\Omega}^{\oplus} \kappa_A(x) \odot dm, \tag{2.2}$$

(b) $$\int_{\Omega}^{\oplus} (c \odot f) \odot dm = c \odot \int_{\Omega}^{\oplus} f \odot dm, \tag{2.3}$$

(c) $$\int_{\Omega}^{\oplus} (f \oplus g) \odot dm = \int_{\Omega}^{\oplus} f \odot dm \oplus \int_{\Omega}^{\oplus} g \odot dm, \tag{2.4}$$

(d) $$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega}^{\oplus} f \odot dm \leq \int_{\Omega}^{\oplus} g \odot dm. \tag{2.5}$$

Dokaz: Ilustracije radi, naveden je dokaz osobine (d).

* Neka su f i g elementarne funkcije, odnosno oblika

$$f = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \kappa_{A_i}, \qquad g = \bigoplus_{i=1}^{\infty} b_i \odot \kappa_{B_i},$$

gde su A_i, $\forall i \in \mathbb{N}$ kao i B_i, $\forall i \in \mathbb{N}$ neprazni disjunktni skupovi ukoliko operacija $\oplus$ nije idempotentna. Neka je $C_{i,j} = A_i \cap B_j$, $i, j \in \mathbb{N}$. Za funkcije f i g važi reprezentacija $f = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \bigoplus_{j=1}^{\infty} a_i \odot \kappa_{C_{i,j}}$ i $g = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \bigoplus_{j=1}^{\infty} b_j \odot \kappa_{C_{i,j}}$. Iz relacije $f \le g$ sledi $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \Omega$, $a_i \odot \kappa_{C_{i,j}}(x) \le b_j \odot \kappa_{C_{i,j}}(x)$, odnosno sledi da za sve $i, j \in \mathbb{N}$ važi $C_{i,j} \ne \emptyset \;\Rightarrow\; a_i \le b_j$ (slučaj $C_{i,j} = \emptyset$ je očigledan), te pošto je $\odot$ pozitivno neopadajuća operacija, sledi da je $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $a_i \odot m\left(C_{i,j}\right) \le b_j \odot m\left(C_{i,j}\right)$, odakle (operacija $\oplus$ je takođe neopadajuća) sledi tvrđenje

$$\int_{\Omega}^{\oplus} f \odot dm = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \bigoplus_{j=1}^{\infty} a_i \odot m\left(C_{i,j}\right) \le \bigoplus_{i=1}^{\infty} \bigoplus_{j=1}^{\infty} b_j \odot m\left(C_{i,j}\right) = \int_{\Omega}^{\oplus} g \odot dm.$$

* Neka su sada f i g merljive, odnosno od dole merljive funkcije ako je operacija $\oplus$ idempotentna, i neka su φ_n, $n \in \mathbb{N}$ i ψ_n, $n \in \mathbb{N}$ nizovi elementarnih funkcija iz teoreme 2.1 koji odgovaraju funkcijama f i g, tj. takve da uniformno po $x \in \Omega$ važi

$$\lim_{n \to \mathbb{N}} d\left(\varphi_n(x), f(x)\right) = 0, \qquad \lim_{n \to \mathbb{N}} d\left(\psi_n(x), g(x)\right) = 0. \tag{2.6}$$

Neka su funkcije $\tilde{\psi}_n$, $n \in \mathbb{N}$ definisane sa $\tilde{\psi}_n(x) \overset{\text{def}}{=} \max\{\varphi_n(x), \psi_n(x)\}$, $x \in \Omega$. Očigledno je $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \Omega$, $\varphi_n(x) \le \tilde{\psi}_n(x)$. Pošto su navedene konvergencije uniformne po $x \in \Omega$, s obzirom na napomenu 2.2, iz (2.6) i relacije $f \le g$ sledi

$$\lim_{n \to \mathbb{N}} d\left(\tilde{\psi}_n(x), g(x)\right) = 0 \quad \text{i} \quad \int_{\Omega}^{\oplus} g \odot dm = \lim_{n \to \mathbb{N}} \int_{\Omega}^{\oplus} \tilde{\psi}_n(x) \odot dm$$

odakle se dobija

$$\int_{\Omega}^{\oplus} f \odot dm = \lim_{n \to \mathbb{N}} \int_{\Omega}^{\oplus} \varphi_n(x) \odot dm \le \lim_{n \to \mathbb{N}} \int_{\Omega}^{\oplus} \tilde{\psi}_n(x) \odot dm = \int_{\Omega}^{\oplus} g \odot dm.$$

$\square$

Neka je m sada σ-$\oplus$-dekompozabilna mera na Ω sa vrednostima u poluprstenu $([0, \infty], \oplus, \odot)$, takva da je $m(\Omega) < \infty$. Koristimo konvenciju $\infty \cdot 0 = 0$, i umesto $m(\{\omega\})$ ćemo pisati $m(\omega)$. Za proizvoljnu familiju funkcija $f_j : \Omega \to [0, \infty]$, $j \in J$ su funkcije $\sup_{j \in J} f_j : \Omega \to [0, \infty]$ i $\inf_{j \in J} f_j : \Omega \to [0, \infty]$ definisane sa

$$\left(\sup_{j \in J} f_j\right)(\omega) \overset{\text{def}}{=} \sup_{j \in J} f_j(\omega), \qquad \left(\inf_{j \in J} f_j\right)(\omega) \overset{\text{def}}{=} \inf_{j \in J} f_j(\omega).$$

Teorema 2.3 *Neka je $\odot$ neprekidna operacija. Za kompletno maksitivnu meru m i proizvoljnu familiju funkcija $f_j : \Omega \to [0, \infty)$, $j \in J$ važi*

$$\int_{\Omega}^{\sup} \left(\sup_{j \in J} f_j\right) \odot dm = \sup_{j \in J} \int_{\Omega}^{\sup} f_j \odot dm.$$

Dokaz:

$$\int\limits_{\Omega}^{\sup}\left(\sup_{j\in J} f_j\right)\odot dm = \sup_{\omega\in\Omega}\left\{\left(\sup_{j\in J} f_j\right)(\omega)\odot m(\omega)\right\} =$$

$$= \sup_{\omega\in\Omega}\left\{\left(\sup_{j\in J} f_j(\omega)\right)\odot m(\omega)\right\} \overset{[1]}{=} \sup_{\omega\in\Omega}\,\sup_{j\in J}\left\{f_j(\omega)\odot m(\omega)\right\} =$$

$$= \sup_{j\in J}\,\sup_{\omega\in\Omega}\left\{f_j(\omega)\odot m(\omega)\right\} = \sup_{j\in J}\int\limits_{\Omega}^{\sup} f_j\odot dm.$$

[1] ako je $\varphi : [0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ neprekidna funkcija, tada za $b\in[0,\infty)$ i proizvoljnu familiju $a_j\in[0,\infty)$, $j\in J$ važi $\varphi\left(\sup_{j\in J} a_j, b\right) = \sup_{j\in J}\varphi\left(a_j, b\right)$; operacija $\odot$ je neprekidna funkcija.

□

Neka je $\mathcal{F}$ familija svih zatvorenih potskupova intervala $[0,\infty]$. Analogno kao u teoremi 1.7.7. u [Pu01], za sup-integral zasnovanom na poluprstenu $([0,\infty], \sup, \odot)$ sa operacijom $\odot$ generisanom neprekidnom funkcijom g, važi sledeća teorema.

Teorema 2.4 *Neka je m kompletno maksitivna mera na intervalu $[0,\infty]$ sa vrednostima u intervalu $[0,\infty]$, i neka je m pri tome $\mathcal{F}$-glatka, tj.*

(1) $m(\emptyset) = 0$,

(2) $m\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) = \sup_{j\in J} m\left(A_j\right)$ *za svaku familiju A_j, $j\in J$ merljivih skupova A_j,*

(3) $m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} m(F_n)$ *za svaki opadajući niz F_n, $n\in\mathbb{N}$ elemenata familije $\mathcal{F}$.*

Tada, za svaku familiju $f_j : [0,\infty]\to[0,\infty)$, $j\in J$ ograničenih, od gore poluneprekidnih funkcija, koja je zatvorena u odnosu na minimume i infimume, važi

$$\int\limits_{[0,\infty]}^{\sup}\left(\inf_{j\in J} f_j\right)\odot dm = \inf_{j\in J}\int\limits_{[0,\infty]}^{\sup} f_j\odot dm$$

gde je operacija $\odot$ generisana neprekidnom funkcijom g.

Naredne dve teoreme, dokazane u [MePa99], pokazuju da

1. dekompozabilna mera zasnovana na idempotentnom pseudo-sabiranju sa neprekidnom gustinom se može dobiti kao limes familije dekompozabilnih mera m_λ zasnovanih na pseudo-sabiranju sa generatorom,

2. pseudo-integral zasnovan na poluprstenu $([a,b], \sup, \odot)$ sa operacijom $\odot$ koja je generisana funkcijom g, i na sup-dekompozabilnoj meri sa neprekidnom gustinom, može se dobiti kao limes familije g-integrala.

Neka $\mathcal{B}_{[0,\infty]}$ označava σ-algebru Borel-ovih podskupova intervala $[0,\infty]$, a μ neka označava Lebesgue-ovu meru na $\mathbb{R}$. Esencijalni supremum nenegativne, merljive funkcije $f : \Omega \to [0,\infty]$ u odnosu na meru μ je definisan sa

$$\operatorname*{esssup}_{\mu} \{ f(x) \mid x \in \Omega \} \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \alpha \in [0,\infty) \mid \mu(\{ x \in \Omega \mid f(x) > \alpha \}) \}$$

pri čemu uzimamo da je $\sup \emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \infty$.

Teorema 2.5 *Neka je m sup-dekompozabilna mera na $([0,\infty], \mathcal{B}_{[0,\infty]})$, pri čemu je*

$$m(A) = \operatorname*{esssup}_{\mu} \{ \varphi(x) \mid x \in A \},$$

gde je $\varphi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ neprekidna funkcija - gustina mere m. Tada za proizvoljni generator g postoji familija $\{m_\lambda\}_{\lambda\in(0,\infty)}$ $\oplus_\lambda$-dekompozabilnih mera na $([0,\infty], \mathcal{B}_{[0,\infty]})$, gde je operacija $\oplus_\lambda$ generisana funkcijom g^λ, $\lambda \in (0,\infty)$, takva da je $\lim_{\lambda\to\infty} m_\lambda = m$.[2]

Teorema 2.6 *Neka je $([0,\infty], \sup, \odot)$ poluprsten kod koga je operacija $\odot$ generisana funkcijom g. Neka je m sup-dekompozabilna mera kao u teoremi 2.5. Tada postoji familija $\{m_\lambda\}_{\lambda\in(0,\infty)}$ $\oplus_\lambda$-dekompozabilnih mera, gde je operacija $\oplus_\lambda$ generisana funkcijom g^λ, $\lambda \in (0,\infty)$, takva da za svaku neprekidnu funkciju $f : [0,\infty] \to [0,\infty]$ važi*

$$\int^{\sup} f \odot dm = \lim_{\lambda\to\infty} \int^{\oplus_\lambda} f \odot dm_\lambda = \lim_{\lambda\to\infty} \left(g^\lambda\right)^{-1} \left(\int (g^\lambda \circ f) \odot dx \right).$$

[2]U smislu da je $\lim_{\lambda\to\infty} m_\lambda(A) = m(A)$ za svako $A \in \mathcal{B}_{[0,\infty]}$.

Glava 3

Pseudo-verovatnoća

U ovoj glavi je prezentovan pojam pseudoverovatnoće, tj. verovatnosne mere sa vrednostima u poluprstenu, kao i njegove i osnovne osobine. Zatim su uvedeni pojmovi pseudo-slučajnih promenljivih (slučajnih promenljivih definisanih na osnovu pojma pseudoverovatnoće), razni tipovi konvergencija pseudo slučajnih promenljivih, uzajamni odnosi ovih konvergencija. Takođe je uveden pojam kvaziaritmetičke sredine, i ispitan zakon velikih brojeva u smislu pseudo-verovatnoće. Ovi pojmovi su uvedeni i ispitani u radovima [Ra0], [RaNe99], [RaGrNe00], [NeGr02], [NeMiRa07], [RGMNR02].

Neka je $(I, \oplus, \odot)$ poluprsten iz sekcije 1.2 sa neutralnim elementima $\mathbb{0}$ i $\mathbb{1}$ redom operacija $\oplus$ i $\odot$, neka je d metrika definisana na poluprstenu $(I, \oplus, \odot)$, i neka je $\preceq$ relacija poretka na poluprstenu $(I, \oplus, \odot)$. Neka je Ω neprazan skup, i neka je $\sum$ σ-algebra na skupu Ω.

Podsećamo (vidi napomenu 2.3) da se u slučaju poluprstena tipa (II), tj. g-poluprstena kod koga su obe operacije $\oplus$ i $\odot$ generisane neprekidnom i striktno monotonom funkcijom (generatorom) $g : [a, b] \to [0, \infty]$ u smislu

$$x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y)), \quad x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)),$$

(pri čemu je tada $g(\mathbb{0}) = 0$ i $g(\mathbb{1}) = 1$), pseudo-integral merljive funkcije $f : \Omega \to I$ može izračunati na sledeći način:

$$\int_{\Omega}^{\oplus} f \odot dm = g^{-1}\left(\int_{\Omega} g(f(x))dx\right).$$

gde je integral sa desne strane Lebesque-ov integral.

3.1 Pojam i osobine pseudo-verovatnoće

U ovoj sekciji se uvodi pojam pseudo-verovatnoće, tj. verovatnoće sa vrednostima u poluprstenu $(I, \oplus, \odot)$.

Definicija 3.1 ***Pseudo-verovatnoća*** *na* σ*-algebri* $\sum$ *je funkcija* $\mathsf{P} : \sum \to I$ *sa osobinama*

(a) $\mathsf{P}(\emptyset) = \mathbb{0}$ *i* $\mathsf{P}(\Omega) = \mathbb{1}$.

(b) *Za disjunktne skupove* $A, B \in \sum$ *(dakle* $A \cap B = \emptyset$*) važi*

$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) \oplus \mathsf{P}(B)$

(pseudo-verovatnoća je konačno-„aditivna” u smislu pseudo-sabiranja $\oplus$*).*

(c) *Ako za skupove* $A_i \in \sum$*,* $i \in \mathbb{N}$ *važi* $A_i \subseteq A_{i+1}$*,* $i \in \mathbb{N}$*, tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_i) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

(pseudo-verovatnoća P *je odozdo neprekidna funkcija).*

Uređena trojka $(\Omega, \sum, \mathsf{P})$ *se naziva* ***prostor pseudo-verovatnoće****.*

Napomena 3.1 *Uočimo da je pseudo-verovatnoća u stvari* $\oplus$*-dekompozabilna mera sa vrednostima u ograničenom intervalu* $[\mathbb{0}, \mathbb{1}] \subseteq I$*.*

Sledeća teorema, slično kao kod klasične verovatnoće, daje ekvivalentnu definiciju pseudo-verovatnoće.

Teorema 3.1 *Funkcija* $\mathsf{P} : \sum \to I$ *je pseudo-verovatnoća ako i samo ako važi*

(a) $\mathsf{P}(\emptyset) = \mathbb{0}$ *i* $\mathsf{P}(\Omega) = \mathbb{1}$.

(b) *Za svaku prebrojivu familiju* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *po parovima disjunktnih elemenata* σ*-algebre* $\sum$ *važi*

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$$

(pseudo-verovatnoća P *je* σ*-aditivna funkcija).*

Napomena 3.2 *U slučaju poluprstena tipa* (II) *(g-poluprstena), za* $A \in \sum$ *imamo da je* $\mathsf{P}(A) = g^{-1}(p(A))$*, gde je* p *klasična funkcija verovatnoće. U ovom slučaju se pseudo-verovatnoća* P *naziva* **izvrnuta verovatnoća** *(distorted probability), vidi npr. [Ch96] i [RaNe99].*

Primer 3.1 *Posmatrajmo poluprsten* $(\mathbb{R}, \sup, \cdot)$*. Neka je* $\Omega = \mathbb{N}$*, i neka je funkcija* $\Pi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}^{+}$ *definisana sa*

$$\Pi(\emptyset) = 0, \qquad \Pi(A) = 1 - \frac{1}{\sup A}, \quad \emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}.$$

Funkcija Π *je pseudo-verovatnoća (tzv. idempotentna verovatnoća) na skupu* $\mathbb{N}$*. Na primer, osobina* (b) *je zadovoljena jer za sve* $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *važi*

$$\Pi(A \cup B) = 1 - \frac{1}{\sup\{A \cup B\}} = 1 - \frac{1}{\max\{\sup A, \sup B\}} =$$

$$= 1 - \min\left\{\frac{1}{\sup A}, \frac{1}{\sup B}\right\} = \max\left\{1 - \frac{1}{\sup A}, 1 - \frac{1}{\sup B}\right\} = \sup(\Pi(A), \Pi(B)).$$

3.2 Pseudo-slučajne promenljive

U ovoj sekciji uvodimo pojam pseudo-slučajne promenljive, i njoj odgovarajuće funkcije raspodele, gustine, matematičkog očekivanja, kao i pojam nezavisnosti pseudo-slučajnih promenljivih.

✎ Za funkciju $X : \Omega \to I$ možemo uvesti uobičajene oznake

$$\{X \preceq x\} \overset{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \preceq x\},\ x \in I$$

$$\{X \prec x\} \overset{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \prec x\},\ x \in I.$$

Definicija 3.2 *Funkcija $X : \Omega \to I$ se naziva* ***pseudo-slučajna promenljiva*** *ili* ***pseudo-varijabla*** *ukoliko za sve $x \in I$ važi $\{X \prec x\} \in \Sigma$.*

Kao i u klasičnoj teoriji verovatnoće, za svaku pseudo-slučajnu promenljivu možemo definisati njoj odgovarajuću funkciju raspodele.

Definicija 3.3 ***Funkcija raspodele*** *F_X pseudo-slučajne promenljive (pseudo-varijable) X je funkcija $F_X : I \to I$ definisana sa $F_X(x) = \mathsf{P}(X \prec x)$.*

Neka je nadalje $\sigma(I)$ minimalna $\sigma-$algebra koja sadrži sve otvorene lopte u separabilnom metričkom prostoru (I, d), i neka je m dekompozabilna mera definisana na merljivom prostoru $(I, \sigma(I))$.

U nekim slučajevima se funkcija raspodele pseudo-slučajne promenljive može izraziti kao pseudo-integral tzv. gustine koja odgovara slučajnoj promenljivoj.

Definicija 3.4 *Ukoliko za pseudo-slučajnu promenljivu X postoji funkcija ϕ_X za koju važi $F_X(x) = \int_I^{\oplus} \phi_X dm$, tada za funkciju ϕ_X kažemo da je* ***funkcija gustine*** *koja odgovara slučajnoj promenljivoj X.*

Sada za pseudo-slučajnu promenljivu za koju postoji odgovarajuć funkcija gustine definišemo preko pseudo-integrala i njeno matematičko očekivanje.

Definicija 3.5 ***Pseudo-očekivanje*** *pseudo-slučajne promenljive X sa funkcijom gustine ϕ_X, u oznaci $\mathsf{E}(X)$, definišemo sa*

$$\mathsf{E}(X) = \int_I^{\oplus} x \odot \phi_X(x) \odot dm.$$

Napomena 3.3 *U slučaju poluprstena tipa* (II)*, tj. g-poluprstena kod koga su obe operacije $\oplus$ i $\odot$ generisane neprekidnom i striktno monotonom funkcijom (generatorom) $g : [a, b] \to [0, \infty]$, pseudo-očekivanje pseudo-varijable X se može izraziti tj. izračunati i na sledeći način*

$$\mathsf{E}(X) = g^{-1}\left(\int_I g(x) \cdot g(\phi_X(x)) dx\right),$$

gde je $dx = d(g \circ m)$ Lebesgue-ova mera.

Za pseudo-varijable koje imaju funkciju gustine, na uobičajeni način definišemo njihovu nezavisnost.

Definicija 3.6 *Pseudo-slučajne promenljive X i Y koje imaju odgovarajuće funkcije gustine redom ϕ_X i ϕ_Y kažemo da su* ***nezavisne*** *ukoliko važi*

$$\phi_{X,Y}(x,y) = \phi_X(x) \odot \phi_Y(y).$$

3.3 Konvergencije pseudo-slučajnih promenljivih

U ovoj sekciji uvodimo pojmove raznih vrsta konvergencija pseudo-slučajnih promenljivih. Takođe su ispitane neke uzajamne veze između ovih vrsta konvergencija, vidi npr. [RaNe99].

Definicija 3.7 *Niz $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pseudo-slučajnih promenljivih* ***konvergira u pseudo-verovatnoći*** P *ka pseudo-slučajnoj promenljivoj X, u oznaci $X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} X$, ukoliko za svako $\varepsilon > 0$ važi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid d\left(X_n(\omega), X(\omega)\right) \geq \varepsilon\}\right) = \mathbb{0}.$$

Definicija 3.8 *Niz $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pseudo-slučajnih promenljivih* ***konvergira skoro sigurno*** *ka pseudo-slučajnoj promenljivoj X, u oznaci $X_n \xrightarrow{a.s} X$, ukoliko važi*

$$\mathsf{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \to X(\omega)\}\right) = \mathbb{1}.$$

odnosno

$$\mathsf{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \nrightarrow X(\omega)\}\right) = \mathbb{0}.$$

Sledeće dve teoreme daju uzajamne odnose navedenih vrsta konvergencija, tj. uslove pod kojima neki niz pseudo-slučajnih promenljivih konvergira u određenom smislu.

Sledeća teorema, za slučaj poluprstena sa idempotentnim operacijama, je dokazana u [Ra0].

Teorema 3.2 *U slučaju kada je poluprsten tipa* (I) *ili* (III)*, tj. u idempotentnom slučaju, iz konvergencije $X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} X$ sledi konvergencija $X_n \xrightarrow{a.s} X$.*

Dokaz:

Koristićemo da je

$$\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\right\} = \bigcup_{k>0} \lim_{m\to\infty} \downarrow \bigcup_{n\geq m} \left\{\omega \in \Omega \mid d\left(X_n(\omega), X(\omega)\right) \geq \frac{1}{k}\right\}.$$

Koristeći osobine idempotentne mere imamo da je

$$\mathsf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\right\}\right)$$

$$= \bigoplus_{k>0} \mathsf{P}\left(\lim_{m\to\infty} \downarrow \bigcup_{n\geq m} \left\{\omega \in \Omega \mid d\left(X_n(\omega), X(\omega)\right) \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \qquad \text{[K1]}$$

$$\leq \bigoplus_{k>0} \lim_{m\to\infty} \downarrow \mathsf{P}\left(\bigcup_{n\geq m}\left\{\omega \in \Omega \mid d\left(X_n(\omega), X(\omega)\right) \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \qquad [K2]$$

$$= \bigoplus_{k>0} \lim_{m\to\infty} \downarrow \bigoplus_{n\geq m} \mathsf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid d\left(X_n(\omega), X(\omega)\right) \geq \frac{1}{k}\right\}\right). \qquad [K3]$$

Stoga, ukoliko je $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid d\left(X_n(\omega), X(\omega)\right) \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = \mathbb{0}$, tada je

$$\lim_{m\to\infty} \downarrow \bigoplus_{n\geq m} \mathsf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid d\left(X_n(\omega), X(\omega)\right) \geq \frac{1}{k}\right\}\right)$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid d\left(X_n(\omega), X(\omega)\right) \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = \mathbb{0},$$

te dobijamo

$$\mathsf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\right\}\right) = \mathbb{0}.$$ □

Napomena 3.4 *U dokazu prethodne teoreme, razlika u odnosu na klasičnu teoriju verovatnoće je u sledećem:*

* *U* [K1] *i* [K3] *važe jednakosti umesto nejednakosti* $\leq$ *jer je* $\oplus$ *idempotentna operacija te za svaki niz skupova* $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *važi*

  $$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathsf{P}((A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \setminus A_1))$$
  $$= \mathsf{P}(A_1 \setminus A_2) \oplus \mathsf{P}(A_1 \cap A_2) \oplus \mathsf{P}(A_2 \setminus A_1)$$
  $$= \mathsf{P}(A_1 \setminus A_2) \oplus (\mathsf{P}(A_1 \cap A_2) \oplus \mathsf{P}(A_1 \cap A_2)) \oplus \mathsf{P}(A_2 \setminus A_1)$$
  $$= (\mathsf{P}(A_1 \setminus A_2) \oplus \mathsf{P}(A_1 \cap A_2)) \oplus (\mathsf{P}(A_1 \cap A_2) \oplus \mathsf{P}(A_2 \setminus A_1)) = \mathsf{P}(A_1) \oplus \mathsf{P}(A_2),$$

  odakle induktivno dobijamo

  $$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathsf{P}(A_1) \oplus \mathsf{P}(A_2) \oplus \ldots \oplus \mathsf{P}(A_n),$$

  te stoga za skupove $A_n = \left\{\omega \in \Omega \mid d\left(X_n(\omega), X(\omega)\right) \geq \frac{1}{k}\right\}$ *i* $B_k = \bigcup_{n=m}^{k} A_n$*, gde je* $B_k \subseteq B_{k+1}$*,* $k \in \mathbb{N}$ *tako da možemo koristiti osobinu* (c) *pseudo-verovatnoće iz definicije* 3.1*, važi*

  $$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}(B_k) = \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{n=m}^{k} A_n\right)$$
  $$= \lim_{k\to\infty} \bigoplus_{n=m}^{k} \mathsf{P}(A_n) = \bigoplus_{n=m}^{\infty} \mathsf{P}(A_n).$$

* *Za nerastući niz skupova, idempotentna mera nije neprekidna funkcija, te stoga u* [K3] *imamo u opštem slučaju nejednakost umesto jednakosti, za razliku od klasične verovatnoće,*

Sledeća teorema, za slučaj neidempotentnog poluprstena, je dokazana u [RaNe99]. U dokazu teoreme je sa p označena klasična verovatnoća.

Teorema 3.3 *U slučaju kada je poluprstena tipa* (II)*, tj. u neidempotentnom slučaju kada su operacije* $\oplus$ *i* $\odot$ *poluprstena generisane generatorom* g*, tada iz konvergencije* $X_n \xrightarrow{a.s} X$ *sledi konvergencija* $X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} X$*.*

<u>*Dokaz:*</u>

Iz jednakosti $\mathsf{P}\left(\{\omega \in \Omega\} \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = \mathbb{0}$, tj. iz
$g^{-1}\left(p\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right)\right) = \mathbb{1}$, zbog $g(\mathbb{1}) = 1$ sledi
$p\left(\{\omega \in \Omega\} \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1$.

U metričkom prostoru (I, d), konvergencija $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ je ekvivalentna sa

$$(\forall\delta > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$n \geq n_0 \Rightarrow \delta > d(X_n(\omega), X(\omega)) = |g(X_n(\omega)) - g(X(\omega))|,$$

tj. niz $\{g(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pseudo-slučajnih promenljivih konvergira skoro sigurno ka $g(X)$. U klasičnoj teoriji verovatnoće, skoro sigarna konvergencija implicira konvergenciju u verovatnoći, tako da za sve $\varepsilon > 0$ važi

$$\lim_{n\to\infty} p(\{\omega \in \Omega \mid |g(X_n(\omega)) - g(X(\omega))| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Konačno, iz

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\{\omega \in \Omega \mid d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq \varepsilon\}) = \mathbb{0} \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = \lim_{n\to\infty} d(\mathsf{P}(\{\omega \in \Omega \mid d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq \varepsilon\}), \mathbb{0}) \\
&= \lim_{n\to\infty} |g(\mathsf{P}(\{\omega \in \Omega \mid d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq \varepsilon\})) - g(\mathbb{0})| \\
&= \lim_{n\to\infty} p(\{\omega \in \Omega \mid d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq \varepsilon\}) \\
&= \lim_{n\to\infty} p(\{\omega \in \Omega \mid |g(X_n(\omega)) - g(X(\omega))| \geq \varepsilon\}),
\end{aligned}$$

dobijamo da niz $\{g(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pseudo-slučajnih promenljivih konvergira u pseudo-verovatnoći P ka pseudo-slučajnoj promenljivoj X. □

3.4 Srednje vrednosti pseudo-slučajnih promenljivih i zakon velikih brojeva u prostoru pseudo-verovatnoće

Sledeća definicija je uvedena, i sledeća teorema je dokazana u [RaGrNe00]. U dokazu teoreme je sa p označena klasična verovatnoća.

Definicija 3.9 *Neka je* g *neprekidna i striktno monotona funkcija. Tada za brojeve* $x_1, x_2, ..., x_n$ *kažemo da je*

$$S_n(x_1, x_2, ..., x_n) = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

njihova **kvazi-aritmetička sredina***. Ako su $X_1, X_2, ..., X_n$ pseudo-slučajne promenljive, tada je*

$$S_n(X_1, X_2, ..., X_n) = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

kvazi-aritmetička sredina pseudo-slučajnih promenljivih $X_1, X_2, ..., X_n$.

✎ Skraćeno ćemo sa S_n označavati $S_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ odnosno $S_n(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Za neke specijalne, značajne funkcije g imamo sledeću tabelu njihovih kvazi-aritmetička sredina sa njima odgovarajućim nazivima.

$g(x)$	$S_n(x_1, x_2, ..., x_n)$	sredina
x	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	aritmetička
x^2	$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$	kvadratna
x^α	$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha\right)^{1/\alpha}$	koreno-stepena
x^{-1}	$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^{-1}$	harmonijska
$\log x$	$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$	geometrijska
$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha x_i}\right)$	eksponencijalna

Sledeća teorema daje analogon zakona velikih brojeva koji važi u klasičnoj teoriji verovatnoće.

Teorema 3.4 *U slučaju poluprstena tipa* (II) *sa metrikom $d(x, y) = |g(x) - g(y)|$, za niz X_n, $n \in \mathbb{N}$ uzajamno nezavisnih pseudo-varijabli sa istim raspodelama i matematičkim očekivanjima $\mathsf{E}(X_n) = a$, $n \in \mathbb{N}$ važi $S_n \xrightarrow{\mathsf{P}} a$.*

Dokaz:

Dokazaćemo da važi $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(\{d(S_n, a) \geq \varepsilon\}) = \mathbb{0}$ za svako $\varepsilon > 0$:

$d(\mathsf{P}(\{d(S_n, a) \geq \varepsilon\}), \mathbb{0})$

$= |g(\mathsf{P}(\{d(S_n, a) \geq \varepsilon\})) - g(\mathbb{0})|$

$$
\begin{aligned}
&= |p(\{d(S_n, a) \geq \varepsilon\}) - 0| \\
&= p(\{d(S_n, a) \geq \varepsilon\}) \\
&= p(\{|g(S_n) - g(a)| \geq \varepsilon\}) \\
&= p\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) - g(a)\right| \geq \varepsilon\right\}\right).
\end{aligned}
$$

Kako slučajne promenljive $Y_i = g(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$ zadovoljavaju obični zakon velikih brojeva, sledi tvrđenje tj. važi

$$
\lim_{n\to\infty} p\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) - g(a)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0. \qquad \Box
$$

Indeks

Bibliografija

[Acz66] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and their Applications*, Academic Press, New York, 1966.

[Ak295] M. Akian, *Theory of cost measures: convergence of decision variables*, INRIA research report 2611, 1995.

[Ch96] A. Chateauneuf, *Decomposable capacities, distorted probabilities and concave capacities*, Math. Social Sci. 31 (1996), no. 1, 19-37. MR 97m:90006

[DuPr80] D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and applications*, Academic Press, New York, 1980.

[DuPr88] D. Dubois, H. Prade, *Possibility Theory*, Plenum Press, New York, 1988.

[HaOl90] O. Hadžić, *Odabrane medote teorije verovatnoće*, Institut za matematiku, Novi Sad, 1990.

[KMP00] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[Ko96] A. Kolesarova, *Integration of real functions with respect to a $\oplus$-measure*, Math. Slovaca 46 (1996), 41-52.

[KoMa89] V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, *Idempotent calculus as the apparatus of optimization theory. I*, Functional. Anal. i Prilozhen 23, no. 1, (1989), 1-14.

[MaSa92] V. P. Maslov, S. N. Samborskij (Eds.), *Idempotent Analysis*, Advances in Soviet Mathematics 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[MePa99] R. Mesiar, E. Pap, *Idempotent integral as limit of g-integrals*, Fuzzi sets and systems 102 (1999) 385-392.

[NeGrRa03] Lj. M. Nedović, T. Grbić, N. M. Ralević, *Large Deviation Principle*, 1st Serbian-Hungarian Joint Symposium on Intelligent System, September 19-20, 2003, Subotica, Serbia and Montenegro (2003), 233-244.

[NeRaGr04] Lj. M. Nedović, N. M. Ralević, T. Grbić, *Large deviation principle with generated pseudo measures*, Fuzzy Sets and Systems (u pripremi)

[NeGr02] Lj. M. Nedović, T. Grbić, *The pseudo probability*, Journal of Electrical Engineering, vol. 53, no. 12/s, 2002, pp. 27-30. ISSN 1335-3632

[NeMiRa07] Lj. Nedović, B. Mihailović, N. M. Ralević, *Some Properties of Pseudo-Measures and Pseudo-Probability*, 5th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics SISY 2007, Subotica, Srbija, August 24-25, 2007; objavljeno u pratećem „proceedings"-u, 155-159 (i na CD-u).

[Pa82] E. Pap, *Funkcionalna analiza*, Institut za matematiku, Novi Sad, 1982.

[Pa90] E. Pap, *An integral generated by decomposable measure*, Univ. Novom Sadu Zb. Rad. Prirod. - Mat. Fak. Ser. Mat. 20 (1) (1990) 135-144.

[Pa93] E. Pap, *g-calculus*, Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 23,1 (1993), 145-156.

[Pa95] E. Pap, *Null-Additive Set Functions*, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[Pa02] E. Pap, *Pseudo-additive measures and their applications*, in Handbook of Measure Theory (Ed. E. Pap), Volume II, Elsevier, North Holland, 2002, 1403-1465.

[PaRa98] E. Pap, N. Ralević, *Pseudo-Laplace transform*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 33 (1998), 533-550.

[PaRa99] E. Pap, N. Ralević, *Pseudo operations on finite intervals*, Novi Sad J. Math. Vol. 29, No. 1, 1999, 1-6.

[Pu01] A. Puhalskii, *Large deviations and idempotent probability*, CHAPMAN & HALL/CRC, 2001.

[RaNeRa01] B. M. Ralević, Lj. M. Nedović, N. M. Ralević, *Modelling uncertainty on the problem of water exploitation*, EKO-konferencija 2001, Novi Sad, poglavlje u monografiji „Zaštita životne sredine gradova i prigradskih naselja", Eko. pok. Novi Sad, II (2001), 343-347.

[Ra97] N. M. Ralević, *Pseudo-analysis and applications on solution nonlinear equations*, Ph. D. Thesis, Univerzitet u Novom Sadu, 1997.

[Ra0] N. Ralević, *The pseudo-probability*, Zb. rad. Prim'98 (2000), 111-116.

[RaNeGr98] N. M. Ralević, Lj. M. Nedović, T. Grbić, *Fuzzy Methods for the treatment of Experimental Data*, 3^{rd} International Symposium Interdisciplinary Regional Research (1998), 37-40.

[RaNe99] N. M. Ralević, Lj. M. Nedović, *The Probability Defined on Semirings*, Bulletins for Applied and Computing Mathematics (BAM) (1999) 7-14

[RaGrNe00] N. Ralević, T. Grbić, Lj. Nedović, *A law of large numbers in the pseudo-probability spaces*, Zb. rad. Prim'98, 117-120, 2000.

[RGMNR02] N. M. Ralević, T. Grbić, B. Mihailović, Lj. M. Nedović, M. Roca, *Law of Large Numbers in the Pseudo-Probability Spaces and Its Application*, 6^{th} International Symposium Interdisciplinary Regional Research, Hungary-Romania-Yugoslavia, 2002.

[RaNeGr04] N. M. Ralević, Lj. M. Nedović, T. Grbić, *The pseudo-linear superposition principle for nonlinear partial differential equations and representation of their solution by the pseudo-integral*, Fuzzy Sets and Systems (u pripremi).

[RuWa87] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd Ed., McGraw-Hill, 1987.

[ScSk58] B. Schwizer, A. Sklar, *Espaces métriques aléatoires*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 247:2092-2094, 1958.

[ScSk60] B. Schwizer, A. Sklar, *Statistical metric spaces*, Pacific J. Math., 10:313-334, 1960.

[ScSk83] B. Schwizer, A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, Elsevier-North Holland, New York, 1983.

Redni broj, **RBR**:			
Identifikacioni broj, **IBR**:			
Tip dokumentacije, **TD**:		monografski rad	
Tip zapisa, **TZ**:		štampa	
Vrsta rada, **VR**:		diplomski-master rad	
Autor, **AU**:		Ljubo Nedović	
Mentor, **MN**:		prof. dr Nebojša Ralević	
Naslov rada, **NR**:		Pseudo-operacije i primena u teoriji verovatnoće	
Jezik publikacije, **JP**:		srpski	
Jezik izvoda, **JI**:		srpski	
Zemlja publikovanja, **ZP**:		Srbija	
Uže geografsko područje, **UGP**:		Vojvodina	
Godina, **GO**:		2009	
Izdavač, **IZ**:		autorski preprint	
Mesto i adresa, **MA**:		FTN, Novi Sad	
Fizički opis rada, **FO**: (poglavlja/strana/citata/tabela/slika/grafika/priloga)		(3/45/35/0/0/0/0)	
Naučna oblast, **NO**:		Matematika	
Naučna disciplina, **ND**:		Primenjena matematika	
Predmetna odrednica/Ključne reči, **PO**:		pseudo-operacije, pseudo-integral, pseudo-verovatnoća	
UDK			
Čuva se, **ČU**:		u biblioteci Fakulteta tehničkih nauka	
Važna napomena, **VN**:			
Izvod, **IZ**:		U okviru rada trebalo je ispitati neke vrste binarnih operacija skupa realnih brojeva na kojima se zasnivaju odgovarajući tipovi pseudo-mera, pseudo-integrala i pseudo-verovatnoće. Zatim su razmotrene slučajne promenljive zasnovane na pseudo-verovatnoći, kao i neki tipovi njihovih konvergencija.	
Datum prihvatanja teme, **DP**:			
Datum odbrane, **DO**:			
Članovi komisije, **DB**:	Predsednik:	prof. dr Ilija Kovačević	
	Član:	prof. dr Aleksandar Takači	Potpis mentora
	Član, mentor:	prof. dr Nebojša Ralević	

Obrazac Q2.HA.04-05 - Izdanje 1

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	Monographic
Type of record, **TR**:	Printed
Contents code, **CC**:	Master thesis
Author, **AU**:	Ljubo Nedović
Mentor, **MN**:	Nebojša Ralević, PhD
Title, **TI**:	Pseudo-operations and their applications in probability theory
Language of text, **LT**:	serbian
Language of abstract, **LA**:	serbian
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Vojvodina
Publication year, **PY**:	2009
Publisher, **PB**:	authors reprint
Publication place, **PP**:	FTN, Novi Sad
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	(3/45/35/0/0/0/0)
Scientific field, **SF**:	Mathematics
Scientific discipline, **SD**:	Applied mathematic
Subject/Key words, **S/KW**:	pseudo-operations, pseudo-integral, pseudo-probability
UC	
Holding data, **HD**:	the library of the FTN
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	The aim of this thesis was to examine some binary operations on the set of real numbers and related types of pseudo-measures, pseudo-integrals and pseudo-probabilities. Further, there are examined appropriated random variables and some types of their convergentions.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	
Defended on, **DE**:	

Defended Board, **DB**:	President:	PhD Ilija Kovačević	
	Member:	PhD Aleksandar Takači	Mentor's sign
	Member, Mentor:	PhD Nebojša Ralević	

Form Q2.HA.04-05 - Publication 1