



UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA U
NOVOM SADU



Ljiljana Momirov

OPTIMIZACIJA PORTFOLIJA I OČEKIVANI EFEKTI OD AKTIVNOSTI INVESTIRANJA

MASTER RAD

Mentor rada: Prof. dr Nebojša Ralević

Novi Sad, 2015.



KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj, RBR :		
Identifikacioni broj, IBR :		
Tip dokumentacije, TD :	Monografski rad	
Tip zapisa, TZ :	Štampa	
Vrsta rada, VR :	Master rad	
Autor, AU :	Ljiljana Momirov	
Mentor, MN :	Prof. dr Nebojša Ralević	
Naslov rada, NR :	Optimizacija portfolija i očekivani efekti od aktivnosti investiranja	
Jezik publikacije, JP :	Srpski	
Jezik izvoda, JL :	Srpski	
Zemlja publikovanja, ZP :	Srbija	
Uže geografsko područje, UGP :	Vojvodina	
Godina, GO :	2015.	
Izdavač, IZ :	Autorski preprint	
Mesto i adresa, MA :	Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad	
Fizički opis rada, FO : (poglavlja/strana/ citata/tabela/slika/grafika/priloga)	(6,78,70,22,35,0,0)	
Naučna oblast, NO :	Matematika	
Naučna disciplina, ND :	Primenjena matematika	
Predmetna odredica/Ključne reči, PO :	Investiranje, rizici, portfolio, optimizacija portfolija, Markowitz-ov portfolio	
UDK		
Čuva se, ČU :	U biblioteci Fakulteta tehničkih nauka	
Važna napomena, VN :		
Izvod, IZ :	Osnovni zadatak master rada je istraživanje performansi primene optimizacije portfolija i očekivanih efekata od aktivnosti investiranja kako sa teorijskog, tako i sa praktičnog aspekta. Obuhvata analiziranje procesa investiranja, ulogu i važnost rizika, i optimizaciju procesa investiranja primenom Markowitz-ovog modela kao osnovnog modela optimizacije.	
Datum prihvatanja teme, DP :		
Datum odbrane, DO :		
Članovi komisije, KO :		
Predsednik:	Prof.dr Ilija Kovačević	Potpis mentora
Član:	Prof. dr Vladimir Đaković, docent	
Član, mentor:	Prof. dr Nebojša Ralević	



KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	Monographic
Type of record, TR :	Printed
Contents code, CC :	Master thesis
Author, AU :	Ljiljana Momirov
Mentor, MN :	Nebojša Ralević, PhD
Title, TI :	Portfolio optimization and expected effects from investing activities
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	Serbian
Country of publication, CP :	Serbia
Locality of publication, LP :	Vojvodina
Publication year, PY :	2015.
Publisher, PB :	Authors reprint
Publication place, PP :	Faculty of Tehnical Sciences, Novi Sad
Physical description, PD : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	(6,78,70,22,35,0,0)
Scientific field, SF :	Mathematics
Scientific discipline, SD :	Applied mathematics
Subject/Key words, S/KW :	Investment, risk, portfolio, optimization portfolio, Markowitz portfolio
UC	
Holding data, HD :	The library of the Faculty of tehcnical sciences
Note, N :	
Abstract, AB :	The main task of the master study is to investigate the performance of application portfolio optimization and the expected effects of the activities of investment both from a theoretical and from a practical point of view. It includes analysis of the investment process, the role and importance of risk, and optimize the investment process by applying Markowitz's model as the basic model optimization.
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	
Defended on, DE :	
Defended Board, DB :	President: PhD Ilija Kovačević
	Member: PhD Vladimir Đaković
	Member, Mentor: PhD Nebojša Ralević
	Menthor's sign

СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ:	Математика у техници
РУКОВОДИЛАЦ СТУДИЈСКОГ ПРОГРАМА:	Проф. др Јованка Пантовић

Студент:	Љиљана Момиров	Број индекса:	B1 6/2013
Област:	Примењена математика		
Ментор:	Проф.др Небојша Ралевић		

НА ОСНОВУ ПОДНЕТЕ ПРИЈАВЕ, ПРИЛОЖЕНЕ ДОКУМЕНТАЦИЈЕ И ОДРЕДБИ СТАТУТА ФАКУЛТЕТА ИЗДАЈЕ СЕ ЗАДАТАК ЗА МАСТЕР РАД, СА СЛЕДЕЋИМ ЕЛЕМЕНТИМА:

- проблем – тема рада;
- начин решавања проблема и начин практичне провере резултата рада, ако је таква провера неопходна;

НАСЛОВ МАСТЕР РАДА:

Оптимизација портфолија и очекивани ефекти од активности инвестирања

ТЕКСТ ЗАДАТКА:

Основни задатак мастер рада јесте истраживање перформанси примене оптимизације портфолија и очекиваних ефеката од активности инвестирања како са теоријског, тако и са практичног аспекта. Анализа у раду подразумева квантитативно и квалитативно истраживање емпиријских података, и то у функцији доношења оптималних одлука о инвестирању. Имајући у виду задатак рада, истраживање подразумева следеће:

- Анализирање процеса инвестирања са посебним акцентом на процес доношења одлука, поделу и структуру инвестиција;
- Разматрање и улога основних врста ризика кроз призму инвестирања и важност управљања истим;
- Анализа могућности оптимизације процеса инвестирања применом *Markowitz* модела као основног модела оптимизације;
- Обједињавање добијених резултата кроз анализу перформанси примене оптимизације портфолија са посебним акцентом на формирање оптималног портфолија инвестирања, имајући у виду што бољи однос приноса и ризика од активности инвестирања.

Руководилац студијског програма:	Ментор рада:
	

Примерак за: ☐ - Студента; ☐ - Ментора

Sadržaj

1	UVOD	3
1.1	Predmet istraživanja	3
1.2	Ciljevi istraživanja	3
1.3	Metodologija istraživanja	4
2	INVESTIRANJE KAO PROCES	5
2.1	Investicije - pojmovno određivanje, podela i proces	5
2.2	Novac u funkciji platežnog sredstva	7
2.2.1	Novčani tok kao osnov merenja performansi preduzeća	8
2.3	Finansijski sistem kao deo ukupnog ekonomskog i finansijskog napretka	9
2.3.1	Akcije - vlasničke hartije od vrednosti	10
2.3.2	Obveznice - dužničke hartije od vrednosti	11
2.3.3	Opcije - izvedene hartije od vrednosti	12
3	RIZIK KROZ PRIZMU INVESTIRANJA	15
3.1	Rizik - pojmovno određivanje i podela	15
3.2	Odabir manje rizične investicije na osnovu funkcije korisnosti	16
3.2.1	Odbojnost prema riziku i premija za rizik	18
3.3	Izračunavanje rizika primenom teorije verovatnoće	19
4	OPTIMIZACIJA PORTFOLIJA I OČEKIVANI EFEKTI OD AKTIVNOSTI INVE- STIRNJA	22
4.1	Osnovne stavke portfolio teorije	22
4.1.1	Matematičke osnove optimizacije portfolija	24
4.1.2	Diverzifikacija portfolija kao mera smanjenja rizika	25
4.1.3	Portfolio dijagram lema	26
4.2	Modeli za optimizaciju portfolija	28
4.2.1	Markowitz-ov portfolio kao osnovni model optimizacije	28
4.2.2	Markowitz-ov model sa nerizičnom aktivom	33
4.2.3	Sharpe-ov pojednostavljen model za analizu portfolija	35
4.3	Model cene kapitalne aktive	36
4.4	Teorija arbitražnog procenjivanja vrednosti	40
5	OPTIMIZACIJA PORTFOLIJA I OČEKIVANI EFEKTI OD AKTIVNOSTI INVESTI- RANJA - PRAKTIČAN PRIMER	43
5.1	Razvijenost i značaj trgovanja na tržištu Republike Srbije	43
5.1.1	Značajni segmenti trgovanja na Beogradskoj berzi	43
5.2	Odabir akcija za formiranje optimalnog portfolija na tržištu Republike Srbije	46
5.2.1	Analiza poslovanja kompanije Naftna industrija Srbije a.d., Novi Sad	47
5.2.2	Analiza poslovanja kompanije Aerodrom Nikola Tesla a.d., Beograd	49
5.2.3	Analiza poslovanja kompanije Alfa Plam a.d., Vranje	51
5.2.4	Analiza poslovanja kompanije Metalac a.d., Gornji Milanovac	52
5.2.5	Analiza poslovanja kompanije Beogradska autobuska stanica a.d., Beograd	54
5.2.6	Analiza poslovanja kompanije Aik banka a.d., Niš	55
5.3	Analiza očekivanog prinosa i rizika izabranih akcija	57
5.4	Formiranje Markowitz-ovog optimalnog portfolija	66

6	ZAKLJUČAK	71
6.1	Kvantitativne i kvalitativne preporuke	71
6.2	Pravci daljih istraživanja	72
7	Literatura	73

1 UVOD

1.1 Predmet istraživanja

Predmet istraživanja master rada je analiza mogućnosti optimizacije portfolija kroz posmatranje očekivanih efekata od aktivnosti investiranja. Poseban akcenat stavljen je na modernu portfolio teoriju i Markowitz-ov portfolio, koji je njen osnivač. Na osnovu dobijenih matematičkih osnova za formiranje optimalnog portfolija, fokus je usmeren ka primeni i odabiru odgovarajućih hartija od vrednosti na tržištu kapitala Republike Srbije.

U uvodnom delu rada date su osnove na kojima se zasniva predmet, cilj i metodologija istraživanja master rada.

U drugom delu izložene su bitne stavke investicija kroz pojmovno određivanje, podelu i proces. Tematika rada zasniva se na finansijskim investicijama koje obuhvataju ulaganja u finansijsku imovinu, odnosno u hartije od vrednosti. Celokupan proces investiranja, u smislu kako odabrati hartije od vrednosti uspešnih kompanija, opisan je kroz 11 zlatnih pravila osmišljenih od strane Vorena Bafeta, jednog od najvećih svetskih investitora. Predstavljene su i neke značajne hartije od vrednosti, i to akcije kao vlasničke, obveznice kao dužničke i opcije kao izvedene hartije od vrednosti.

U trećem delu prikazana je podela i značaj rizika kroz prizmu investiranja. Na osnovu funkcije korisnosti najbolje se pokazuje odnos investitora prema riziku, i daje zaključak da li je on odbojan prema riziku, neutralan ili očekuje premiju za preuzimanje većeg stepena rizika. Primenom teorije verovatnoće dobijaju se značajni podaci kao što su očekivanje proste slučajne promenljive, varijansa, standardna devijacija i koeficijent korelacije.

U četvrtom delu objašnjene su matematičke osnove portfolio optimizacije i očekivanih efekata od aktivnosti investiranja. Objašnjen je Markowitz-ov portfolio i dat jednostavan primer radi lakšeg razumevanja. Optimalan portfolio može se kreirati i kroz kombinaciju rizične i bezrizične aktive, koji je predstavljen pomoću Markowitz-ovog modela sa nerizičnom aktivom. Na osnovu njegove teorije Šarp je osmislio pojednostavljen model za analizu portfolija. Objašnjeni su i model cene kapitalne aktive koji opisuje odnos između rizika i očekivanog prinosa, i teorija arbitražnog procenjivanja vrednosti koja smatra da cena akcije zavisi od kretanja više faktora ili indeksa.

U petom delu urađena je analiza tržišta kapitala Republike Srbije i odabrane su akcije koje ulaze u formiranje optimalnog portfolija. Na osnovu perioda posmatranja kretanja cena akcija, od maja 2014. do maja 2015. godine, za svaku akciju pojedinačno određen je prinos, očekivani prinos, kovarijansa i standardna devijacija. Zatim su se dobijeni podaci iskoristili za određivanje očekivanog prinosa i rizika portfolija, odnosno za formiranje optimalnog portfolija.

U zaključnom delu data su mišljenja i razmatranja dobijena na osnovu istraživanja akcija na tržištu kapitala Republike Srbije.

1.2 Ciljevi istraživanja

Cilj master rada je da se kroz posmatranje i analiziranje podataka dođe do investicije koja će u budućem periodu doneti prihod investitoru. Kroz tok investiranja trebaju se uzeti u obzir i odgovarajući rizici, u zavisnosti od toga da li investitor preferira veći rizik radi ostvarivanja većeg prihoda ili je odbojan prema riziku. Zatim se od datih investicija formira optimalni portfolio koji ima odgovarajući očekivani prinos i rizik. U radu se za formiranje uzimaju hartije od vrednosti, a u praktičnom delu fokus je konkretno stavljen na akcije koje se nalaze na Beogradskoj berzi.

Prvobitan i krajnji cilj ishoda istraživanja optimizacije portfolija i očekivanih efekata od aktivnosti investiranja svodi se na kreiranje portfolija koji će za što veću maksimizaciju prinosa ostvariti što

manji rizik.

1.3 Metodologija istraživanja

Metodologija predstavlja nauku koja se bavi metodama naučnog istraživanja. Ona ustvari ispituje osnovne oblike naučnog istraživanja, sistemskog izlaganja istraženog predmeta i strukturu naučnog znanja. Metodologija prvenstveno počinje uočavanjem, istraživanjem, formulisanjem problema i postavljanjem hipoteza da bi se postiglo teorijsko rešavanje problema koje se kasnije primenjuje na praktičnom modelu.

Analiza predstavlja metod naučnog saznanja kojom se predmet istraživanja razlaže na sastavne činioce, deli na posebne momente i celina rastavlja na svoje delove. Dok sinteza predstavlja sistematičan postupak kojim se činioči dobijeni analizom spajaju u jedinstvenu celinu. Ona ustvari predstavlja metodski postupak koji je suprotan analizi, jer sinteza je misaoni put napredovanja od jednostavnog do najsloženijeg.¹

Metodologija master rada svodi se na matematičku metodu koja proučava kretanje cene hartija od vrednosti. Vršiti se analiziranje i istraživanje primene optimizacije portfolija, u čiji sastav ulaze kompanije koje se kotiraju na tržištu kapitala Republike Srbije, među kojima su Naftna industrija Srbije, Aerodrom Nikola Tesla, Alfa Plam, Metalac, Beogradska autobuska stanica i Aik banka.

¹ Stojadinović D. : „Osnovi naučnog rada”, Ekonomski fakultet, Priština, 2003.godina, 94.strana

2 INVESTIRANJE KAO PROCES

2.1 Investicije - pojamovno određivanje, podela i proces

Pojam investicija može se definisati na više načina u zavisnosti od toga u kom kontekstu se spominju, a predstavljaju ulaganja trenutnih sredstava, kako bi se kasnije ostvarila određena dobit. Potiču od latinske reči „Investire”, što znači ulaganje u neki posao ili preduzeće. Poznati francuski autor Herman Peumans izložio je sledeću definiciju investicija: „U opštem smislu, investiranje se sastoji u nabavci dobara, u smislu plaćanja sadašnje cene i cilju raspolaganja određenim prihodom u budućnosti. Odnosno, to je razmena nečeg izvesnog za niz nada raspoređenih u vremenu.”²

Investicije sa stanovišta predmeta i oblika ulaganja mogu se podeliti na:

Realne investicije: Obuhvataju ulaganja u realnu imovinu, u građevinsku opremu i mašine. Njihova namena sastoji se u produktivnom korišćenju za obavljanje određenih poslovnih aktivnosti. U realne investicije mogu se uključiti i ulaganja u obuku i usavršavanje kadrova, ulaganja u nabavku licenci i drugih prava.

Finansijske investicije: Obuhvataju ulaganja u finansijsku imovinu kao što su akcije, obveznice i druge hartije od vrednosti. Donose profit prodajom hartija od vrednosti po višoj ceni od nabavne.

Kvazi finansijske investicije: Obuhvataju ulaganja u nekretnine, investiranje u zlato i druge plemenite metale, ulaganje u umetnička dela i kolekcije. One imaju karakteristike finansijskih investicija ukoliko se ne stiču radi obavljanja produktivnih poslovnih aktivnosti.³

Tematika ovog rada zasniva se na temenima finansijskih investicija, a veoma interesantnu i poučnu definiciju dao je najuspešniji investitor XX veka i jedan od najbogatijih ljudi na svetu, Voren Bafet (*eng. Warren Buffett*), koja glasi: „Investiranje direktno zavisi od okolnosti. Lako je davati uopštene savete koji važe za sve okolnosti i sva vremena, ali takvi uopšteni saveti neće vam biti od velike koristi pri donošenju konkretnih odluka u svakodnevnoj praksi. Savet „Kupuj po niskoj, a prodaj po visokoj ceni”, važi za svako investiciono okruženje bez obzira da li je XXI vek a vi ste Voren Bafet koji kupuje hartije od vrednosti, ili je 500. godina pre nove ere a vi ste preteča Sokrata, Tales iz Mileta, koji bogatstvo stiče trgujući robom. Problem je u tome što, ako znate šta je niska, a šta visoka cena, onda vam takav savet nije ni potreban. A ako ne znate, opet vam nije potreban, jer nećete znati da ga iskoristite.”⁴

Investicioni proces obuhvata skup svih aktivnosti u celokupnom periodu investiranja, od stvaranja ideje za investiranje, pripreme, pa sve do konačne realizacije investicionog projekta. Jedna od najznačajnijih faza u procesu investiranja je donošenje odluke u šta investirati, po kojoj ceni i kako se izboriti sa neizvesnošću koje prati donošenje takvih odluka. Bafet, nakon svog dugogodišnjeg iskustva i uspeha, izložio je 11 osnovnih principa, nazvanih 11 zlatnih pravila,⁵ podeljenih u četiri grupe:

Pravilo poslovanja: Za pogodan ulazak u investiciju smatra se da je realna procena konkretnog posla bolja od vođenja apstraktnom idejom.

²Jovanović P. : „Upravljanje investicijama”, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 2006.godina, 4.strana

³Vukadinović P, Jović Z. : „Investicije”, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2012.godina, 14-20 strana

⁴Hegstrom R. : „Voren Bafet za sva vremena: principi stari, ekonomija nova”, Plato, Beograd, 2006.godina, 11.strana

⁵Hegstrom R. : „Voren Bafet za sva vremena: principi stari, ekonomija nova”, Plato, Beograd, 2006.godina, 99.strana

1. *Jednostavan i razumljiv posao* - Ako investitor poseduje hartije od vrednosti kompanije delatnosti koju ne razume, malo je verovatno da će napredovati na pravi način ili donositi mudre odluke.
2. *Stabilna istorija poslovanja* - Praksa je pokazala da najbolje prinose ostvaruju kompanije koje isti proizvod ili usluge nude godinama. Velike promene u poslovnoj orijentaciji ostvaruju pogodno tlo za velike poslovne greške.
3. *Povoljni izgledi na duži rok* - Ako kompanija obezbeđuje proizvod ili uslugu koja je potrebna i nema srodnu zamenu, tada ona može da poveća cenu svog proizvoda ili usluge bez straha da će to uticati na njenu zastupljenost na tržištu ili obim proizvodnje.

Pravila menadžmenta: Menadžeri koji vode kompaniju trebali bi da budu poštteni i veoma stručni ljudi.

1. *Racionalan menadžment* - Uspešno investiranje svodi se na racionalno razmišljanje menadžera i adekvatno rukovođenje hartijama od vrednosti.
2. *Iskren menadžment* - Predstavlja iskren izveštaj menadžera kako o postignutom uspehu tako i o počinjenim greškama, odnosno izveštaj o stvarnom učinku svog preduzeća bez skrivanja iza knjigovodstvenih normi.
3. *Institucionalni imperativ* - Veoma je rasprostranjena tendencija imitiranja onoga što rade drugi menadžeri bez ikakvog nastojanja da se pojedinac suprostavi ustaljenoj praksi.

Pravila finansijskog poslovanja: Obuhvataju finansijske odluke koje bi kompanija trebala da donese prilikom procesa investiranja.

1. *Prinosi od akcijskog kapitala* - Smatra se da je bolje fokusirati se na prinos od akcijskog kapitala, a ne na zaradu po akciji.
2. *Zarada vlasnika* - Izračunavanjem zarade vlasnika dobija se prava slika vrednosti posla, jer mogu se u međuvremenu pojaviti kapitalni izdaci.
3. *Prag profita* - Veliki poslovi predstavljaju loše investicije ako menadžment nije u stanju da prodaju pretvori u profit. Menadžeri poslova koji iziskuju velike troškove lako pronalaze način kako da nadograde troškove, dok menadžeri poslova koji iziskuju male troškove uvek pronalaze način kako da smanje troškove.

Tržišna pravila: Postupci investitora uslovljeni su razlikom između cene i vrednosti. Ako je cena manja od vrednosti po akciji, racionalni investitor ulazi u kupovinu. Ako je cena veća od vrednosti, razuman investitor će odustati od kupovine.

1. *Određivanje vrednosti posla* - Da bi se izračunala sadašnja vrednost nekog posla procenjuje se ukupna zarada koju posao ostvaruje sve dok traje, a zatim se diskontuje ukupna vrednost svedena na današnji dan.
2. *Kupovina po privlačnim cenama* - Treba se usredsrediti na poslove koji ostvaruju natprosečne prinose, a zatim ih kupiti po ceni ispod njihove realne vrednosti.

2.2 Novac u funkciji platežnog sredstva

Nastanak funkcije novca kao platežnog sredstva vezuje se za pojavu odloženog plaćanja odnosno za kreditne transakcije. U momentu kupovine robe, prodavac postaje poverilac, a kupac dužnik tako da i novac dobija drugu funkciju i postaje platežno sredstvo. U praksi, vreme isporuke robe i vreme naplate njene vrednosti se ne poklapaju.

Upoređujući model veoma je bitan prilikom odlučivanja po kojoj ceni i kamatnoj stopi uložiti novac da bi se taj ulog kasnije isplatio. Ako se npr. pretpostavi da osoba A od osobe B traži novčanu pozajmicu od 100€ i nudi da vrati za godinu dana 110€, odnosno sa kamatnom stopom 10%, i u isto vreme osoba B razmišlja da tih 100 € uloži u banku. Ako banka za godinu dana nudi 7% kamatne stope na 100€, tada je najbolje da osoba B pozajmi osobi A, a ako banka nudi 12%, tada je bolja opcija staviti novac u banku.

Kamata predstavlja naknadu koju dužnik plaća poveriocu za korišćenje novca u određenom obračunskom vremenskom periodu

$$A(t) = A(0) + I.$$

Zamenom I za $rtA(0)$ dobija se

$$A(t) = A(0) + rtA(0)$$

$$A(t) = (1 + rt)A(0)$$

gde je

$A(0)$ - *glavnica* (osnovni iznos koji je dužnik dužan poveriocu u trenutku $t = 0$),

$A(t)$ - *ukamaćena vrednost* (iznos glavnice zajedno sa obračunatom kamatom u vremenskom trenutku t),

r - *godišnja kamatna stopa*,

t - *vremenski period* (izražen u godinama),

I - *kamata*.

Za vremenski period t uzima se $\frac{\text{brojmeseci}}{12}$, za tačnu kamatu uzima se $t = \frac{\text{brojdana}}{365}$, dok za običnu kamatu $t = \frac{\text{brojdana}}{360}$.

Složena kamata podrazumeva kamatu koja se u jednom vremenskom periodu obračunava na iznos glavnice i na iznos kamate iz predhodnog obračunskog vremenskog perioda,

$$A(T) = A(n) = A(0)(1 + r)^n$$

gde je

$A(T)$ - *ukamaćena vrednost*,

$T = n$ - *vremenski period* (izražen u godinama).

Većina banaka sada učestalije obračunava i plaća kamatu, mesečno, kvartalno ili polugodišnje,

$$A(T) = A(0)(1 + r)^{mn}, \text{ za } r = \frac{r_a}{m}$$

gde je

r - **relativna kamatna stopa** (Stopa u jednom periodu kapitalisanja, gde kapitalisanje predstavlja pripisivanje kamate glavnici odnosno formiranje nove glavnice, a broj kapitalisanja iskazuje se na godišnjem nivou.),

r_a - godišnja kamatna stopa,
 m - broj kapitalisanja u jednoj godini.

Ekvivalentne kamatne stope su dve godišnje kamatne stope sa različitim brojem kapitalisanja koje daju jednake ukamaćene vrednosti na kraju godine

$$A(t) = A(0) \left(1 + \frac{r_a}{m_1}\right)^{m_1 n} = A(0) \left(1 + \frac{r_a}{m_2}\right)^{m_2 n} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{r_a}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{r_a}{m_2}\right)^{m_2}.$$

Komforna kamatna stopa je kamatna stopa kojom se sa m kapitalisanja postiže ista vrednost kao sa jednim obračunom kamate sa nominalnom kamatnom stopom r_a

$$r_k = (1 + r_a)^{\frac{1}{m}} - 1 \Leftrightarrow (r_k + 1)^m = 1 + r_a.$$

U datom periodu kapitalisanja sa relativnom stopom $\frac{r_a}{m}$ potrebno je s puta obračunati kamatu tako da se ostvari isti efekat kao pri jednom kapitalisanju i relativnoj stopi.⁶

Dakle, sadašnja vrednost (diskontovanje) dobija se kao

$$\text{sadašnja vrednost} = \frac{\text{buduća vrednost}}{1 + \text{kamatna stopa}},$$

a buduća vrednost (kamaćenje)

$$\text{buduća vrednost} = \text{sadašnja vrednost} (1 + \text{kamatna stopa})$$

2.2.1 Novčani tok kao osnov merenja performansi preduzeća

Postoji šire stanovište investicija zasnovanih na ideji rashodnih i prihodnih tokova koji se nazivaju **novčani tokovi**⁷ (*eng. cash flow*). Koncept novčanog toka prvi put pojavljuje se oko 1950. godine pri proceni hartija od vrednosti u kompanijama za proizvodnju i preradu nafte. Praćenje toka igra značajnu ulogu menadžerima, investitorima i kreditorima jer pokazuje finansijsku situaciju kompanije, odnosno uvid u iznos gotovine iz aktivnosti poslovanja, procenu da li kompanija ispunjava svoje obaveze, da li ulaže u nove investicije i potrebnu opremu, kao i to da li ostvaruje pozitivan ili negativan novčani tok.

Novčani tok obuhvata niz plaćanja kod kojih su intervali plaćanja jednaki, a sama pojedinačna plaćanja x_i (u i -tom trenutku) mogu se razlikovati

$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n).$$

Definicija 2.2.1. Buduća vrednost neto novčanog toka $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ uz kamatnu stopu r po intervalu plaćanja je (u n -tom trenutku tj. nakon n intervala)

$$A(T) = A(n) = x_0(1+r)^n + x_1(1+r)^{n-1} + x_2(1+r)^{n-2} + \dots + x_n.$$

Definicija 2.2.2. Sadašnja vrednost neto novčanog toka $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ uz kamatnu stopu r po periodu plaćanja je zbir diskontovanih vrednosti

$$A(0) = x_0 + x_1(1+r)^{-1} + \dots + x_n(1+r)^{-n}.$$

⁶Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University Press, New York, 1998.godina, 13-15 strane

⁷Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University Press, New York, 1998.godina, 19.strana

Sadašnja i buduća vrednost toka dužine T , ako je r_a godišnja stopa uz m kapitalisanja godišnje, gde je n ukupan broj kapitalisanja u vremenu T , a period plaćanja se poklapa sa periodom kapitalisanja je

$$A(0) = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{(1 + \frac{r_a}{m})^k} = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{(1 + r)^k}, r = \frac{r_a}{m}$$

$$A(n) = \sum_{k=0}^n x_k (1 + \frac{r_a}{m})^{n-k} = \sum_{k=0}^n x_k (1 + r)^{n-k}, r = \frac{r_a}{m}$$

Sadašnja i buduća vrednost toka uz pretpostavku da se plaćanja dešavaju u vremenskim trenucima $t_0, t_1, \dots, t_n$, gde je $x_k = x_k(t_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$ pri kontinuiranom kapitalisanju je

$$A(0) = \sum_{k=0}^n x(t_k) e^{-rt_k},$$

$$A(t_n) = \sum_{k=0}^n x(t_k) e^{r(t_n - t_k)}.$$

Definicija 2.2.3. Dva novčana toka su ekvivalentna ako se mogu transformisati jedan u drugi pomoću konstante idealne banke. (Ako je kamatna stopa nezavisna od vremena trajanja transakcije tada je u pitanju konstanta idealne banke.)

Teorema 2.2.4. Novčani tokovi $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ su ekvivalentni ako i samo ako su njihove sadašnje vrednosti za konstantu idealne banke sa stopom r jednake.

Dokaz. Neka je u_x sadašnja vrednost novčanog toka x i u_y sadašnja vrednost novčanog toka y . Tok x ekvivalentan je sa tokom $(v_x, 0, 0, \dots, 0)$ a y sa $(y_n, 0, 0, \dots, 0)$ ako i samo ako je $v_x = v_y$.

2.3 Finansijski sistem kao deo ukupnog ekonomskog i finansijskog napretka

Finansijski sistem⁸ čine one institucije koje vrše transfer između ljudi koji se odlučuju da uštede deo svog prihoda za budućnost i onih koji pozajmljuju novac da bi ga uložili u neki posao. Štednja i investiranje predstavljaju ključne elemente dugoročnog privrednog rasta. Finansijski sistem ima veoma značajnu ulogu u ekonomiji tako što stimuliše ekonomski rast i omogućuje efikasniji prinos sredstava. Najbitniji faktori koji učestvuju i pokazuju razvijenost finansijskog sistema su finansijsko tržište, finansijski elementi i finansijske institucije.

Finansijsko tržište⁹ predstavlja organizovan i uređen prostor dostupan javnosti, na kome se obavljaju transakcije ponude i tražnje za najrazličitijim **finansijskim instrumentima**. Tržišna transakcija predstavlja susret ponude i tražnje, a njene osnovne i najvažnije karakteristike su: zaključivanje po unapred poznatom vremenu, prostoru i pravilima. Potrebno je da postoji broj različitih organa koji imaju funkciju da kontrolišu rad tržišta. Transakcije na finansijskim tržištima mogu obavljati samo subjekti koji imaju dozvolu za trgovinu na tom tržištu i celokupno saldiranje prava obavlja se preko jedinstvenih obračuna i računa. Najzastupljenija klasifikacija finansijskih tržišta je:

- Tržište dužničkih instrumenata (*eng. Debt market*) i tržište vlasničkih instrumenata (*eng. Stock market*),

⁸Mankju G. : „Principi ekonomije”, Ekonomski fakultet Beograd, Beograd, 2008.godina, 566.strana

⁹Anđelić G. : „Investiranje”, FTN izdavaštvo, Novi Sad, 2006.godina, 25.strana

- Novčano tržište (*eng. Money market*) i tržište kapitala (*eng. Capital market*),
- Primarno (*eng. Primary market*) i sekundarno tržište (*eng. Secondary market*),
- Devizno tržište (*eng. Foreign exchange market*),
- Tržište derivata ili izvedenih finansijskih instrumenata (*eng. Derivates market*).

Najzastupljeniji su tržište kapitala i novčano tržište. Na tržištu kapitala najznačajniji finansijski instrumenti su **hartije od vrednosti** koje predstavljaju dokumente kojima se obećava isplata novca, kamate i zarade. Čine ih finansijski dužnički instrumenti koji imaju rok dospeća preko jedne godine i dugoročni finansijski instrumenti (akcije, obveznice, založnice) koje nemaju rok dospeća. Novčana tržišta sadrže gotovinske instrumente i dužničke hartije sa rokom dospeća do jedne godine (komercijalni papiri, depozitni sertifikati). Na tržištu novca podrazumevaju se samo one hartije od vrednosti koje je emitovala centralna banka, odnosno one hartije koje imaju saglasnost da se njima može trgovati na nacionalnom tržištu.

Primarno tržište je tržište gde kompanija prvi put emituje hartije od vrednosti, a sekundarno tržište predstavlja tržište na kojem se već emitovane hartije od vrednosti kompanija kupuju i prodaju. **Institucionalni investitori** mogu biti banke, osiguravajuća društva, kompanije koje posluju sa penzionim i zajedničkim fondovima, i individualni investitori.¹⁰

2.3.1 Akcije - vlasničke hartije od vrednosti

Akcija (*eng. stocks*)¹¹ predstavlja najpoznatiji i najznačajniji vlasnički finansijski instrument na tržištu kapitala. Posedovanje akcije znači posedovanje pismene isprave o vlasništvu nad sredstvima trajno uložених u preduzeće. Vlasnik ima pravo da odlučuje, dobija informaciju o radu kompanije, pravo na deo ostvarene dobiti i pravo na kupovinu novih akcija. Tržišna vrednost akcije je vrednost koja se utvrđuje na sekundarnom tržištu kapitala na bazi odnosa ponude i tražnje. Akciju treba kupiti ukoliko je njena tržišna cena niža od realne vrednosti, i isto tako, treba je prodati ukoliko je tržišna cena veća od realne vrednosti. Kompanije koje nemaju dovoljno finansijskih sredstava da obezbede osnovna sredstva za rad, mašine, istraživanja i razvoj uzimaju bankarske kredite ili emituju hartije od vrednosti, kojima se može slobodno trgovati. Na taj način kompanija prodaje deo vlasništva nekom pojedinačnom investitoru, odnosno kupcu akcija. Kada kompanija odluči da se na ovakav način finansira, ona to uglavnom radi posredstvom investicionih banaka koje imaju ulogu da izvrše javnu ponudu akcija na tržištu. To je jednokratna transakcija između kompanije i akcionara, odnosno kupca akcije. Uloga investicione banke jeste da savetuje firmu o broju akcija koju će emitovati i njihovu cenu.

Prinos od investiranja¹² u akcije meri se stopom rasta cene akcije u određenom periodu investiranja, odnosno

$$r_t = \frac{A(t) - A(0) + x_t}{A(0)}$$

gde je

r_t - stopa prinosa za dati period investiranja,

$A(t)$ - prodajna cena akcije,

$A(0)$ - kupovna cena akcije,

¹⁰Jeremić Z. : „Finansijska tržišta i finansijski instrumenti”, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2012.godina, 3-6 strana

¹¹Vunjak N. : „Investiciono i hipotekarno bankarstvo”, Ekonomski fakultet u Subotici, Subotica, 2013.godina, 289.strana

¹²Jeremić Z. : „Finansijska tržišta i finansijski posrednici”, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2012.godina, 300.strana

x_t - gotovinske dividende (predstavljaju deo profita koje poseduje akcionar).

Može se reći da stopa prinosa za dati period predstavlja kapitalnu dobit od akcije uvećanu za prinos od dividende pod pretpostavkom da je dividenda isplaćena na kraju perioda.

Najzastupljenije trgovanje akcijama je na **berzama** koje predstavljaju organizovano akcionarsko društvo i obezbeđuju likvidnost trgovine kao i formiranje cena akcija kompanije. Neke od najpoznatijih berza na svetu su: Njujorška berza (NYSE), Američka berza (AMEX), Londonska berza (LSE), Tokijska berza (TSE) i Pariska berza (NYSE), a u Srbiji Beogradska berza. U praktičnom delu rada izloženo je opširnije o akcijama, o kretanju njihove cene, kao i posmatranje određenih parametara prilikom kupovine.

2.3.2 Obveznice - dužničke hartije od vrednosti

Obveznice¹³ (*eng. bond*) predstavljaju dugoročne, neotkazive hartije od vrednosti koje investitori kupuju od države ili preduzeća. Odnosno, to je vrsta ugovora o zaduženosti u kojoj su navedene obaveze zajmoprimaoca (emitenta) prema vlasniku obveznice. Obveznica treba da sadrži oznaku da je obveznica, naziv i sedište emitenta i kupca, vrednost obveznice, visinu kamatne stope i datum dospeća (vreme do kojeg treba da se isplati dug u potpunosti). Podela obveznica zasniva se na sledećem: prema načinu ostvarivanja prava (na ime i na donosioca), prema sigurnosti naplate (na garantovane i negarantovane), prema prihodu koji donose investitoru (na kratkoročne (do godinu dana) i dugoročne), prema roku dospeća (na kratkoročne (do godinu dana) i dugoročne), prema valuti na koju glase (u Srbiji na dinarske i devizne), prema emitentima (obveznice javnog sektora i obveznice privatnog sektora).

Pretpostavlja se da obveznica ima *kupon* C koji predstavlja godišnji prihod koji ostvaruje vlasnik obveznice

$$C = Fp$$

gde je

F - nominalna vrednost obveznice,

p - godišnja fiksna kamatna stopa.

Kuponi se mogu isplaćivati više puta godišnje. Ako postoji m kapitalisanja onda se na kraju svakog perioda kapitalisanja isplaćuje iznos $\frac{C}{m}$. Period između dve isplate kupona vrednosti $\frac{C}{m}$ naziva se *kupon period*. Cena P po kojoj je obveznica prodana ne uključuje osvojenu kamatu, ona se mora dodati da bi se dobila prava cena po kojoj je obveznica kupljena. *Osvojena kamata* AI predstavlja iznos kada se kupoprodaja obavi između dva datuma dospeća kupona i novi vlasnik uz vrednost kupona dobije i kamatu za dane koji pripadaju predhodnom vlasniku koje mora da plati

$$AI = \frac{n_1}{n_C} \frac{C}{m}$$

gde je

n_1 - broj dana od dana naplate poslednjeg kupona do dana prodaje,

n_C - ukupan broj dana u tekućem kupon periodu.

¹³Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University press, New York, 1998.godina, 53.strana

Prinos do dospeća λ je kamatna stopa po kojoj je sadašnja vrednost toka koji se sastoji od niza kupona i nominalne vrednosti obveznice F jednaka prodajnoj ceni P .

Ako je nominalna i otkupna vrednost obveznice F , sa m kupona godišnje sa iznosom $\frac{C}{m}$, i ako do datuma dospeća ima još n kupon perioda, prodajna cena P daje prinos do dospeća λ određen kao

$$P = \frac{F}{(1 + \frac{\lambda}{m})^n} + \sum_{k=1}^n \frac{\frac{C}{m}}{(1 + \frac{\lambda}{m})^k}.$$

Teorema 2.3.1. *Cena obveznice koja ima još tačno n kupon perioda do datuma dospeća i sa prinosom λ zadovoljava*

$$P = \frac{F}{(1 + \frac{\lambda}{m})^n} + \frac{C}{m} \left(1 - \frac{1}{(1 + \frac{\lambda}{m})^n} \right)$$

gde je

F - nominalna vrednost,
 $\frac{C}{m}$ - vrednost kupona po kupon periodu,
 m - broj plaćanja u toku godine.

Sadašnji prinos obveznice predstavlja jednakost *sadašnji prinos* $= \frac{C}{P}$.

Definicija 2.3.2. *Nula kupon obveznice predstavljaju obveznice koje nemaju kupone i kod kojih nema isplate kamate do datuma dospeća, nego se i glavnica i kamata isplaćuju na datum dospeća*

$$P = F(1 + \lambda)^{-t}, t = \frac{n}{365}$$

$$\lambda = \left(\frac{F}{P} \right)^{\frac{365}{n}} - 1$$

gde je

P - prodajna cena,
 F - nominalna vrednost obveznice,
 λ - godišnji prinos,
 n - broj dana do dospeća obveznice.

2.3.3 Opcije - izvedene hartije od vrednosti

Opcija ¹⁴ (eng. *Option*) je izvedena hartija od vrednosti koja prerdstavlja pravo ali ne i obavezu da se na unapred dogovoren dan, po unapred dogovorenoj ceni kupi ili proda određena aktiva (roba, akcija,...). *Imalac opcije (kupac)* na datum dospeća odlučuje da li želi da izvrši opciju ili ne, odnosno da li želi da kupi ili proda utvrđenu podlogu, gde se pod podlogom podrazumeva aktiva na koju glasi opcija. *Pisac opcije (prodavac)* na datum dospeća ima obavezu da proda ili kupi podlogu ako imalac opcije želi da izvrši opciju. Postoje dve vrste opcija koje se nazivaju call i put opcije.

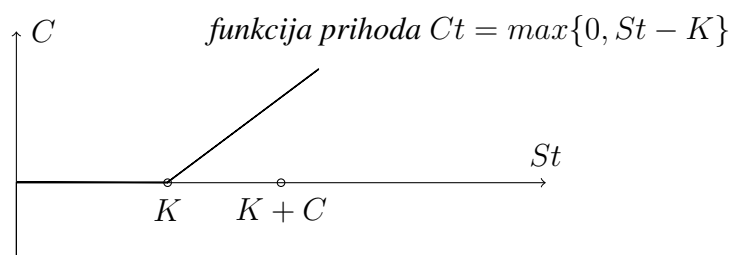
¹⁴Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University Press, New York, 1998. godina, 319. strana

Call opcija

Call opcija daje pravo da se kupi osnovna hartija od vrednosti po ceni K u momentu t . Da li će se iskoristiti to pravo, zavisi od St . Ako je $St > K$ treba izvršiti opciju, a ako je $St < K$ ne treba izvršiti opciju.

Kupovina call opcije

Sa porastom cene osnovne aktive, kupac (imalac) call opcije ima veću šansu za dobit. Što je veća cena osnovne aktive do datuma dospeća, to je i prihod veći pri izvršenju opcije. Sa padom cene osnovne aktive, kupac call opcije može očekivati gubitak. Dakle, kupovina call opcije je razumna pozicija kada se očekuje porast cene osnovne aktive. Kupovna call opcija prikazana je na Slici 2.1,



Slika 2.1. Kupovna call opcija

gde je

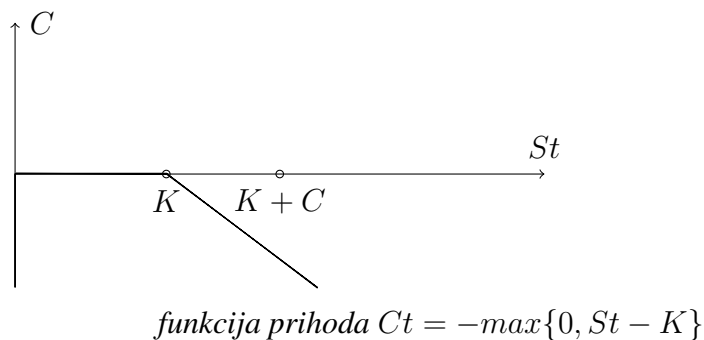
K - *strajk cena* (cena izvršenja) - ugovorena cena za kupovinu ili prodaju podloge za koju se izdaje opcija,

St - cena osnovne aktive koja je podloga za opciju,

C_t - cena call opcije u trenutku t .

Prodaja call opcije

Prodaja call opcije je prikladna pozicija kada se očekuje pad cene osnovne aktive. Prodajna call opcija prikazana je na Slici 2.2.

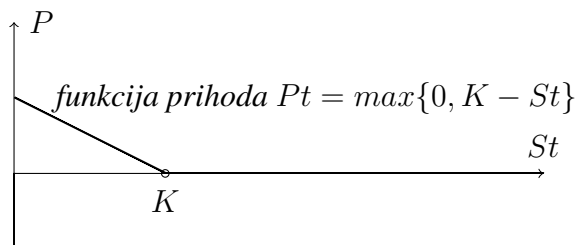


Slika 2.2. Prodajna call opcija

Put opcija

Put opcija daje pravo ali ne i obavezu da se proda osnovna hartija od vrednosti po ceni K u momentu t . Ako je $St < K$ treba izvršiti opciju, a ako je $St > K$ ne treba izvršiti opciju.

Kupovina put opcije



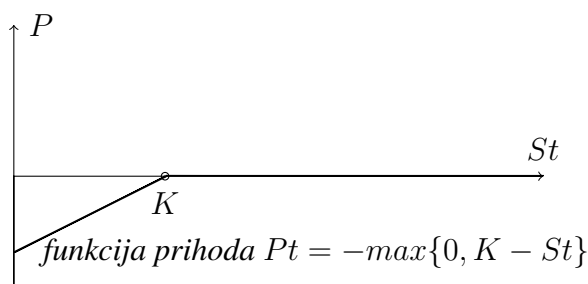
Slika 2.3. Kupovna put opcija

gde je

Pt - cena put opcije u trenutku t .

Što je cena osnovne aktive na isteku opcije niža, to je veći prihod kupca put opcije po izvršenju. A ako je cena osnovne aktive veća od izvršne cene na isteku datuma dospeća, kupac put opcije neće izvršiti opciju. Dakle, kupovina put opcije je odgovarajuća pozicija kada se očekuje pad cene osnovne aktive, koja je prikazana na Slici 2.3.

Prodaja put opcije



Slika 2.4. Prodajna put opcija

Prodaja put opcije odgovarajuća je pozicija kada se očekuje pad cene osnovne aktive. Prikazana je na Slici 2.4.

3 RIZIK KROZ PRIZMU INVESTIRANJA

3.1 Rizik - pojmovno određivanje i podela

Rizik ima višedimenzionalno značenje i najčešće se posmatra kao negativna pojava usled nepredviđenih događaja. Može se pojaviti u različitim delatnostima i utiče na uspešnost investiranja. Upravljanje rizicima veoma je bitno, podrazumeva razmišljanje o potencijalnim događajima i posledicama sa kojima se investitor susreće prilikom investiranja, odnosno koje mere treba da se preduzmu da bi se minimizirao rizik. Bafet je smatrao da se rizik ne zasniva na promeni cena nego na pogrešnoj proceni realne vrednosti. Prema njegovom mišljenju, pravi rizik jeste to da li će dobit od investicije nakon plaćenog poreza obezbediti investitoru kupovnu moć koju je imao pre ulaska u investiciju, plus skromnu zaradu.¹⁵ Upravljanje rizikom obuhvata četiri bitna elementa:¹⁶

- *Identifikacija rizika* - Proces utvrđivanja i klasifikacija različitih događaja koji mogu da imaju nepovoljan uticaj na investiciju.
- *Analiza i procena rizika* - Vršiti se detaljna analiza uticaja pojedinih događaja na rezultate poslovnog procesa, kao i procena verovatnoće nastajanja rizičnih događaja.
- *Razvijanje i implementacija programa menadžmenta rizika* - Kada su identifikovani svi potencijalni uzroci gubitka, potrebno je razviti i implementirati planove koji se bave potencijalnim gubicima pre nego što se oni dogode.
- *Kontrola rizika* - Proces kontrole obuhvata praćenje poslovnih procesa i različitih novonastalih događaja kako bi se što više smanjio rizik.

Investitori se najčešće susreću sa sledećim rizicima:¹⁷

Tržišni rizik odnosi se na moguću pojavu gubitka usled promene tržišne cene ili faktora koji se koriste prilikom procene finansijskih instrumenata. Reč je o rizicima gubitka koji mogu nastati promenom kamatne stope, deviznog kursa i cene akcijskog kapitala. Ova grupa rizika odnosi se na stabilnost zakonske regulative, postojanje i funkcionisanje tržišnih institucija, politički rizik i mnogi drugi.

Kamatni rizik je rizik mogućnosti nastanka negativnih efekata na finansijski rezultat i odnosi se na stabilnost funkcionisanja finansijskog sistema u smislu cene kapitala, odnosno ponude i tražnje za kapitalom. Promene kamatnih stopa direktno utiču na obim ponude i tražnje za kapitalom, i na aktivnost investiranja. Zbog toga banke analiziraju različite aspekte rizika kamatnih stopa i razvijaju tehnike za upravljanje ovim rizicima.

Devizni rizik nastaje usled promene deviznog kursa domaće ili strane valute i može prouzrokovati pozitivne ili negativne događaje. Prilikom donošenja odluka o investiranju veoma je bitno osigurati se od gubitka izazvanog kretanjem kursa.

Rizik likvidnosti odnosi se na nemogućnost pribavljanja kapitala po povoljnim uslovima, ili kada je prodaja kapitala moguća samo po ceni koja je ispod očekivane. Pod rizikom likvidnosti podrazumeva se i verovatnoća da finansijske institucije nemaju dovoljno finansijskih sredstava da podmire

¹⁵Hegstrom R. : „Voren Bafet za sva vremena: principi stari, ekonomija nova”, Plato, Beograd, 2006.godina, 173.strana

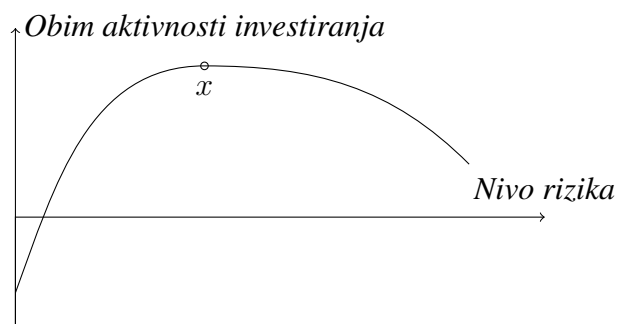
¹⁶<http://www.psinvest.rs/sr/risk-management> (pristupljeno: 21.04.2015. godine)

¹⁷Anđelić G., Đaković V. : „Osnove investicionog menadžmenta”, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2010.godina, 443.strana

svoje obaveze.

Terminski rizik obuhvata postojanje određenog vremenskog perioda između investiranja i efekata od uložених sredstava, koji nepredviđenim događajima znato može uticati na tok i efikasnost investicija.

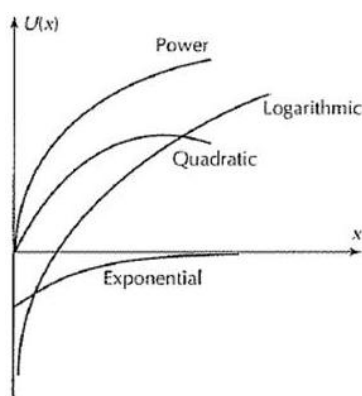
Odnos između aktivnosti investiranja i visine rizika može se prikazati šematski. Racionalan investitor spreman je da prihvati onaj nivo rizika sve dok je obim aktivnosti investiranja u porastu, odnosno do tačke x , prikazanoj na Slici 3.1. Zatim obim aktivnosti investiranja opada srazmerno sa porastom nivoa rizika.¹⁸



Slika 3.1. Rizik i investiranje¹⁸

3.2 Odabir manje rizične investicije na osnovu funkcije korisnosti

Funkcija korisnosti¹⁹ (eng. *utility function*) je način da se opiše preferencija investitora i služi da definiše vezu između prinosa i nivoa ostvarene korisnosti. Svaka rastuća funkcija $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, može se posmatrati kao funkcija korisnosti. Ako postoje investicije sa istim očekivanim prinosom, a različitim rizikom, funkcija korisnosti daje prioritet investiciji sa manjim rizikom. Ako postoji isti rizik, a različiti prinosi investicija, funkcija korisnosti prednost daje investiciji sa većim prinosom. Najjednostavnija funkcija korisnosti je *linearna funkcija korisnosti* $U(x) = ax$, za koju se kaže da je rizik neutralna, odnosno investitor donosi odluku samo na osnovu očekivane vrednosti. Značajne su i:



Slika 3.2. Funkcije korisnosti²⁰

¹⁸ Anđelić G., Đaković V. : „Osnove investicionog menadžmenta”, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2010.godina, 449.strana

¹⁹ Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University Press, New York, 1998. godina, 228-237 strane

²⁰ Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University press, New York, 1998.godina, 229.strana

Eksponecijalna funkcija korisnosti: $U(x) = -e^{-\alpha x}$, gde je α parametar koji pokazuje nivo odbacivanja rizika.

Logaritamska funkcija korisnosti: $U(x) = \ln(x)$, $x > 0$.

Stepena funkcija korisnosti: $U(x) = bx^b$, $b \leq 1$, $b \neq 0$, za $b = 1$ je rizik neutralna.

Kvadratna funkcija korisnosti: $U(x) = x - bx^2$, $b > 0$, $x < \frac{1}{2b}$.

Funkcija korisnosti definiše relaciju preferencije, tj. može se reći u smislu da investitor više preferira aktivu x u odnosu na y ili obrnuto.

Definicija 3.2.1. ²¹ *Relacija preferencije $\succeq$ je binarna relacija na skupu X koja ima osobine:*

1. Refleksivnost: $\forall x \in X, x \succeq x$
2. Kompletnost $\forall x, y \in X, x \succeq y$ ili $x \preceq y$
3. Tranzitivnost $\forall x, y, z \in X, x \succeq y, y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$

Definicija 3.2.2. *Neka je $\succeq$ relacija preferencije na skupu X . Funkcija $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ za koju važi*

$$x \succeq y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y)$$

naziva se funkcija korisnosti relacije preferencije. Takođe važi i

$$x \succ y \Leftrightarrow U(x) > U(y),$$

$$x \sim y \Leftrightarrow U(x) = U(y).$$

Definicija 3.2.3. *Relacija striktno preferencije $\succ$ definiše se na sledeći način:*

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succeq y \wedge \neg(y \succeq x).$$

Definicija 3.2.4. *Relacija indiferentnosti $\sim$ definiše se na sledeći način:*

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succeq y \wedge y \succeq x.$$

Pretpostavlja se da investitor ima $x, y, z \in X$ aktive kao moguće izbore. Relacija preferencije $\succeq$ na skupu X može imati i sledeće osobine:

Monotonost: $\forall x, y \in X, x \geq y \Rightarrow x \succeq y$

Konveksnost: $\forall x, y, z \in X, x \succeq z \wedge y \succeq z \Rightarrow \alpha x + (1 - \alpha)y \succeq z, \alpha \in (0, 1)$

Definicija 3.2.5. *Funkcija $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ je konkavna ako važi:*

$$\forall x, y \in D, x \neq y, \forall \alpha \in [0, 1], U(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y)$$

Tada važi:

$U''(x) > 0$ - investitor preferira rizik,

$U''(x) = 0$ - indiferentan je,

$U''(x) < 0$ - izbegava rizik.

²¹Lužanin Z. : „Matematički modeli u ekonomiji”, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, pisani materijal, 2007.godina

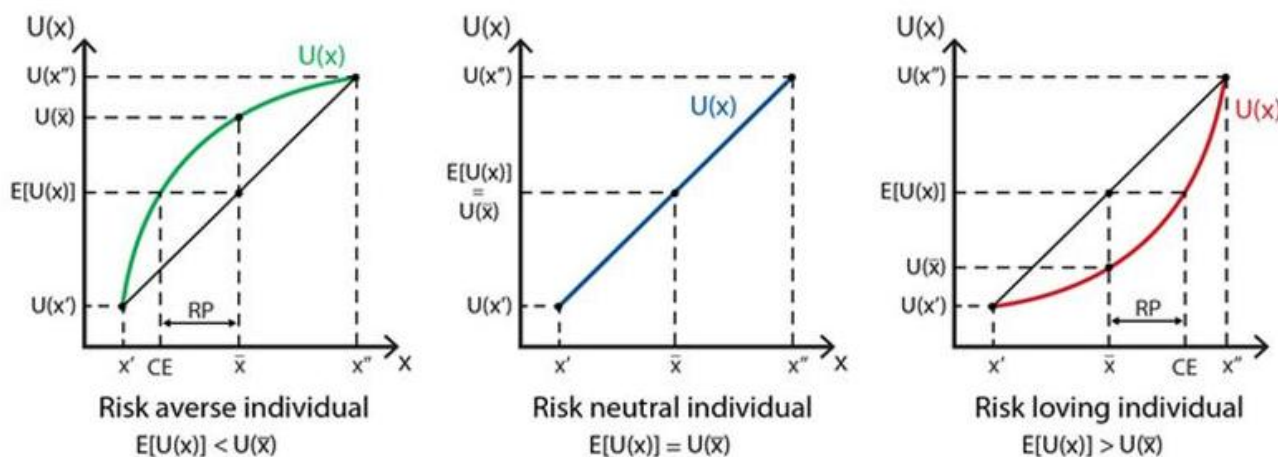
Na osnovu *Definicije 3.2.2.* važi Jensenova nejednakost $U[E(x)] \geq E[U(x)]$, odnosno korisnost prosječne vrednosti koja se smatra sigurnim brojem je veća od očekivane korisnosti slučajne promenljive.

Za određivanje cene strategije koristi se **sigurni ekvivalent**, koji predstavlja vrednost neizvesnog događaja merenog iznosom sigurnog dobitka, tj.

$$U(c) = E(U(x)).$$

3.2.1 Odbojnost prema riziku i premija za rizik

Funkcija korisnosti najbolje pokazuje odnos investitora prema riziku. Razlikuju se investitori koji imaju odbojnost prema riziku, neutralnost prema riziku i oni koji očekuju premiju za rizik. Ako postoje dve alternative koje imaju isti prinos, investitor odbojan na rizik će izabrati korisnost sigurnog događaja u odnosu na korisnost slučajnog događaja. Investitor neutralan na rizik je fokusiran na očekivane prinose i ne posvećuje veliku pažnju nastanku rizika. Dok investitor koji je sklon riziku postavlja sebi jasne ciljeve i veruje i očekuje da će uz veći step rizika ostvariti i veće prinose.



Slika 3.3. Stav investitora prema riziku²²

Postoji apsolutni i relativni koeficijent averzije prema riziku koji meri stepen odbojnosti.²³

Apsolutni koeficijent odbojnosti prema riziku: $A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$

Relativni koeficijent odbojnosti prema riziku: $R(x) = xA(x)$

Ako se apsolutni i relativni koeficijent averzije prema riziku primene na neke od ranije pomenutih funkcija korisnosti dobija se:

Linearna: $U(x) = ax$, odnosno $U'(x) = a$, $U''(x) = 0$, sledi

$$A(x) = 0.$$

Eksponencijalna: $U(x) = -e^{-\alpha x}$, $U'(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $U''(x) = -\alpha^2 e^{-\alpha x}$, sledi

$$A(x) = -\frac{-\alpha^2 e^{-\alpha x}}{\alpha e^{-\alpha x}} = \alpha$$

²²<http://www.policonomics.com/lp-risk-and-uncertainty2-risk-aversion> (pristupljeno: 3.5.2015.godine)

²³Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University Press, New York, 1998. godina, 233. strana

$$R(x) = x\alpha.$$

Logaritamska: $U(x) = \ln(x)$, odnosno $U'(x) = \frac{1}{x}$, $U''(x) = -\frac{1}{x^2}$, sledi

$$A(x) = \frac{1}{x}$$

$$R(x) = 1.$$

3.3 Izračunavanje rizika primenom teorije verovatnoće

Prilikom procene rizika često se javlja pitanje verovatnoće, odnosno koliko je verovatno da će se neki događaj desiti i koliki će biti njegov stepen rizika. Ako se neki neizvestan događaj ponavlja dovoljan broj puta, učestalost ishoda treba da odrazi verovatnoću mogućih ishoda.

Neka je X prosta slučajna promenljiva

$$X = \sum_{k=1}^n x_k I A_k$$

gde je $\Omega = \sum_{i=1}^n A_i$, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ skup realnih brojeva i

$$A_1 = \{\omega | X(\omega) = x_1\}$$

$$A_2 = \{\omega | X(\omega) = x_2\}$$

...

$$A_n = \{\omega | X(\omega) = x_n\}$$

Ω - skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta

ω - elementi skupa Ω

A - slučajan događaj koji je podskup elementarnih događaja Ω

Eksperiment u kojem se registruju vrednosti za X ponavlja se N puta. Neka se u tih N puta vrednost X_k registruje N_k puta, $k = 1, 2, \dots, n$, pri čemu $\sum_{k=1}^n N_k = N$. Tada je srednja registrovana vrednost u tih N ponavljanja jednaka

$$x_1 \frac{N_1}{N} + \dots + x_n \frac{N_n}{N}. \quad (3.1)$$

Kako je $\frac{N_k}{N}$ relativna učestalost događaja $A_k = \{\omega | X(\omega) = x_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, sledi da se (3.1) grupiše oko broja

$$x_1 P(A_1) + \dots + x_n P(A_n), \quad (3.2)$$

kada se broj ponavljanja eksperimenta neograničeno povećava, gde P predstavlja verovatnoću događaja A .

Broj (3.2) označava se sa $E(X)$ i naziva **očekivanje proste slučajne promenljive** X . Dakle,

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(A_k) = \sum_{k=1}^n x_k p(x_k).$$

Definicija 3.3.1. Momenat reda k , $k \in \mathbb{N}$, slučajne promenljive X je $E(X^k)$. Centralni momenat reda k , $k \in \mathbb{N}$, slučajne promenljive X je

$$E\left((X - E(X))^k\right).$$

Definicija 3.3.2. Centralni momenat reda 2 slučajne promenljive X naziva se **varijansa (disperzija)** slučajne promenljive X i označava se sa $var(X)$ ili $\sigma^2(X)$,

$$var(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Teorema 3.3.3. $var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

Dokaz.

$$\begin{aligned} var(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2E(X)X + E^2(x)\right) = \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X) \end{aligned}$$

Definicija 3.3.4. Standardna devijacija (standardno odstupanje) slučajne promenljive X definiše se kao

$$\sigma(X) = \sqrt{E\left((X - E(X))^2\right)}.$$

Definicija 3.3.5. Neka je X slučajna promenljiva sa očekivanjem $E(X)$ i varijansom $var(X)$. Standardizovana (normalizovana) slučajna promenljiva X^* je

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{var(X)}} = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

Teorema 3.3.6. Neka je X^* standardizovana slučajna promenljiva. Tada je

$$E(X^*) = 0 \text{ i } var(X^*) = 1.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} E(X^*) &= E\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{var(X)}}\right) = \frac{E(X - E(X))}{\sqrt{var(X)}} = 0 \\ var(X^*) &= var\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{var(X)}}\right) = \frac{var(X - E(X))}{var(X)} = \frac{var(X)}{var(X)} = 1 \end{aligned}$$

Investitor donosi konačnu odluku o kupovini hartije od vrednosti na osnovu očekivane vrednosti, standardne devijacije i spremnosti na rizik. Varijansa slučajne promenljive predstavlja odstupanja pojedinih vrednosti slučajne promenljive od očekivane vrednosti i može se smatrati merom pouzdanosti pa time i merom rizika, neizvesnosti. A standardna devijacija je u stvari kvadratni koren iz varijanse. Što je varijansa ili standardna devijacija veća, veće je i odstupanje ukupnog prinosa od očekivane vrednosti, i obrnuto.

Definicija 3.3.7. Očekivanje slučajne promenljive (X, Y) , ukoliko postoji, je uređen par

$$E(X, Y) = (E(X), E(Y)),$$

gde su $E(X)$ i $E(Y)$ očekivanja slučajnih promenljivih X i Y .

Varijansa slučajne promenljive (X, Y) , ukoliko postoji, je uređen par

$$D(X, Y) = (D(X), D(Y)),$$

gde su $D(X)$ i $D(Y)$ varijanse slučajnih promenljivih X i Y .

Definicija 3.3.8. Kovarijansa slučajne promenljive (X, Y) je

$$\sigma_{XY} = \text{cov}(X, Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Definicija 3.3.9. Koeficijent korelacije slučajne promenljive (X, Y) je

$$\rho_{XY} = \text{cov}(X^*, Y^*) = \text{cov}\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{\text{var}(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{\text{var}(Y)}}\right)$$

gde su X^* i Y^* standardizovane slučajne promenljive.

Važi

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Slučajne promenljive X i Y su *nekorelisane* ako je $\rho_{XY} = 0$, *pozitivno korelisane* ako je $\rho_{XY} > 0$ i *negativno korelisane* ako je $\rho_{XY} < 0$.

Teorema 3.3.10. Za koeficijent korelacije ρ_{XY} važi $|\rho_{XY}| \leq 1$.²⁴

Kovarijansa daje informaciju o tome u kom stepenu se dve slučajne promenljive kreću zajedno naviše ili naniže. Pozitivna pokazuje da se stope prinosa za obe investicije kreću u istom smeru, odnosno kada je stopa ukupnog prinosa na jednu investiciju veća od njenog proseka, tada to važi i za drugu. Negativna pokazuje da kada je stopa ukupnog prinosa jedne investicije iznad njenog proseka, stopa ukupnog prinosa druge je ispod njenog proseka, i obrnuto. Dok u slučaju kada je kovarijansa približno jednaka nuli, pozitivni i negativni proizvodi odstupanja međusobno se potiru, odnosno nema pravilnosti između kretanja stopa ukupnog prinosa za posmatrane akcije. Koeficijent korelacije takođe meri stepen u kome dve serije brojeva imaju tendenciju da se zajedno kreću naviše ili naniže. Ako je koeficijent korelacije $+1$ tada se stope prinosa dve opcije investiranja kreću naviše i naniže u potpunom skladu. A ako je koeficijent korelacije -1 tada je rast stope prinosa na opcije jednog investiranja u potpunom skladu praćen padom stope prinosa na opcije druge investicije, i obrnuto.²⁵

²⁴Rajter Ćirić D. : „Verovatnoća”, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Novi Sad, 2009.godina, 96-119 strana

²⁵Anđelić G., Đaković V. : „Osnove investicionog menadžmenta”, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2010.godina, 462.strana

4 OPTIMIZACIJA PORTFOLIJA I OČEKIVANI EFEKTI OD AKTIVNOSTI INVESTIRNJA

4.1 Osnovne stavke portfolio teorije

Skup ili kombinacija različitih hartija od vrednosti, koje su u vlasništvu finansijskih institucija ili individualnih lica, naziva se **portfolio** (eng. *Portfolio*). U širem smislu, portfolio sadrži akcije, obveznice, opcije, zlatne sertifikate, nekretnine i ostala sredstva koja imaju vrednost i za koju se očekuje da će je zadržati.

U analizi, selekciji i menadžmentu portfolioja, statistika i verovatnoća koriste se u svim fazama investiranja i predstavljaju neizostavni preduslov efikasnog portfolio menadžmenta. Različite statističke tehnike i metode vrlo su važne za praktičan pristup portfolioju, dok se teorijski pristup kreiranja portfolioja zasniva se na matematičko-statističkim osnovama usmerenih ka cilju obezbeđivanja dovoljne količine relevantnih informacija. Spremnost investitora da preuzme određeni nivo rizika investiranja zavisi od strukturalnih karakteristika portfolioja, rokova dospeća i očekivane stope prinosa. Na taj način portfolio postaje nezavisna varijabla iz razloga što od njegovih karakteristika u velikoj meri zavisi pravac i način donošenja odluka o investiranju. Savremena teorija investiranja daje veliki značaj tržišnoj kapitalizaciji rizika i prinosa od investiranja, jer se na taj način obezbeđuju značajni parametri i pokazatelji kvaliteta određenog portfolioja. Portfolio je sa druge strane i zavisna varijabla, iz razloga što struktura i oblici finansijskih instrumenata koji čine portfolio u velikoj meri zavise od uspešnog ispunjenja unapred definisanih ciljeva koji se mogu ostvariti kreiranjem određenog portfolioja.

Portfolio teorija ustvari predstavlja analitički pristup selekciji i menadžmentu portfolioja, i može se hronološki podeliti na *tradicionalnu* (klasničnu) i *modernu portfolio teoriju*. Poslednjih godina javlja se i *post-moderna portfolio teorija*, koja je još uvek nedovoljno afirmisana.

Tradicionalna teorija polazi od jednostavnih kvantitativnih i kvalitativnih analiza, gde investitori sami kreiraju svoj portfolio bez ulaska u dublje tehničke analize rizika i prinosa. Zasniva se na sledećim osnovnim pravilima:

- investitori preferiraju viši u odnosu na niži prinos,
- podizanje prinosa moguće je uz preuzimanje dodatnog rizika,
- sposobnost ostvarivanja viših prinosa zavisi od procene i stope tolerancije rizika od strane investitora,
- diverzifikacijom može se umanjiti iznos rizika.

Tradicionalna portfolio teorija uopšteno, nedovoljno precizno i često subjektivno vrši odabir hartija od vrednosti koje trebaju da čine efikasan portfolio, rukovodeći se potrebama i sklonostima investitora.

Moderna portfolio teorija polazi od pretpostavke da investitori imaju averziju prema riziku, odnosno da kada postoje dve investicije sa jednakim prinosom, uvek biraju onu manje rizičniju. Osniivač i predstavnik ove teorije je Markowitz, dobitnik Nobelove nagrade za ekonomiju 1990. godine. Osnovne pretpostavke moderne portfolio teorije su:

- svaki investitor prilikom konstruisanja portfolioja gleda da za što bolju minimizaciju rizika ostari što veći prihod,

- investitori procenjuju rizičnost investicija na osnovu funkcije korisnosti,
- investitori donose odluke na osnovu očekivanog prinosa i rizika.

Najnovija i ne tako poznata post-moderna portfolio teorija, polazi od različitog pristupa varijabiliteta prinosa i samo varijabilitet naniže u odnosu na očekivanu vrednost stope prinosa tretira se kao rizik, dok odstupanja prinosa naviše, u odnosu na očekivanu vrednost, donosi dobitak investitoru. Ova teorija deli rizik na dobar i loš, a za meru lošeg rizika uzima poluvarijansu. Post-moderna teorija polazi od realnijeg sagledavanja šta investitori doživljavaju kao pravi rizik i uvodi novi parametar minimalno prihvatljiv prinos.²⁶

U radu zastupljena je moderna portfolio teorija, a više o Markowitz-ovom modelu nalazi se u poglavlju 4.2.1 *Markowitz-ov portfolio kao osnovni model optimizacije*.

Još jedna podela portfolija vrši se na osnovu aktivne i pasivne strategije upravljanja portfolijom. Bafet smatra da menadžeri koji aktivno upravljaju portfolijom neprestano kupuju i prodaju veliki broj običnih akcija. Njihov zadatak je da zadovolje želje svojih klijenata i da portfolio bude pozitivan u odnosu na tržište u celini. Dok, indeksno investiranje zasniva se na pasivnom upravljanju portfolijom, odnosno sintaksom „Kupi i drži”, koje podrazumeva prikupljanje, a zatim držanje portfolija običnih akcija, sačinjenog tako da prati kretanje određene vrste indeksa.²⁷ Indeks predstavlja prosek cena hartija od vrednosti izražen u odnosu na ranije utvrđenu tržišnu vrednost. Jedan od najpoznatijih indeksa je *Standard & Poor's 500 akcijski indeks* (eng. *Standard and Poor's 500 Stock Index*), skraćeno S&P 500. Obuhvata velike industrijske, transportne i finansijske kompanije. Svaka kompanija ponderisana je indeksom njene ukupne tržišne vrednosti kao procentom ukupne tržišne vrednosti svih kompanija. Još jedan od značajnijih je *Dow Jones Industrijski prosek* (eng. *Dow Jones Industrial Average*), skraćeno DJIA, koji pokazuje kretanje cena akcija na Njujorškoj berzi. Sastoji se od 30 velikih industrijskih kompanija i obuhvata akcije veoma visokog kvaliteta.



Slika 4.1. Analiza S & P 500 i Dow Jones-a u poslednjih 10 godina²⁸

²⁶Anđelić G., Đaković V. : „Osnove investicionog menadžmenta”, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2010. godina, 457-467 strane

²⁷Hegstrom R. : „Voren Bafet za sva vremena: principi stari, ekonomija nova”, Plato, Beograd, 2006.godina, 141.strana

²⁸<http://www.finance.yahoo.com> (pristupljeno 8.5.2015.godine)

4.1.1 Matematičke osnove optimizacije portfolija

Portfolio se sastoji od nekoliko različitih hartija od vrednosti, odnosno od n aktiva $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$. Svaka aktiva S_i , za $i = 1, 2, \dots, n$ ima prinos r_i , očekivani prinos $\bar{r}_i$ i standardnu devijaciju σ_i^2 . Ako se pretpostavi da postoje dva vremenska perioda, $t = 0$ (kupovina aktive S_0) i $t = 1$ (prodaja aktive S_1), tada je stopa prinosa investicije jednaka

$$r_i = \frac{S_1 - S_0}{S_0}. \quad (4.1)$$

Ako postoji n aktiva sledi da je $\sum_{i=1}^n S_{0i} = S_0$, gde je S_{0i} iznos investiran u i -tu aktivu, koji se može predstaviti kao udeo u ukupnoj početnoj investiciji, odnosno

$$S_{0i} = \omega_i S_0, i = 1, 2, \dots, n$$

gde su

$$\omega_i - \text{težinski koeficijenti (ponderi) za koje važi } \sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$

Portfolio se izračunava kao suma proizvoda pojedinačnih težinskih koeficijenata i aktive, tj.

$$\pi = \omega_1 S_1 + \omega_2 S_2 + \dots + \omega_n S_n = \sum_{i=1}^n \omega_i S_i.$$

Stopa prinosa portfolija r_π posmatra se kao slučajna promenljiva, jer je neizvestan ishod na kraju

$$E(r_\pi) = \bar{r}_\pi = \omega_1 \bar{r}_1 + \omega_2 \bar{r}_2 + \dots + \omega_n \bar{r}_n = \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i.$$

Varijansa (standardna devijacija) portfolija σ_π^2 može se izračunati kao suma težinskih koeficijenata i kovarijansi

$$\begin{aligned} \sigma_\pi^2 &= E(r_\pi - E(r_\pi))^2 = E[(r_\pi - \bar{r}_\pi)^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_i r_i - \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_i r_i - \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i\right)\left(\sum_{j=1}^n \omega_j r_j - \sum_{j=1}^n \omega_j \bar{r}_j\right)\right] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_i (r_i - \bar{r}_i)\right)\left(\sum_{j=1}^n \omega_j (r_j - \bar{r}_j)\right)\right] \\ &= E\left[\sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right] = \sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}. \end{aligned}$$

Standardna devijacija portfolija σ_π^2 može se predstaviti i pomoću kovarijansne matrice G i vektora težinskih koeficijenata.

$$G = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{21} & \dots & \sigma_{n1} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\omega = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_n]^T$$

Odnosno, $\sigma_\pi^2 = \omega^T G \omega$. Isto tako na osnovu matričnog zapisa, očekivani prinos portfolija može se zapisati kao $\bar{r}_\pi = \omega^T \bar{r}$, gde je

$$\bar{r} = [\bar{r}_1 \quad \bar{r}_2 \quad \dots \quad \bar{r}_n]^T.$$

Pod značenjem reči konstruisati portfolio podrazumeva se da se pronađu težinski koeficijenti ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Ako je $\omega_i > 0$ trebalo bi investirati u akciju S_i , ako je $\omega_i = 0$ akcija S_i ne pripada portfoliju, a za $\omega_i < 0$ dobija se takozvana kratka prodaja. **Kratka prodaja** (eng. *Short selling*) obuhvata prodaju aktive koju investitor ne poseduje i smatra se pozajmljenom. Ostvaruje profit ako cena pozajmljenih sredstava opada, dok u suprotnom nastaje gubitak.²⁹

4.1.2 Diverzifikacija portfolija kao mera smanjenja rizika

Pod **diverzifikacijom portfolija** podrazumeva se raspoređivanje ulaganja na veći broj aktiva sa namerom da se smanji ukupan rizik portfolija.

Neka su $S_1, \dots, S_n$ aktive koje su nezavisne jedna od druge, tj. $\sigma_{ij} = 0, i \neq j$ (nekorelisane). Pod pretpostavkom da sve aktive imaju istu varijansu sledi da je $\sigma_i^2 = \sigma^2$, za $i = 1, 2, \dots, n$. Tada je $\omega_i = \frac{1}{n}$, za $i = 1, 2, \dots, n$, u smislu da se n -ti deo kapitala ulaže u svaku od aktiva. Na osnovu toga očekivani prinos portfolija dat je kao

$$\bar{r}_\pi = \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \bar{r}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i,$$

a varijansa portfolija kao

$$\begin{aligned} \sigma_\pi^2 &= E[(r_\pi - \bar{r}_\pi)^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_i r_i - \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_i (r_i - \bar{r}_i)\right)\left(\sum_{j=1}^n \omega_j (r_j - \bar{r}_j)\right)\right] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (r_i - \bar{r}_i)\right)\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} (r_j - \bar{r}_j)\right)\right] \\ &= E\left[\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{n^2} (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} (r_i - \bar{r}_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{n^2} (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{n^2} \sigma_{ij}. \end{aligned}$$

Ako se pretpostavi da je $\bar{r} = m$, nezavisno od n , odgovarajući očekivani prinos je

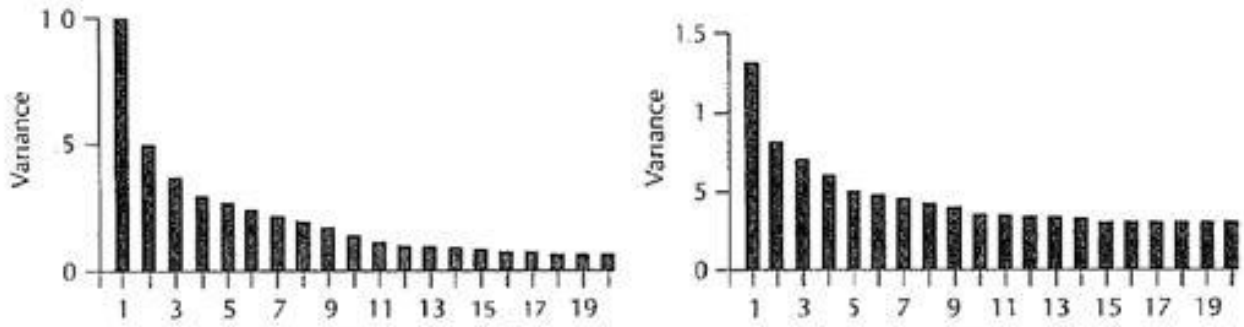
$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i = \frac{1}{n} n m = m,$$

dok je varijansa jednaka

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \sigma_i^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

²⁹Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University press, New York, 1998.godina, 138-150 strane

Navedeno važi uz pretpostavku da su aktive nekorelisane ($\sigma_{ij} = 0, i \neq j$), što je prikazano na prvom grafiku na slici 4.2. U tom slučaju varijansa portfolija može biti veoma mala.



Slika 4.2. Diverzifikacija portfolija³⁰

Dok je situacija drugačija u slučaju kada su korelisane, što je prikazano na drugom grafiku na Slici 4.2, tj. pretpostavlja se da je kovarijansa $cov(r_i, r_j) = \rho_{ij} = 3\sigma^2, i \neq j$,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (r_i - \bar{r}_i) \right] = \frac{1}{n^2} E \left[\left(\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r}_i) \right) \left(\sum_{j=1}^n (r_j - \bar{r}_j) \right) \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{ij} \sigma_{ij} = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=j} \sigma_{ij} + \sum_{i \neq j} \sigma_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{n^2} [n\sigma^2 + 3(n^2 - n)\sigma^2] \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + 3\sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{-2\sigma^2}{n} + 3\sigma^2.\end{aligned}$$

Ovaj slučaj pokazuje (za $\sigma^2 = 1$) da nije moguće uticati na smanjenje $3\sigma^2$ koliko god da ima aktiva.

Dakle, ukoliko su prinosi nekorelisani, diverzifikacijom se može smanjiti varijansa portfolija dodavajući veliki broj aktiva n , dok ukoliko su korelisani, diverzifikacijom se mogu smanjiti samo do određene granice.³⁰

4.1.3 Portfolio dijagram lema

Svaki portfloio $\pi = \sum_{i=1}^n \omega_i S_i$ sa očekivanim prinosom $\bar{r}_\pi = \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i$ i standardnom devijacijom $\sigma_\pi^2 = \omega^T G \omega$ može se predstaviti u $\bar{r} - \sigma$ ravni.

Lema 4.1.1.³¹ Kriva u $\bar{r} - \sigma$ ravni definisana nenegativnom kombinacijom S_1 i S_2 leži unutar trouglaone oblasti određene tačkama S_1, S_2 i A . Tačka A nalazi se na r osi i ima koordinatu $\left(0, \frac{\bar{r}_1 \sigma_2 + \bar{r}_2 \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)$.

Dokaz.

Neka postoje dve hartije od vrednosti S_1 i S_2 tako da je $\pi = \omega_1 S_1 + \omega_2 S_2$ i $\omega_1 + \omega_2 = 1$, zabranjuje se kratka prodaja tj. $\omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0$. Ako se uvede smena $\omega_1 = 1 - \alpha, \omega_2 = \alpha$, za $\alpha \in [0, 1]$ dobija se

$$\pi = (1 - \alpha)S_1 + \alpha S_2 \quad (4.2)$$

³⁰Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University press, New York, 1998.godina, 152.strana

³¹Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University press, New York, 1998.godina, 154.strana

a tada je i očekivani prinos portfolija

$$\bar{r}_\pi = \omega_1 \bar{r}_1 + \omega_2 \bar{r}_2 = (1 - \alpha) \bar{r}_1 + \alpha \bar{r}_2 \quad (4.3)$$

kao i standardna devijacija

$$\sigma_\pi^2 = (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \sigma_{12} + \alpha^2 \sigma_2^2 \quad (4.4)$$

Uvođenjem koeficijenta korelacije $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$, odnosno $\sigma_{12} = \rho \sigma_1 \sigma_2$, $\rho \in [-1, 1]$, u (4.4) sledi

$$\begin{aligned} \sigma_\pi^2 &= (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \rho \sigma_1 \sigma_2 + \alpha^2 \sigma_2^2, \\ \sigma_\pi &= \sqrt{(1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \rho \sigma_1 \sigma_2 + \alpha^2 \sigma_2^2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Standardna devijacija portfolija σ_π može se posmatrati kao

$$\sigma_\pi = \sigma_\pi(\rho) \quad (4.6)$$

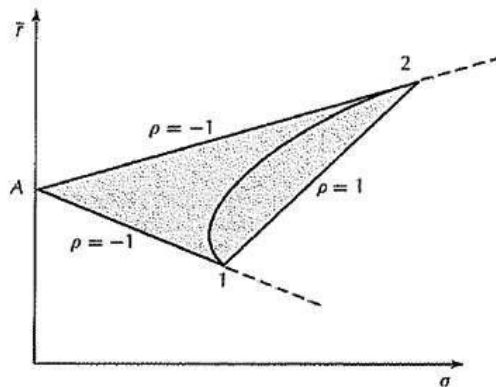
Na osnovu *Teoreme (3.3.10.)*, postoje dve tačke za ρ .

- $\rho = 1$ (gornja granica σ_π^*)

$$\begin{aligned} \sigma_\pi^* &= \sqrt{(1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \rho \sigma_1 \sigma_2 + \alpha^2 \sigma_2^2} \\ &\stackrel{(4.5), (4.6)}{=} \sqrt{(1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \sigma_1 \sigma_2 + \alpha^2 \sigma_2^2} \\ &= \sqrt{((1 - \alpha) \sigma_1 + \alpha \sigma_2)^2} = (1 - \alpha) \sigma_1 + \alpha \sigma_2 \end{aligned}$$

- $\rho = -1$ (donja granica σ_π^*)

$$\begin{aligned} \sigma_\pi^* &\stackrel{(4.5), (4.6)}{=} \sqrt{(1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 - 2\alpha(1 - \alpha) \sigma_1 \sigma_2 + \alpha^2 \sigma_2^2} \\ &= \sqrt{((1 - \alpha) \sigma_1 - \alpha \sigma_2)^2} = |(1 - \alpha) \sigma_1 - \alpha \sigma_2| \\ &= \begin{cases} (1 - \alpha) \sigma_1 - \alpha \sigma_2, & \alpha < \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ \alpha \sigma_2 - (1 - \alpha) \sigma_1, & \alpha > \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \end{cases} \end{aligned}$$



Slika 4.3. Portfolio dijagram lema³²

³²Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University press, New York, 1998.godina, 153.strana

Za $\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$ dobija se

$$\begin{aligned}\bar{r}_\pi^* &\stackrel{(4.3)}{=} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right) \bar{r}_1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right) \bar{r}_2 \\ &= \bar{r}_1 - \frac{\bar{r}_1 \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} + \frac{\bar{r}_2 \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\bar{r}_1 \sigma_1 + \bar{r}_1 \sigma_2 - \bar{r}_1 \sigma_1 + \bar{r}_2 \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ &= \frac{\bar{r}_1 \sigma_2 + \bar{r}_2 \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\end{aligned}$$

Sledi da je $\sigma_\pi = 0$, tj. postoje dve prave koje se seku u bezrizičnoj aktivni A.

4.2 Modeli za optimizaciju portfolija

Na savremenim finansijskim tržištima profesionalni investitori koriste razne metode za optimizaciju portfolija, odnosno za optimizaciju odnosa prinosa i rizika ulaganja, u zavisnosti od sklonosti investitora ka prihvatanju većeg ili manjeg rizika. Ukoliko je izbor hartija od vrednosti dobro napravljen analiziranjem raznih parametara, takav portfolio imaće veću šansu da ostvari dobre prinose. Stoga je dobro urađena fundamentalna analiza ključni faktor uspeha u investiranju na finansijskom tržištu, jer omogućava kvalitetne ulazne parametre za kreiranje optimalnog portfolija. Svetski portfolio menadžeri razlikuju se po stilovima investiranja, po sposobnosti predviđanja kretanja cena aktiva, kao i po izboru dobrih kompanija koje još nisu toliko poznate na tržištu. Kreiran portfolio treba stalno pratiti merenjem njegovih performansi i vršiti reviziju njegovog sastava.

Dakle, ono što je ključno za optimizaciju portfolija jeste da se napravi dobra selekcija hartija od vrednosti koje ulaze u portfolio, i da se uz što veću minimizaciju rizika ostvari što veći prinos. Još jedan način kreiranja optimalnog portfolija je kombinacija rizične i bezrizične aktive, uzimajući u obzir akcije kao najrizičnije finansijske instrumente, obveznice kao manje rizične i bezrizične instrumente tržišta novca.³³ Bezrizični finansijski instrumenti su oni koji imaju standardno odstupanje 0, i ako u praksi često ne postoje, za njih se smatraju krediti koji imaju fiksnu kamatu ili državne obveznice.

Neki od značajnijih modela za optimizaciju portfolija, koji se odnose na povezanost i ravnotežu preuzetog rizika i očekivanog prinosa su Markowitz-ov portfolio kao najznačajniji i Šarпов pojednostavljen model analize portfolija na osnovu Markowitz-ove teorije. Za optimizaciju portfolija bitna je i funkcija korisnosti koja je predstavljena u poglavlju 3.2 *Odabir manje rizične investicije na osnovu funkcije korisnosti*, koja pokazuje kako da se od dve aktive izabere ona koja je manje rizičnija. Kasnije se javlja model cene kapitalne aktive, koji opisuje odnos između rizika i očekivanog prinosa, i teorija arbitražnog procenjivanja vrednosti, koja smatra da cena akcija zavisi od kretanja više faktora ili indeksa.

4.2.1 Markowitz-ov portfolio kao osnovni model optimizacije

U martu 1952. godine, u stručnom časopisu *The Journal of Finance*, objavljen je članak pod nazivom „Selekcija portfolija” (eng. „*Portfolio Selection*”) napisan od strane studenta američkog univerziteta, Harija Markowitz-a (eng. *Harry Markowitz*). Članak je sadržao 14 strana, 4 strane teksta i 10 strana sačinjenih od grafikona i jednačina, i smatralo se da predstavlja početak moderne portfolio teorije. Kao ekonomista, Markowitz je podrazumevao da se odnos između ostvarene dobiti i rizika

³³ Jeremić Z. : „Finansijska tržišta i finansijski instrumenti”, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2012.godina, 296.strana

može brojčano izraziti, i da se na taj način može odrediti stepen rizika koji se zahteva za različite nivoe ostvarene dobiti. Došao je do zaključka da se natprosečna dobit ne može ostvariti bez preuzimanja natprosečnog rizika. Da bi obrazložio svoj zaključak uveo je pojam granice efikasnosti, koja predstavlja liniju na kojoj svaka tačka definiše presek potencijalne nagrade i odgovarajućeg stepena rizika. Najefikasniji portfolio je onaj koji ostvaruje najveću dobit za dati stepen rizika, a neefikasan portfolio obuhvata izlaganje riziku bez ostvarivanja odgovarajućeg nivoa dobiti. Markowitz je 1959. godine objavio svoju prvu knjigu „Selekcija portfolija - efikasna diverzifikacija investicija” (eng. „*Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*”) zasnovanu na njegovoj doktorskoj disertaciji. U njoj detaljno je objasnio svoje ideje, koristio je standardnu devijaciju kao meru rizika, varijansu kao odstupanje od proseka, i smatrao je da što je veće odstupanje od proseka, veći je i rizik. Uveo je pojam kovarijanse, tako da se rizik portfolija ne predstavlja odstupanjem pojedinačne hartije od vrednosti, nego kovarijansom hartija od vrednosti ukupnog portfolija. Kao što je već definisano u poglavlju 3.3 *Izračunavanje rizika primenom teorije verovatnoće*, dve grupe hartija od vrednosti imaju visok stepen kovarijanse kada se njihove cene kreću u istom pravcu, a mali stepen kovarijanse, kada se kreću u različitim pravcima. Prema Markowitz-u, investitor prvo treba da odredi nivo rizika koji može da podnese, a zatim da sačini efikasan diverzifikovan portfolio hartija od vrednosti malog stepena kovarijanse.³⁴

Definicija 4.2.1. ³⁵ *Pretpostavlja se da problem nalaženja optimizacije funkcije $f(x)$, koja zavisi od više nepoznatih gde je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, treba da zadovolji uslove $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Dakle, razmatra se sledeći problem:*

$$\min_x f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \left(\max_x f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Za njegovo rešavanje posmatra se tzv. **Lagranžova funkcija**

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Uslovi optimalnosti dobijaju se tako što se parcijalni izvodi izjednače sa nulom.

Na osnovu Definicije 4.2.1, pretpostavlja se da postoji n aktiva, sa očekivanim prinosom $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$, kovarijansom σ_{ij} , za $i, j = 1, 2, \dots, n$, težinskim koeficijentima $\omega_i, i = 1, 2, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$. Rešava se sledeći problem:

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i = \bar{r}_\pi$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

³⁴Hegstrom R. : „Voren Bafet za sva vremena: principi stari, ekonomija nova”, Plato, Beograd, 2006.godina, 166-168 strana.

³⁵Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University press, New York, 1998.godina, 482.strana

gde je $\frac{1}{2}$ dodata samo radi lakšeg izračunavanja.

Ovaj problem optimizacije rešava se razmatranjem Lagranžove funkcije

$$L(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i - \bar{r}_\pi \right) - \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n \omega_i - 1 \right)$$

gde su λ_1 i λ_2 odgovarajući Langražovi množitelji.

Uzimaju se u obzir samo dve nepoznate radi lakšeg rada, odnosno

$$L = \frac{1}{2} (\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_1 \omega_2 \sigma_{12} + \omega_2 \omega_1 \sigma_{21} + \omega_2^2 \sigma_2^2) - \lambda_1 (\bar{r}_1 \omega_1 + \bar{r}_2 \omega_2 - \bar{r}_\pi) - \lambda_2 (\omega_1 + \omega_2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_1} = \frac{1}{2} (2\omega_1 \sigma_1^2 + \omega_2 \sigma_{12} + \omega_2 \sigma_{21}) - \lambda_1 \bar{r}_1 - \lambda_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_2} = \frac{1}{2} (\omega_1 \sigma_{12} + \omega_1 \sigma_{21} + 2\omega_2 \sigma_2^2) - \lambda_1 \bar{r}_2 - \lambda_2$$

Na osnovu $\omega_{12} = \omega_{21}$ i izjednačavanja sa nulom, sledi

$$\omega_1 \sigma_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2 \sigma_{12} + \frac{1}{2} \omega_2 \sigma_{21} - \lambda_1 \bar{r}_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \omega_1 \sigma_{12} + \frac{1}{2} \omega_1 \sigma_{21} + \omega_2 \sigma_2^2 - \lambda_1 \bar{r}_2 - \lambda_2 = 0$$

Dobijen je sistem linearnih jednačina gde su $\omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2$ četiri nepoznate.

Definicija 4.2.2. Portfolio od n aktiva, sa težinskim koeficijentima $\omega_i, i = 1, 2, \dots, n$ i Langražovim množiteljima λ_1 i λ_2 za efikasan portfolio (dozvoljena je kratka prodaja) zadovoljava uslove optimizacije:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \omega_j - \lambda_1 \bar{r}_i - \lambda_2 &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i &= \bar{r}_\pi \\ \sum_{i=1}^n \omega_i &= 1 \end{aligned}$$

Primer 4.1:

Pretpostavlja se da tri nekorelisane aktive imaju varijansu 1 i očekivani prinos $\bar{r}_1 = 1, \bar{r}_2 = 2, \bar{r}_3 = 3$, odnosno

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0.$$

Tada na osnovu Definicije 4.2.2. sledi

$$\omega_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\omega_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\omega_3 - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\omega_1 + 2\omega_2 + 3\omega_3 = \bar{r}_\pi$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$$

Na osnovu prve tri jednačine mogu se izraziti težinski koeficijenti

$$\omega_1 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\omega_2 = 2\lambda_1 + \lambda_2$$

$$\omega_3 = 3\lambda_1 + \lambda_2$$

a zatim se uvrste u druge dve jednačine

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2(2\lambda_1 + \lambda_2) + 3(3\lambda_1 + \lambda_2) = \bar{r}_\pi$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

odnosno,

$$\lambda_1 = \frac{\bar{r}_\pi}{2} - 1$$

$$\lambda_2 = \frac{7}{3} - \bar{r}_\pi$$

$$\omega_1 = \frac{4}{3} - \frac{\bar{r}_\pi}{2}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{3}$$

$$\omega_3 = \frac{\bar{r}_\pi}{2} - \frac{2}{3}.$$

Tada je rizik portfolija jednak

$$\sigma_\pi = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{\frac{\bar{r}_\pi}{2} - 2\bar{r}_\pi + \frac{7}{3}}.$$

Na osnovu izvoda rizika portfolija, dobija se da je očekivani prinos portfolija $\bar{r}_\pi = 2$

$$\sigma'_\pi = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\bar{r}_\pi}{2} - 2\bar{r}_\pi + \frac{7}{3}}}(\bar{r}_\pi - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{r}_\pi = 2.$$

$$\sigma(2) = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

odnosno,

$$\omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Definicija 4.2.3. ³⁶Zabranom kratke prodaje, tj. $\omega_i \geq 0$ javlja se optimizacioni problem

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i = \bar{r}_\pi \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \\ \omega_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Na osnovu Markowitz-a, mogu se pokazati i još neki izvedeni modeli za optimizaciju portfolija:³⁷

MMR - Model minimalnog rizika

$$\begin{aligned} \min(\omega^T G \omega) \\ \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 1. \end{aligned}$$

MRP - Model minimalnog rizika i maksimalnog prinosa

$$\begin{aligned} \min(-\bar{r}^T \omega + \rho \omega^T G \omega) \\ \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 1, \end{aligned}$$

gde je ρ koeficijent rizika, što je ρ veći rizik je manji.

MFP - Model fiksnog prinosa

$$\begin{aligned} \min(\omega^T G \omega) \\ \bar{r}^T \omega = \bar{r}_\pi \\ \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 1, \end{aligned}$$

gde je $\bar{r}_\pi$ fiksni prinos.

MFP - Model fiksnog prinosa modifikovani

$$\begin{aligned} \min(\omega^T G \omega + \frac{\rho}{\bar{r}_\pi^2} (\bar{r}^T \omega - \bar{r}_\pi)^2) \\ \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 1. \end{aligned}$$

MMR - Model maksimalnog prinosa uz fiksni rizik

$$\begin{aligned} \min(-\bar{r}^T \omega) \\ \omega^T G \omega = V_\alpha \\ \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 1, \end{aligned}$$

gde je V_α fiksni rizik.

MMR - Model maksimalnog prinosa uz fiksni rizik modifikovani

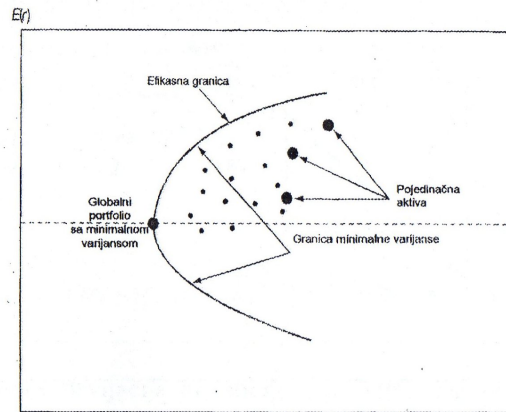
$$\min(-\bar{r}^T \omega + \frac{\rho}{V_\alpha^2} (\omega^T G \omega - V_\alpha)^2)$$

³⁶Markowitz H. : „The Journal of finance”, Vol.7, No. 1, American Finance Association, 1952.godina, 78.strana

³⁷Krejić N. : „Finansijska matematika 2”, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, pisani materijal, 2011.godina

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 1.$$

Markowitz smatra da se svaki portfolio može predstaviti na *efikasnoj granici* koja pokazuje investitoru najbolji mogući prinos za dati nivo rizika koji može da očekuje od portfolija. Potrebno je utvrditi rizik-prinos mogućnosti koje su investitorima dostupne u procesu investiranja, a određene su granicom minimalne varijanse rizične aktive. Ova granica predstavlja najniže moguće varijanse koje se mogu dobiti za očekivani prinos portfolija.



Slika 4.4. Efikasna granica i portfolio sa minimalnom varijansom³⁸

Na osnovu očekivanog prinosa, varijanse i kovarijanse može se izračunati portfolio sa minimalnom varijansom. Svi portfoliji koji se nalaze na granici minimalne varijanse, od globalnog portfolija sa minimalnom varijansom pa prema gore, obezbeđuju najbolje rizik-prinos karakteristike i ulaze u skup efikasnog portfolija. Deo granice koja se nalazi ispod globalnog portfolija sa minimalnom varijansom naziva se *efikasna granica rizične aktive*. Donji deo granice minimalne varijanse nije efikasan. Efikasnost portfolija podrazumeva uključivanje bezrizične aktive, a više o tome nalazi se u poglavlju 4.2.2 *Markowitz-ov model sa nerizičnom aktivom*.³⁸

4.2.2 Markowitz-ov model sa nerizičnom aktivom

Neka je dato n rizičnih aktiva $S_1, S_2, \dots, S_n$, gde aktivna S_i ima očekivani prinos $\bar{r}_i$ i rizik σ_i , i nerizična aktivna S stopu prinosa r_f i rizik $\sigma_i = 0$. Tada važi sledeća teorema:

Teorema 4.2.4. ³⁹ (Teorema o jednom fondu)

Ako postoji n rizičnih aktiva i aktivna bez rizika, tada se svaki efikasan portfolio može predstaviti pomoću jednog rizičnog portfolija određenog tačkom M tržišnog portfolija i aktivom bez rizika.

Odnosno, za rizičnu aktivu S_1 , očekivani prinos je $\bar{r}_1$ i rizik σ_1 , a za nerizičnu aktivu S , očekivani prinos je r_f i rizik $\sigma = 0$. Na osnovu (4.2) i (4.3) sledi

$$\pi = \alpha S_1 + (1 - \alpha) S$$

$$\bar{r}_\pi = \alpha \bar{r}_1 + (1 - \alpha) r_f$$

³⁸ Anđelić G., Đaković V. : „Osnove investicionog menadžmenta”, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2010.godina, 471.strana

³⁹ Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University press, New York, 1998.godina, 162-168 strane

$$\sigma_\pi = \alpha \sigma_1$$

Tržišni portfolio M je portfolio koji u sebi sadrži udeo aktive S_i , koji je jednak ukupnoj vrednosti aktiva S_i na tom tržištu.

Teorema 4.2.5. ³⁹(Teorema o dva fonda)

Svaki efikasan portfolio može se prikazati kao linearna kombinacija dva fiksirana efikasna portfolija.

Teorema 4.2.6. ³⁹Za bezrizičnu stopu r_f težinski koeficijenti $\omega^M = [\omega_1^M, \dots, \omega_n^M]$ tržišnog portfolija M zadovoljava jednakost:

$$\omega = \frac{G^{-1}(\bar{r} - r_f e)}{e^T G^{-1}(\bar{r} - r_f e)}.$$

Dokaz.

Koeficijent pravca tangente skupa efikasnog portfolija za nerizičnu aktivu dat je kao

$$k = \frac{\bar{r}_\pi - r_f}{\sigma_\pi} = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i (\bar{r}_i - r_f)}{\left(\sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.7)$$

Tada se problem pronalaženja tržišnog portfolija za težinske koeficijente $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ svodi na

$$\max(k)$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1. \quad (4.8)$$

Na osnovu (4.7), (4.8) i (4.2.1) dobija se

$$L(\omega, \lambda) = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i - r_f}{(\omega^T G \omega)^{\frac{1}{2}}} - \lambda \left(\sum_{i=1}^n \omega_i - 1 \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

tj.

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = \frac{1}{(\omega^T G \omega)^{\frac{1}{2}}} + \left(\bar{r} - \frac{(\omega^T \bar{r} - r_f) G \omega}{\omega^T G \omega} \right) - \lambda e = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \omega^T e = 0.$$

Sređivanjem dobija se

$$\bar{r} - \frac{(\omega^T G \omega) G \omega}{\omega^T \bar{r} - r_f} = \lambda (\omega^T G \omega)^{\frac{1}{2}} e$$

$$1 - \omega^T e = 0$$

odnosno,

$$\sigma^2 \bar{r} - (\bar{r}_M - r_f) G \omega = \lambda \sigma^3 e. \quad (4.9)$$

$$\omega^T e = 1. \quad (4.10)$$

Uvođenjem (4.10) u (4.9) sledi

$$\sigma^2 \bar{r} - (\bar{r}_M - r_f) \sigma^2 = \lambda \sigma^3.$$

Sledi da je $\lambda = \frac{r_f}{\sigma}$, za $\sigma \neq 0$. Tada je (4.9) jednako kao

$$\begin{aligned} \sigma^2 \bar{r} - (\bar{r}_M - r_f) G \omega &= r_f \sigma^2 e \\ \frac{(r_M - r_f) \omega}{\sigma^2} &= G^{-1} (\bar{r} - r_f e). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Uvođenjem (4.10) u (4.11) dobija se

$$\begin{aligned} \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma^2} &= e^T G^{-1} (\bar{r} - r_f e) \\ e^T \omega G^{-1} (\bar{r} - r_f e) &= G^{-1} (\bar{r} - r_f e) \\ \omega &= \frac{G^{-1} (\bar{r} - r_f e)}{e^T G^{-1} (\bar{r} - r_f e)}. \end{aligned}$$

4.2.3 Sharpe-ov pojednostavljen model za analizu portfolija

Deset godina nakon objavljivanja Markowitz-ove teorije portfolija, mladi doktorant Bil Šarp (*eng. Bill Sharpe*) obratio se Markowitz-u koji ga je upoznao sa svojim radom na teoriji portfolija. Godine 1963, objavljena je Šarpova doktorska disertacija pod nazivom „Pojednostavljen model za analizu portfolija”, sa jednostavnijim modelom izbegavajući bezbrojna izračunavanja kovarijanse. Šarp je tvrdio da se sve hartije od vrednosti mogu povezati zajedničkim bazičnim faktorom koji leži u njihovoj osnovi. Taj faktor može da bude indeks berze, bruto nacionalni dohodak, ili neki drugi indeks cena, tj. onaj faktor koji vrši najveći uticaj na kretanje cene hartija od vrednosti. Najbolje shvatanje Šarpovog modela je posmatranje cene običnih akcija na berzi. Ako je cena akcije neke kompanije nestabilnija od tržišta u celini, onda će te akcije učiniti portfolio promenljivim i rizičnijim. A ako je cena akcije stabilnija od tržišta, onda bi dodavanje ovih akcija učinilo portfolio manje promenljivim i stabilnijim. Po Šarpu, promenljivost portfolija može se lako odrediti posmatranjem prosečne promenljivosti pojedinačnih akcija, a ta mera promenljivosti naziva se **beta faktor** β . Beta faktor se definiše kao stepen odstupanja cena hartija od vrednosti u odnosu na neki tržišni prosek⁴⁰

$$\beta = \frac{cov(r_i, r_\pi)}{var(r_\pi)}.$$

Smatra se da ukoliko je portfolio sa β vrednošću većom od 1,0, da će tada biti rizičniji od tržišta, a portfolio sa β vrednošću manjom od 1,0, da će biti manje rizičniji od tržišta.

Šarpov indeks izračunava se kao

$$S_i = \frac{\bar{r}_i - r_f}{\sigma_i}.$$

⁴⁰Hegstrom R. : „Voren Bafet za sva vremena: principi stari, ekonomija nova”, Plato, Beograd, 2006.godina, 168.strana

Godine 1965, Trejnor (*eng. Jack Treynor*) inspirisan Šarpovim radom, formuliše Trejnorov indeks

$$T_i = \frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}.$$

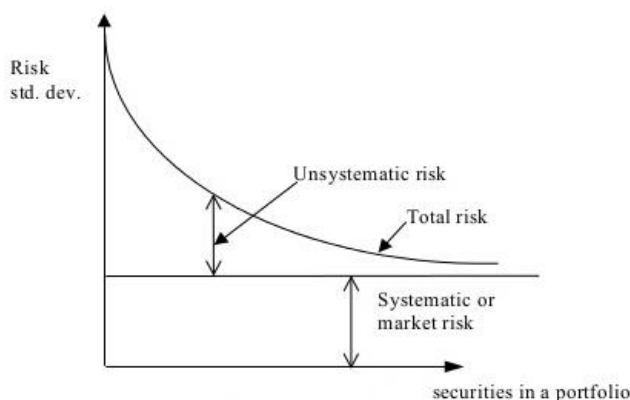
Zatim je 1968. godine, Jensen (*eng. Michael Jensen*) konstruisao indeks koji meri kolika je sposobnost portfolio menadžera da ostvare nadprosečne prinose

$$J_i = \bar{r}_i - r_f - \beta_i(\bar{r}_M - r_f).$$

4.3 Model cene kapitalne aktive

Godinu dana nakon objavljivanja doktorske disertacije o teoriji portfolija, Šarp je razvio model za procenu hartija od vrednosti na osnovu stepena rizika očekivanog prinosa, tj. **Model cene kapitalne aktive** (*eng. Capital Asset Pricing Model*), poznatiji kao CAPM. Ovaj model bio je direktna razrada i proširenje njegovog osnovnog modela efikasnog portfolija zasnovanog na samo jednom faktoru. Prema ovom proširenom modelu, hartije od vrednosti nose dva tipa rizika. Jedan rizik je rizik izlaženja na tržište, koji Šarp naziva **sistemskim rizikom**, a drugi rizik je **nesistemski** koji je karakterističan za ekonomski položaj kompanije.⁴¹ Sistemski rizik je beta i ne može se umanjiti diverzifikacijom čak ni u velikom portfoliju, dok se nesistemski može diverzifikovati izborom akcija koje nisu perfektno pozitivno korelisane. Može se reći da je

ukupni rizik = sistemski rizik + nesistemski rizik (*Slika 4.5*).



Slika 4.5. Sistemski i nesistemski rizik⁴²

CAPM modelom se meri odnos između sistemskog rizika i stope prinosa hartija od vrednosti. Osnovni princip ovog modela je da hartije od vrednosti sa istim sistemskim rizikom treba da imaju istu očekivanu stopu prinosa. U teoriji i praksi, CAPM model je poznat kao zakon jedinstvene cene. Ukoliko su prinosi različiti, tada je neophodno uravnoteženje postići trgovanjem na tržištu kapitala, sve dok se cene ovih hartija od vrednosti neujednače. U razvijenim zemljama, CAPM model često primenjuju investitori za određivanje cene kapitala. Polazi od sledećih pretpostavki:

- transakcioni troškovi su niski,
- ni jedan investitor ne može da utiče na tržišnu cenu akcija,

⁴¹Hegstrom R. : „Voren Bafet za sva vremena: principi stari, ekonomija nova”, Plato, Beograd, 2006.godina, 169.strana

⁴²<http://www.slideshare.net/akashbakshi/2-markowitz-model?nextslideshow> (pristupljeno: 20.5.2015. godine)

- postoje nerizični finansijski instrumenti koje svaki investitor može uključiti u svoj portfolio,
- investitori imaju jednaka očekivanja budućih prinosa,
- postojanje jednog vremenskog perioda u kome se očekuje prinos,
- moguće je pozajmiti neograničeni iznos po bezrizičnoj kamatnoj stopi.

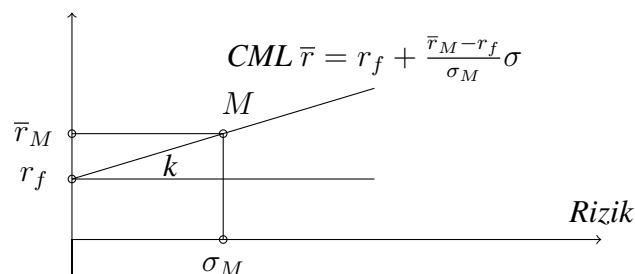
Dok su nedostaci CAPM modela sledeći:

- pretpostavlja se da je varijansa i standardna devijacija adekvatna mera rizika,
- informacije su dostupne svim investitorima,
- model ne objašnjava u dovoljnoj meri varijacije prinosa,
- pretpostavlja se da se za datu stopu prinosa preferira niži tržišni rizik, odnosno za dati rizik preferira viša stopa prinosa.

Bitan pojam pre definisanja samog CAPM modela je **linija tržišta kapitala (CML)** (eng. *Capital Market Line*), koja predstavlja proporcionalno sve investicije tržišta kapitala i menja odnos rizika i prinosa koji je dostupan investitorima. Može se definisati na sledeći način: ako su investitori spremni da snose rizik, onda mogu da očekuju premiju za pokriće rizika od $\frac{\sigma}{\sigma_M}$, odnosno ako se promeni rizik σ za jednu jedinicu onda to vodi do promene očekivanog prinosa od σ_M , tj.⁴³

$$\bar{r} = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M} \sigma.$$

Očekivana stopa prinosa



Slika 4.6. CML - Linija tržišta kapitala

Nagib prave, tj. koeficijent pravca tangente $k = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}$ predstavlja cenu rizika i pokazuje koliko se povećava očekivani višak prinosa portfolija ako se standardna devijacija poveća za jednu jedinicu.

Neka je dato n aktiva $S_1, S_2, \dots, S_n$, tako da za svako S_i postoji očekivani prinos $\bar{r}_i$ i rizik σ_i^2 , i tržišni portfolijo M sa očekivanim prinosom r_M i rizikom σ_M^2 .

Teorema 4.3.1.⁴⁴ Ako je tržišni portfolijo M efikasan, onda za očekivani prinos $\bar{r}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, važi da je

$$\bar{r}_i - r_f = \beta_i(\bar{r}_M - r_f)$$

gde je

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}.$$

⁴³ Anđelić G., Đaković V. : „Osnove investicionog menadžmenta”, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2010.godina, 480-485 strane

⁴⁴ Luenberger D. : „Investment science”, Oxford University press, New York, 1998.godina, 177.strana

Dokaz.

Posmatra se tržišni portfolio M i neka od akcija S_i za proizvoljno α . Tada je portfolio jednak

$$\pi = \alpha S_i + (1 - \alpha)M$$

za $\alpha \in [0, 1]$, kao i očekivani prinos i standardna devijacija

$$\bar{r}_\pi = \alpha \bar{r}_i + (1 - \alpha)\bar{r}_M,$$

$$\sigma_\pi^2 = \alpha^2 \sigma_i^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{iM} + (1 - \alpha)^2 \sigma_M^2.$$

Sledi da je prvi izvod očekivanog prinosa i rizika po α jednak

$$\frac{\partial \bar{r}(\alpha)}{\partial \alpha} = \bar{r}_i - \bar{r}_M$$

$$\frac{\partial \sigma(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{2\alpha\sigma_i^2 + 2(1 - 2\alpha)\sigma_{iM} - 2(1 - \alpha)\sigma_M^2}{2\sigma_\pi^2(\alpha)}.$$

Kada je $\alpha = 0$, π se svodi na tržišni portfolio

$$\frac{\partial \bar{r}(\alpha)}{\partial \alpha} = \bar{r}_i - \bar{r}_M$$

$$\frac{\partial \sigma(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}.$$

Korišćenjem

$$\frac{\partial \bar{r}(\alpha)}{\partial \sigma(\alpha)} = \frac{\partial \bar{r}(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma(\alpha)},$$

za $\alpha = 0$ dobija se

$$\frac{\partial \bar{r}(\alpha)}{\partial \sigma(\alpha)} = (\bar{r}_i - \bar{r}_M) \frac{\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}.$$

Izvod prave u svakoj tački jednak je koeficijentu pravca tangente u toj tački.

$$(\bar{r}_i - \bar{r}_M) \frac{\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2} = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}$$

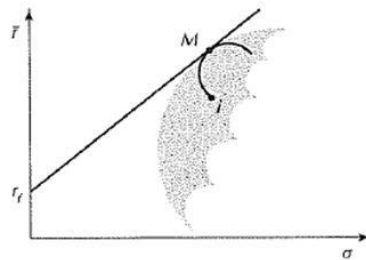
$$(\bar{r}_i - \bar{r}_M)\sigma_M^2 = (\bar{r}_M - r_f)(\sigma_{iM} - \sigma_M^2)$$

$$\bar{r}_i \sigma_M^2 = (\bar{r}_M - r_f)\sigma_{iM} + r_f \sigma_M^2$$

$$\bar{r}_i = r_f + \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}(\bar{r}_M - r_f)$$

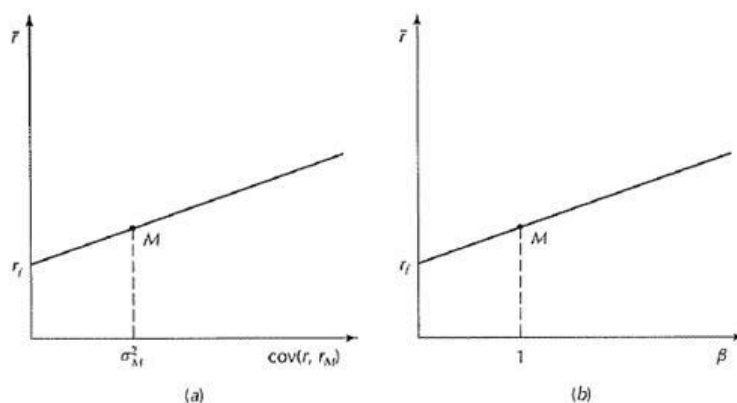
$$\bar{r}_i = r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f). \quad (4.12)$$

Ako je $\beta = 0$ sledi da je $\sigma_{iM} = 0$, tj. i -ta akcija je potpuno nezavisna od celog tržišta, i tada CAPM pokazuje da je $\bar{r}_i = r_f$. Ako je $\beta > 0$ tada se akcija ponaša kao celo tržište. A ako je $\beta < 0$, i -ta akcija se ponaša suprotno od celog tržišta.



Slika 4.7. Capital Asset Pricing Model⁴⁵

I još jedan bitan pojam je **Tržišna linija hartija od vrednosti (SML)** (eng. *The Security Market Line*), koja povezuje prinos nerizičnog ulaganja i tržišnog portfolija. Služi da bi se CAPM model bolje opisao grafički. Slika 4.8. pokazuje dva grafika za linearnu varijaciju očekivanog prinosa r , jedina razlika je što prvi grafik koristi kovarijansu $cov(r, r_M)$, a drugi sistemski rizik za $\beta = 1$. Aktive koje se nalaze iznad SML su potcenjene, jer investitor može očekivati veći prinos za dati rizik, one koje se nalaze baš na tržišnoj liniji su idealne, a one ispod su precenjene jer investitor prihvata manji prinos za očekivani rizik.



Slika 4.8. The Security Market Line⁴⁶

CAPM model podrazumeva specijalnu strukturu, uzimajući stopu prinosa kao slučajnu promenljivu,

$$r_i = r_f + \beta(r_M - r_f) + \epsilon_i$$

gde su ϵ_i slučajne vrednosti. Tada na osnovu (4.12) sledi da je za očekivani prinos $\bar{r}_i$, $E(\epsilon_i) = 0$. Za kovarijansu između prinosa aktive r_i i prinosa tržišnog portfolija r_M važi sledeće:

$$\begin{aligned} \sigma_{iM} &= cov(r_i, r_M) = cov(r_f + \beta(r_M - r_f) + \epsilon_i, r_M) \\ &= cov(r_f, r_M) + \beta cov(r_M, r_M) + cov(\epsilon_i, r_M) \\ &= \beta \sigma_M^2 + cov(\epsilon_i, r_M) \\ &= \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \sigma_M^2 + cov(\epsilon_i, r_M). \end{aligned}$$

⁴⁵Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University press, New York, 1998.godina, 178.strana

⁴⁶Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University press, New York, 1998.godina, 182.strana

Na osnovu čega sledi da je $cov(\epsilon_i, r_M) = 0$. Sada se može izračunati i varijansa σ_i^2

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 &= var(r_f + \beta(r_M - r_f) + \epsilon_i) = \beta^2 var(r_M) + var(\epsilon_i) + 2cov(r_M, \epsilon_i) \\ &= \beta^2 \sigma_M^2 + var(\epsilon_i).\end{aligned}$$

gde je $\beta^2 \sigma_M^2$ sistemski rizik koji je vezan za celo tržište i ne može se smanjiti diverzifikacijom, a $var(\epsilon_i)$ je specifičan rizik, odnosno nesistemski, i predstavlja pojedinačni rizik i -te aktive. Aktive koje se nalaze na CML liniji sadrže samo sistemski rizik, a one koje se nalaze ispod CML sadrže i nesistemski rizik.⁴⁷

Ako se sa P označi sadašnja vrednost aktive, sa Q buduća vrednost aktive, $\bar{Q}$ očekivana buduća vrednost, tada je očekivan prinos aktive jednak kao

$$\bar{r} = \frac{\bar{Q} - P}{P}.$$

Tada na osnovu (4.12) sledi

$$\begin{aligned}\frac{\bar{Q} - P}{P} &= r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f) \\ \bar{Q} &= P(1 + r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f)).\end{aligned}$$

Teorema 4.3.2. ⁴⁸Vrednost aktive P , sa budućom očekivanom vrednošću $\bar{Q}$ je

$$P = \frac{\bar{Q}}{1 + r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f)},$$

gde je β parametar aktive.

4.4 Teorija arbitražnog procenjivanja vrednosti

Teorija arbitražnog procenjivanja vrednosti (eng. *Arbitrage Pricing Theory*), skraćeno APT, je višefaktorski model, a razvio ga je 1976. godine, Stefan Ros (eng. *Stephan A. Ross*). APT se zasniva na teoriji da cena akcije zavisi od kretanja više faktora ili indeksa, a preovladava efikasnost arbitraže. Arbitraža predstavlja istovremenu kupovinu i prodaju sredstava kako bi se profitiralo od razlike u ceni, istih ili sličnih finansijskih instrumenata. Osnovna ideja ovog modela je da će na konkurentnim finansijskim tržištima arbitraža omogućiti cenovnu ravnotežu s obzirom na rizik i prinos. Pretpostavke faktorskog modela su:

- prinos od akcije je određen linearnim faktorskim modelom,
- broj razmatranih akcija je beskonačan,
- tržište kapitala je idealno.

⁴⁷Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University press, New York, 1998.godina, 175-183 strane

⁴⁸Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University press, New York, 1998.godina, 187. strana

Teorija APT razmatra nekoliko uobičajnih faktora rizika na osnovu čega dolazi do zaključka o podcenjenim i precenjenim akcijama. Polazi od ideje da na cene akcija utiču neki zajednički faktori ali i slučaj koji treba da se izoluje da bi se dobio opšti faktor.⁴⁹

Pretpostavlja se da prinos aktive S_i zadovoljava sledeći jednofaktorski model

$$r_i = a_i + b_i f \quad (4.13)$$

gde je

a_i - konstantni parametar,

b_i - stohastički deo,

f - faktor rizika koji je stohastička veličina (slučajna promenljiva).

Ako važi (4.13) onda postoje konstante λ_0 i λ_1 takve da je očekivani prinos aktive S_i određen kao

$$\bar{r}_i = \lambda_0 + b_i \lambda_1.$$

Neka postoje dve aktive tako da na osnovu (4.13) važi

$$r_i = a_i + b_i f$$

$$r_j = a_j + b_j f.$$

Tada se od njih može napraviti portfolio, uvodeći smenu $\omega_1 = \alpha$ i $\omega_2 = 1 - \alpha$, odnosno

$$r = \alpha r_i + (1 - \alpha) r_j$$

$$r = \alpha(a_i + b_i f) + (1 - \alpha)(a_j + b_j f) = \alpha a_i + (1 - \alpha)a_j + (\alpha b_i + (1 - \alpha)b_j)f$$

gde je $\alpha a_i + (1 - \alpha)a_j$ bez rizika, a $(\alpha b_i + (1 - \alpha)b_j)f$ rizično.

Odnosno, za portfolio bez rizika važi $\alpha b_i + (1 - \alpha)b_j = 0$. Tada je

$$\alpha = \frac{b_j}{b_j - b_i}$$

$$1 - \alpha = \frac{b_i}{b_i - b_j}$$

$$r = \frac{a_i b_j}{b_j - b_i} + \frac{a_j b_i}{b_i - b_j}.$$

Stopa prinosa koja treba da se dobije mora biti jednaka r_f , zato što je bez rizika

$$\frac{a_i b_j}{b_j - b_i} + \frac{a_j b_i}{b_i - b_j} = r_f.$$

Ako na tržištu ne postoji stopa bez rizika, za r_f uzima se $r_f = \lambda_0$, odnosno,

$$\lambda_0(b_j - b_i) = a_i b_j - a_j b_i$$

$$\frac{a_j - \lambda_0}{b_j} = \frac{a_i - \lambda_0}{b_i}.$$

⁴⁹ Anđelić G., Đaković V. : „Osnove investicionog menadžmenta”, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2010.godina, 488.strana

Zatim se pretpostavlja da postoji neko c koje je konstanta, tako da zadovoljava

$$\frac{a_i - \lambda_0}{b_i} = c,$$

na osnovu čega je $a_i = cb_i + \lambda_0$, pa je prinos jednak

$$r_i = \lambda + 0 + cb_i + b_i f.$$

Uvođenjem nove promenljive $\lambda_1 = c + \bar{f}$, dobija se očekivani prinos

$$\bar{r}_i = \lambda_0 + \lambda_1 b_i.$$

Teorema 4.4.1. *Pretpostavlja se da postoji n prinosa koji zavise od m faktora rizika tako da je $m < n$*

$$r_i = a_i + \sum_{j=1}^m b_{ij} f_j,$$

za $i = 1, 2, \dots, n$, tada postoje konstante $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ tako da je

$$\bar{r}_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^m b_{ij} \lambda_j$$

za $i = 1, 2, \dots, n$.

Dokaz.

Pretpostavlja se da postoji neki specijalni portfolio za koji važi $\sum_{i=1}^n \omega_i = 0$, $\sum_{i=1}^n \omega_i b_{i1} = 0$, $\sum_{i=1}^n \omega_i b_{i2} = 0$, ..., $\sum_{i=1}^n \omega_i b_{im} = 0$. Tada je i očekivani prinos jednak $\sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i = 0$. Mogu se definisati vektori $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $b_1 = (b_{11}, b_{21}, \dots, b_{n1})$, $b_2 = (b_{12}, b_{22}, \dots, b_{n2})$, ..., $b_m = (b_{1m}, b_{2m}, \dots, b_{nm})$, $\bar{r} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n)$. Svako ω mora da zadovoljava $\omega^T b_1 = 0$, $\omega^T b_2 = 0$, ..., $\omega^T b_m = 0$, pa samim tim i $\omega^T \bar{r} = 0$. ω je ortogonalno na svako b , a svaki vektor koji je ortogonalan na b mora biti ortogonalan i na $\bar{r}$. Prema tome, postoje konstante $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ tako da je $\bar{r} = \lambda_0 e + \lambda_1 b_1, \dots, \lambda_m b_m$.⁵⁰

⁵⁰Luenberger D. : „Investment Science”, Oxford University press, New York, 1998.godina, 198-203 strane

5 OPTIMIZACIJA PORTFOLIJA I OČEKIVANI EFEKTI OD AKTIVNOSTI INVESTIRANJA - PRAKTIČAN PRIMER

5.1 Razvijenost i značaj trgovanja na tržištu Republike Srbije

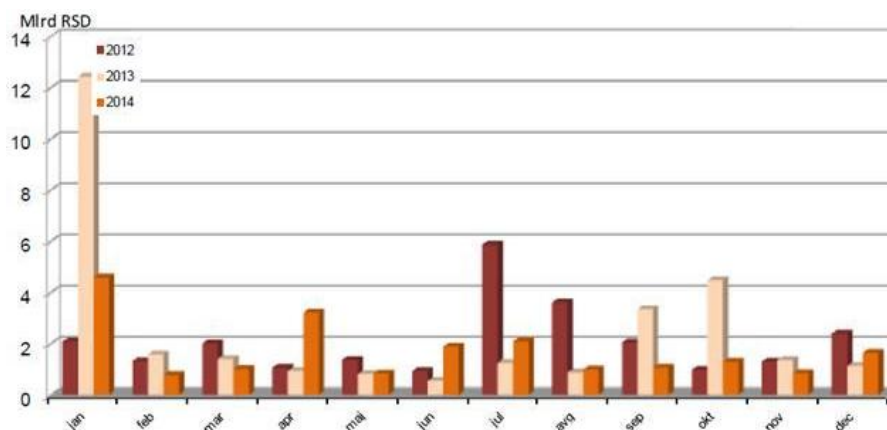
Razvijenost i značaj tržišta kapitala u Republici Srbiji nije u tolikoj meri rasprostranjeno kao što je to slučaj u velikim svetskim zemljama. Na tržištu kapitala zavladała je velika kriza, kako zbog niskog standarda i siromaštva ljudi, tako i zbog nelikvidnosti tržišta i nesigurnosti investitora. Same ideje oko osnivanja ustanove koja bi pratila kretanje vrednosti novca, javile su se oko 1830. godine. Tadašnji kralj, Milan Obrenović, proglasio je 1886. godine prvi Zakon o javnim berzama, a 1894. godine održana je Osnivačka skupština berze gde je izabrana stalna uprava i berzanski posrednici. Osnivanje berze predstavljalo je lakše trgovanje različite trgovačke robe i svih hartija od vrednosti obuhvatajući čekove, bonove, kovani i papirni novac. Kasnije se izvršila podela u dve grupe, tj. u odeljenje za robu (Produktivna berza) sa središtem na obali Save u hotelu „Bosna” i u odeljenje za valute (Valutna berza) sa središtem u hotelu „Srpska Kruna”. U tom periodu, berza je važila za najstariju i najorganizovaniju berzu u Evropi. Početkom XX veka, trgovalo se različitim hartijama od vrednosti, a najtraženije i najstabilnije bile su državne hartije. Pre početka drugog svetskog rata i teškog perioda, 1934. godine berza se seli na novu lokaciju, gde se promet veoma povećao. U to vreme kursni list se štampao u hiljadu primeraka i na tri jezika. Berza kao institucija postojala je sve do 1953. godine, dok nije formalno ukinuta. Sa početkom privrednih reformi 1989. godine održana je Osnivačka skupština Jugoslovenskog tržišta kapitala osnovanog od strane 32 najveće banke tadašnje Jugoslavije. A 1992. godine naziv berze menja se u Beogradska berza. Najintezivnije trgovanje bilo je 2000. godine kada se u sekundarno trgovanje uključile akcije iz privatizacije. Kontinuirano i daljinsko trgovanje uvedeno je 2003. i 2004. godine, i tako je uspostavljena saradnja sa drugim zemljama u regionu. Prvi indeks Beogradske berze BELEXfm objavljen je krajem 2004. godine, a od 2008. godine akcije srpskih kompanija uključene su u indekse međunarodnih agencija. Razvojem sistema, članovi berze od 2010. godine, dobijaju sopstvenu aplikaciju za trgovanje, čime se povećava likvidnost i kvalitet tržišta.

Dakle, Beogradska berza je institucija koja se pored trgovanja finansijskim instrumentima bavi i određivanjem i sprovođenjem uslova pod kojim se investiciona društva primaju u članstvo berze, kako se finansijski instrumenti uključuju u trgovanje, obavlja nadzor nad tržištem u cilju sprečavanja zloupotreba, čuva sve relevantne podatke koji se odnose na trgovanje finansijskim instrumentima, povezuje kupce i prodavce u cilju obavljanja trgovanja, itd. Takođe, berza ima aktivnu ulogu u unapređenju, promociji i razvoju tržišta kapitala u Srbiji, i edukaciju investitora i drugih učesnika na tržištu.⁵¹

5.1.1 Značajni segmenti trgovanja na Beogradskoj berzi

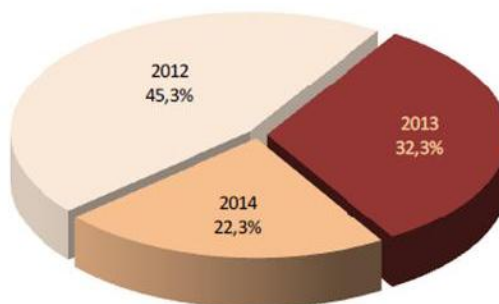
U 2014. godini na Beogradskoj berzi ostvaren je ukupan promet u vrednosti od 20,26 milijardi dinara, odnosno 174 miliona eura, što je u odnosu na predhodnu godinu manje za 32,8%. Trgovalo se akcijama, korporativnim obveznicama i obveznicama Republike Srbije. Preovladava trgovanje akcijama, ali su obveznice ostvarile najveće učešće u ukupnom prometu još od uvođenja elektronskog trgovanja. Posmatrano po mesecima, na *Slici 5.1*, može se videti da je u januaru zabeležen najviši mesečni promet u 2014. godini u iznosu od 4,6 milijardi dinara, odnosno 40 miliona eura, samo zahvaljujući akcijama AIK banke i Bambija iz Požarevca, koji su obuhvatali 80% januarskog prometa.

⁵¹http://www.belex.rs/o_berzi/istorijat (pristupljeno: 22.5.2015. godine)



Slika 5.1. Grafikon ukupnog prometa po mesecima⁵²

Raspodela prometa i transakcija u poslednjih nekoliko godina ukazuje da su ostvareni loši trgovački rezultati što se vidi na *Slici 5.2*, i teško je očekivati značajna poboljšanja uz odsustvo procesa inicijalnih javnih ponuda, uključivanja novih hartija od vrednosti na dužničkim segmentima i celokupnog ekonomskog oporavka zemlje.⁵²



Slika 5.2. Struktura transakcija u poslednje tri godine⁵²

Na Beogradskoj berzi trguje se samo hartijama od vrednosti koje su primljene na određeni nivo tržišta, koji se naziva *zvanični listing berze* i propisan je Pravilnikom o listingu i kotaciji. Sadrži dva nivoa listinga, listing A koji se naziva *Prime Listing* i listing B odnosno *Standard Listing*. Prime Listing podrazumeva dugoročne državne hartije (obveznice Vlade Republike Srbije) i akcije kompanija koje ispunjavaju sledeće uslove: minimum tri godine poslovanja, pozitivan finansijski rezultat, minimalni iznos kapitala u iznosu od 20 miliona eura i internet stranicu kompanije na srpskom i engleskom jeziku.

Izdavalac		Simbol	Datum objave informatora
	Aerodrom Nikola Tesla a.d. , Beograd	AERO	31.03.2015.
	Energoprojekt holding a.d. , Beograd	ENHL	12.05.2015.
	NIS a.d., Novi Sad	NIIS	15.05.2015.
	Sojaprotein a.d. , Bečej	SJPT	31.03.2015.

Slika 5.3. Akcije koje se nalaze na Prime Listingu⁵³

⁵²http://www.belex.rs/files/proizvodi_i_usluge/GI2014.pdf (pristupljeno: 24.5.2015. godine)

⁵³http://www.belex.rs/trzista_i_hartije/trzista/prime/akcije (pristupljeno: 29.5.2015. godine)

Izdavalac	Simbol	Datum dospeća
Vlada Republike Srbije, Beograd	A2016	31.05.2016.

Slika 5.4. Obveznice koje se nalaze na Prime Listingu ⁵⁴

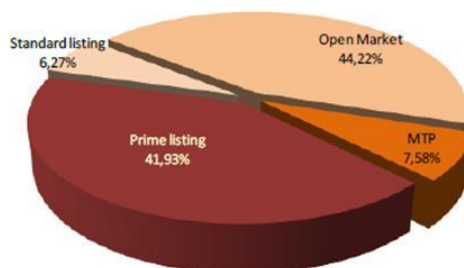
Dok se na Standard Listingu nalaze ona preduzeća koja ne ispunjavaju uslove da uđu na listing A, odnosno za njih važe sledeći uslovi: nije bitno da li je izdavalac poslovao sa gubitkom ili ne, uvažava se i mišljenje revizora sa rezervom, i minimalni iznos kapitala u vrednosti od 4 miliona eura.

Izdavalac	Simbol	Datum objave informatora
 Alfa plam a.d. , Vranje	ALFA	31.03.2015.
 Jedinstvo a.d. , Sevojno	JESV	31.03.2015.
 Komercijalna banka a.d. , Beograd	KMBN	31.03.2015.
 Metalac a.d. , Gornji Milanovac	MTLC	12.05.2015.

Slika 5.5. Akcije koje se nalaze na Standard Listingu ⁵⁵

Akcije koje ne ispunjavaju uslove za listing berze ili je zahtevom za listing opredeljen segment tržišta koji nije listing, trguju na *Open Marketu*, pod uslovom da ispunjavaju određene propise berze. Trenutno se na Open Marketu Beogradske berze nalazi 44 izdavalaca akcija i jedna obveznica.

Prema zakonu o tržištu kapitala, *multilateralna trgovačka platforma* (MTP) je multilateralni sistem koji omogućava i olakšava spajanje interesa trećih lica za kupovinu i prodaju finansijskih instrumenata u skladu sa njegovim obavezujućim pravilima. Trenutno se na MTP-u Beogradske berze nalazi 845 izdavalaca akcija i ni jedan izdavalac obveznice. ⁵⁶Data podela može se pokazati i grafički (Slika 5.6.) za broj transakcija u 2014. godini, koja pokazuje da se najviše trgovalo hartijama od vrednosti sa Prime listinga i Open Marketa.



Slika 5.6. Struktura prometa prema segmentima za 2014. godinu ⁵⁷

Ono što je još bitno spomenuti su berzanski indeksi, odnosno grupa akcija čija je osnovna uloga da jednoznačno iskaže smer i intenzitet kretanja vrednosti akcija. Kao i sve berze u svetu, i Beogradska berza ima svoje indeksne pokazatelje koji su formirani sa ciljem da se unapredi proces informisanja investicione javnosti i da se poboljša transparentnost i uporedivost podataka na tržištu. Oni su ponderisani tržišnom kapitalizacijom i mogu služiti kao podloga za kreiranje proizvoda i derivata na domaćem i inostranom tržištu. Trenutno postoje *BELEX15*, vodeći indeks Beogradske berze koji opisuje kretanje cene najlikvidnijih srpskih akcija i izračunava se svakodnevno, u realnom vremenu, i *BELEXline*, opšti indeks Beogradske berze čija se vrednost računa na kraju trgovačkog dana.⁵⁸ Vrednost berzanskih indeksa Beogradske berze za 2014. godinu data je na Slici 5.7.

⁵⁴http://www.belex.rs/trzista_i_hartije/trzista/prime/obv (pristupljeno: 29.5.2015. godine)

⁵⁵http://www.belex.rs/trzista_i_hartije/trzista/standard/akcije (pristupljeno: 29.5.2015. godine)

⁵⁶<http://ipf.rs/finansijska-trzista-2/organizacija-beogradske-berze/> (pristupljeno: 29.5.2015. godine)

⁵⁷http://www.belex.rs/files/proizvodi_i_usluge/GI2014.pdf (pristupljeno: 29.5.2015. godine)

⁵⁸http://www.belex.rs/proizvodi_i_usluge/indeksi_opste (pristupljeno: 29.5.2015. godine)



Slika 5.7. Kretanje indexa BELEX15 i BELEXline u 2014. godini⁵⁹

Tokom predhodne godine oba indeksa Beogradske berze zabeležila su snažan rast koji je tokom druge polovine godine premašio 25% u odnosu na kraj predhodne godine. Poslednjih dana trgovanja u 2014. godini došlo je promene cena tako što su indeksi malo spustili stope rasta, BELEX15 je zabeležio rast od 19.5%, a opšti indeks BELEXline 21.7%.

5.2 Odabir akcija za formiranje optimalnog portfolija na tržištu Republike Srbije

Izbor hartija od vrednosti za formiranje optimalnog portfolija na tržištu Republike Srbije nije tako jednostavan zadatak, sa jedne strane zbog nedostatka izbora i ekonomske krize, a sa druge strane zbog nelikvidnosti tržišta. U odabir su ušle samo akcije, i to akcije Naftne industrije Srbije i Aerodroma Nikola Tesla sa Prime listinga, akcije Alfa Plama i Metalca sa Standard listinga, akcije Beogradske autobuske stanice sa MTP sistema i akcije Aik banke sa Open Marketa. Obveznice nisu uzete u obzir prilikom kreiranja portfolija zbog nedostatka izbora u posmatranom periodu, odnosno postoje samo dve obveznice i to A2016 Vlade Republike Srbije i SABC01 grada Šapca. Date akcije su izabrane na osnovu očekivanog prinosa i rizika, koji su izračunati pomoću Microsoft Office Excel-a, posmatranih na bazi jedne godine, odnosno od maja 2014. do maja 2015.godine, i na osnovu Bafetovih saveta da se biraju akcije kompanija koje imaju dobru viziju za budućnost, koje ulažu u svoje kapacitete i imaju jasnu politiku poslovanja. Veliki doprinos dali su i grafik kretanja cena za svaku akciju kompanije posebno i dostupni parametri na Beogradskoj berzi, među kojima su.⁶⁰

⁵⁹http://www.belex.rs/files/proizvodi_i_usluge/GI2014.pdf (pristupljeno: 29.5.2015. godine)

⁶⁰<http://www.psinvest.rs/sr/osnovni-finansijski-pokazatelji> (pristupljeno: 30.5.2015. godine)

- *Tržišna kapitalizacija* - predstavlja indikator veličine i obima promena hartija od vrednosti na berzi i jednaka je proizvodu tržišne cene date kompanije i ukupnog broja emitovanih hartija od vrednosti.
- *EPS (eng. earnings per share)* - predstavlja dobit po akciji i dobija se iz odnosa neto dobiti i ukupnog broja emitovanih akcija, ali ima puno nedostataka. Neki od najznačajnijih problema su što EPS može biti pod uticajem računovodstvenih standarda, ignoriše vremensku vrednost novca, ne uzima u obzir poslovni i finansijski rizik i može rasti sa povećanjem nivoa duga u kompaniji.
- *P/E (eng. price/earnings)* - predstavlja najstariji i najčešće korišćen parametar kada se vrednuju akcije i pokazuje odnos cene akcije i zarade kompanije po akciji. Ima izuzetno veliki značaj u analizi investicionih odluka i relevantan je pokazatelj prilikom poređenja jedne kompanije sa drugom. Može se reći da P/E oslikava spremnost kupaca akcija da plate određenu cenu na tržištu kako bi ostvarili odgovarajući prihod od posedovanja akcija.
- *P/B (eng. price to book)* - predstavlja odnos tržišne cene i obračunske knjigovodstvene vrednosti odabrane akcije.
- *ROE (eng. return of equity)* - je prinos na akcijski kapital i predstavlja jednu od najvažnijih mera prinosa vlasnika akcija. Na osnovu ROE se određuje realna cena akcija i njegovom analizom investitori mogu lakše da donesu odluku u koje akcije da ulažu svoj kapital.
- *VWAP (eng. Volume-Weighted Average Price)* - predstavlja informaciju o prosečnoj ponderisanoj dnevnoj ceni hartija od vrednosti.
- *FFc (eng. free float faktor)* - je procenat akcija koji se nalazi u slobodnom prometu i koji je javno dostupan potencijalnim investitorima. Dobija se kada se od ukupnog broja akcija oduzmu akcije koje se ne nalaze u slobodnom prometu.

5.2.1 Analiza poslovanja kompanije Naftna industrija Srbije a.d., Novi Sad

Naftna industrija Srbije (NIS) jedna je od najvećih energetske kompanije u jugoistočnoj Evropi koja se bavi istraživanjem, proizvodnjom i preradom nafte i naftnih derivata, među kojima su najznačajniji: motorna goriva, avio goriva, motorna ulja i sirovine za petrohemijsku industriju. Kompanija NIS poseduje i pogon za proizvodnju tečnog naftnog gasa, obavlja spoljnu i unutrašnju trgovinu, trgovinu na veliko i malo naftnim derivatima, a bavi se takođe i proizvodnjom električne, toplotne i geotermalne energije. Glavni strateški plan kompanije NIS je da do 2020. godine postane najefikasnija energetska kompanija u balkanskom regionu, održavajući leadersku poziciju na tržištu Srbije i da uđe među tri najbolje kompanije u jugoistočnoj Evropi.

Gazprom poseduje 56,15% akcijskog kapitala NIS-a, dok je 29,87% akcija u vlasništvu Republike Srbije. Ostatak od 13,98% pripada građanima, zaposlenima, bivšim zaposlenima i drugim manjinskim akcionarima. Kompanija je na kraju 2013. godine imala 2,32 miliona akcionara.

Na osnovu *Slike 5.8*, cena akcije NIIS na dan 2.6.2015. godine kretala se u intervalu od 699,00 do 704,00 dinara, što je u nekim donjim granicama za period od 52 nedelje. Ukupan promet akcija kompanije NIS-a bio je 7.013, pa je vrednost prometa iznosila 4.904.199,00 dinara. Od izabranih akcija koje ulaze u sastav za formiranje portfolija, NIIS ima najveću tržišnu kapitalizaciju u iznosu

od 113.979.219.600,00 dinara, koja se dobija proizvodom tržišne cene akcije i ukupnog broja izdatih hartija od vrednosti.

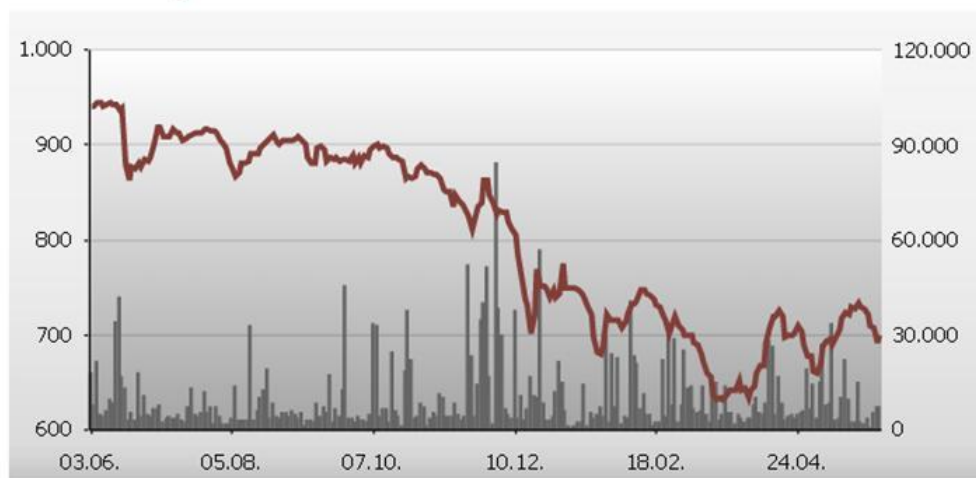
Osnovni podaci		Dnevni podaci 02.06.2015.	
Naziv hartije	NIS a.d. Novi Sad, obicne akcije sa pravom glasa	Cena	699
Simbol	NIIS	Promena	1,16% 8 RSD
Tržište	Prime Listing	Obim	7.013
Metod trgovanja	Metod kontinuiranog trgovanja	Promet	4.904.199
Matični broj	20084693	Cena otvaranja	690
ISIN	RSNISHE79420	Najviša dnevna cena	704
CFI	ESVUFR	Najniža dnevna cena	690
Oznaka sektora	B-0610	VWAP	699
Naziv sektora	B - Rudarstvo	52 nedelje	
Broj izdatih hartija	163.060.400	Najviša cena	Najniža cena
Broj uključenih hartija	163.060.400	950	621
Valuta	RSD	04.06.2014.	18.03.2015.
Statistički prikaz vlasništva preduzeća	Centralni registar HoV	Istorijski	
Internet prezentacija	www.nis.eu	Najviša cena	Najniža cena
Pokazatelji		1.020	442
Tržišna kapitalizacija	113.979.219.600	25.04.2013.	14.09.2010.
EPS	187,41	Godišnje statistike	
P/E	3,73	Prosečan promet	9.206.727
P/B	0,59	Prosečan broj transakcija	402
ROE	15,70	VWAP	885
Pokazatelji su izračunati prema podacima iz poslednjeg godišnjeg bilansa.		FFc	13,97%

Slika 5.8. Opšte karakteristike i statistika podataka kompanije NIS ⁶¹

Slika 5.9. pokazuje grafik kretanja cene akcije NIIS u periodu od juna 2014. do maja 2015. godine. Cena je drastično opala od početka godine, i beleži najgori pad još od polovine 2010. godine kada se ova kompanija pojavila na berzi. Smatra se da je na taj rezultat uticala rusko ukrajinska kriza, pad cene sirove nafte na svetskim berzama i isplata manjih dividendi. Negativne kursne razlike su se takođe odrazile na pad cene. Povećan je broj indirektnih i direktnih poreskih obaveza kompanije koje su iznosile 14 % više nego prošle godine. Ali uprkos teškoj ekonomskoj situaciji, NIS je uspeo da poveća ukupan promet naftnih derivata za 6 %, za 12% poveća obim premijum prodaje i za 17% poveća obim prodaje u inostranim aktivama u odnosu na isti period u 2014. godini.

⁶¹<http://www.belex.rs/trgovanje/hartija/dnevni/NIIS> (pristupljeno: 2.6.2015. godine)

NIIS - NIS a.d., Novi Sad - 02.06.2015.



Slika 5.9. Grafik kretanja cene akcije NIIS u periodu od juna 2014. do maja 2015. godine ⁶¹

5.2.2 Analiza poslovanja kompanije Aerodrom Nikola Tesla a.d., Beograd

Međunarodni aerodrom Nikola Tesla je glavni aerodrom u Srbiji i nalazi se na teritoriji opštine Surčin. Nakon teškog perioda, još od Drugog svetskog rata i niza pokušaja da se osvari pozitivan finansijski rezultat, avgusta 2013. godine sklopljeno je strateško partnerstvo između Etihad Airways, Jat Airways (tada promenjenog u Air Serbia) i Vlade Republike Srbije, sa ciljem da se obezbedi budućnost nacionalne kompanije. Potpisan je petogodišnji ugovor i 49 % udela pripalo je Etihad Airways-u, kao i upravljanje kompanijom. I jedna i druga strana se obavezala da uloži po 40 miliona američkih dolara i da obezbedi dodatna sredstva u maksimalnom iznosu od 60 miliona dolara. Modernizacija brenda i promena imena kompanije dovela je i do savremene flote i razvoja saobraćajne mreže. Novo ukazano poverenje putnicima, kroz poboljšane uslove putovanja, nove obroke na letovima i načinu pružanja usluge, omogućilo je razvoj i dalji napredak kompanije.

AERO - Aerodrom Nikola Tesla a.d. , Beograd - 02.06.2015.



Slika 5.10. Grafik kretanja cene akcije AERO u periodu od juna 2014. do maja 2015. godine ⁶²

⁶²<http://www.belex.rs/trgovanje/hartija/dnevni/AERO> (pristupljeno: 2.6.2015. godine)

Grafik kretanja cene akcije AERO (Slika 5.10.) pokazuje porast cene akcije na bazi jedne godine. Vrednost je duplo skočila u odnosu na isti period iz predhodne godine, sa 600,00 na 1300,00 dinara. Zahvaljujući podršci strateškog partnera, Air Serbia ima priliku da ostvari prihod i iskoristi finansijske pogodnosti koje su dogovorene ugovorom. Strateški cilj kompanije je da postane vodeća aviokompanija u regionu i da zauzme mesto među najboljima u svetu.⁶³

Osnovni podaci		Dnevni podaci 02.06.2015.	
Naziv hartije	Aerodrom Nikola Tesla a.d. Beograd, obicne akcije sa pravom glasa	Cena	1.321
Simbol	AERO	Promena	-2,44% -33 RSD
Tržište	Prime Listing	Obim	430
Metod trgovanja	Metod kontinuiranog trgovanja	Promet	567.316
Matični broj	07036540	Cena otvaranja	1.301
ISIN	RSANTBE11090	Najviša dnevna cena	1.339
CFI	ESVUFR	Najniža dnevna cena	1.301
Oznaka sektora	H-5223	VWAP	1.319
Naziv sektora	H - Saobraćaj i skladištenje	52 nedelje	
Broj izdatih hartija	34.289.350	Najviša cena	Najniža cena
Broj uključenih hartija	34.289.350	1.488	560
Valuta	RSD	16.04.2015.	16.06.2014.
Statistički prikaz vlasništva preduzeća	Centralni registar HoV	Istorijski	
Internet prezentacija	www.beg.aero	Najviša cena	Najniža cena
		1.488	363
		16.04.2015.	26.06.2012.
Pokazatelji		Godišnje statistike	
Tržišna kapitalizacija	45.296.231.350	Prosečan promet	2.428.774
EPS	94,52	Prosečan broj transakcija	453
P/E	13,98	VWAP	656
P/B	1,83	FFc	16,85%
ROE	13,07		
Pokazatelji su izračunati prema podacima iz poslednjeg godišnjeg bilansa.			

Slika 5.11. Opšte karakteristike i statistika podataka kompanije Aerodrom Nikola Tesla⁶²

Na osnovu Slike 5.11. vidi se da je trenutna cena akcije u gornjim granicama u poslednje 52 nedelje, što je veliki uspeh, a s obzirom da se aerodrom proširuje sa četiri nova izlaza, smatra se da će to dodatno uticati na povećanje tržišne vrednosti. Prošle godine je kroz aerodrom Nikola Tesla prošlo 4,5 miliona ljudi i ostvarena je rekordna neto dobit od 27,034 miliona eura. Izdat je i velik broj hartija od vrednosti, i u odnosu na statistiku od predhodne godine prosečna ponderisana dnevna cena hartija od vrednosti (VWAP) porasla je za 663,00 dinara, što je duplo u odnosu na 2014. godinu.

⁶³<http://new.airserbia.com/sr-de/istorijat> (pristupljeno: 1.6.2015. godine)

5.2.3 Analiza poslovanja kompanije Alfa Plam a.d., Vranje

Kompanija Alfa Plam je vodeći proizvođač grejnih tela i štednjaka u jugoistočnoj Evropi. Kompanija ispunjava uslove za učešće na evropskom tržištu, i poseduje visok nivo kvaliteta proizvoda i usluga, i stabilan razvoj proizvoda. U njihov asortiman ulaze štednjaci i peći na čvrsta goriva, štednjaci, peći i kamini za etažno grejanje, električni i kombinovani štednjaci, kao i mnogi drugi proizvodi za grejanje. Većinski vlasnik kompanije izjavio je da su proizvodi izazvali veliko interesovanje posetilaca na sajmovima u Lionu i Frankfurtu početkom godine. Njegov cilj je da kroz saradnju i partnerstvo kupi italijanski brend i premesti proizvodnju u Srbiju i tako dostigne cilj da kompanija preuzme kompletnu prodajnu mrežu u Evropi i bude među tri vodeća proizvođača na svetu.

Osnovni podaci		Dnevni podaci 02.06.2015.	
Naziv hartije	Alfa plam a.d. Vranje, obične akcije sa pravom glasa	Cena	26.000
Simbol	ALFA	Promena	0,00% 0 RSD
Tržište	Standard Listing	Obim	0
Metod trgovanja	Metod kontinuiranog trgovanja	Promet	0
Matični broj	07137923	Cena otvaranja	/
ISIN	RSALFAE34014	Najviša dnevna cena	/
CFI	ESVUFR	Najniža dnevna cena	/
Oznaka sektora	C-2752	VWAP	/
Naziv sektora	C - Prerađivačka industrija	52 nedelje	
Broj izdatih hartija	174.812	Najviša cena	Najniža cena
Broj uključenih hartija	174.812	26.600	14.000
Valuta	RSD	15.05.2015.	13.06.2014.
Statistički prikaz vlasništva preduzeća	Centralni registar HoV	Istorijski	
Internet prezentacija	www.alfaplam.rs	Najviša cena	Najniža cena
Pokazatelji		41.900	4.417
Tržišna kapitalizacija	4.545.112.000	16.02.2007.	16.09.2002.
EPS	4.377,91	Godišnje statistike	
P/E	5,94	Prosečan promet	736.108
P/B	0,77	Prosečan broj transakcija	1
ROE	12,96	VWAP	15.662
Pokazatelji su izračunati prema podacima iz poslednjeg godišnjeg bilansa.		FFc	35,46%

Slika 5.12. Opšte karakteristike i statistika podataka kompanije Alfa Plam⁶⁴

Na osnovu Slike 5.12, cena akcije na dan 2.6.2015. godine iznosila je 26.000,00 dinara i ima visoku dobit po akciji od 4.377,91 dinar. U odnosu na 52 nedelje, najviša cena akcije iznosila je 26.600,00 dinara a najniža 14.000,00 dinara, što predstavlja porast od neverovatnih 12.600,00 dinara. Slično se može videti i na grafiku (Slika 5.13.) u poređenju sa istim periodom od prošle godine.

⁶⁴<http://www.belex.rs/trgovanje/hartija/dnevni/ALFA> (pristupljeno: 2.6.2015. godine)

ALFA - Alfa plam a.d. , Vranje - 02.06.2015.



Slika 5.13. Grafik kretanja cene akcije ALFA u periodu od juna 2014. do maja 2015. godine ⁶⁴

Poslovna dobit Alfa Plama u prva tri meseca dostigla je 69,2 miliona dinara, dok je neto dobitak skočio skoro četiri puta na 107,5 miliona dinara. Akcije Alfa Plama predstavljaju jednog od najvećih dobitnika u tekućoj godini sa skokom od 36,5%, dok po poslednjoj ceni od 26.000,00 dinara tržišna kapitalizacija kompanije iznosi 4,5 milijardi dinara. Kompanija je u prvom tromesečju ostvarila proizvodnju koja je vrednosno iznosila 1,33 milijarde dinara što je 1,9% manje u odnosu na plan ali 18,1% više u odnosu na isti period iz predhodne godine.⁶⁵

5.2.4 Analiza poslovanja kompanije Metalac a.d., Gornji Milanovac

Kompanija Metalac je javno akcionarsko društvo koje se bavi proizvodnjom posuđa, inox i granitnih sudopera, bojlera, kartonske ambalaže i preslikača za posuđe, izrađenih po savremenoj tehnologiji i od najkvalitetnijih materijala, sa 50 specijalizovanih prodavnica širom Srbije. Proizvodi su zastupljeni i širom Evrope, oko 70% proizvodnje emajliranih posuđa odlazi kupcima u 25 zemalja širom sveta, a najviše u zemlje EU i Rusiju, gde se izveze oko 6 miliona posuđa svake godine.

MTLC - Metalac a.d. , Gornji Milanovac - 02.06.2015.



Slika 5.14. Grafik kretanja cene akcije MTLC u periodu od juna 2014. do maja 2015. godine ⁶⁶

⁶⁵<http://www.ekapija.com/website/sr/page/1149542> (pristupljeno: 3.6.2015. godine)

⁶⁶<http://www.belex.rs/trgovanje/hartija/dnevni/MTLC> (pristupljeno: 2.6.2015. godine)

U vlasničkoj strukturi kompanije učestvuje 60% fizičkih lica, 5% pravnih lica i 35% kastodi računa. Učešće stranih lica i investicionih fondova u ukupnom akcijskom kapitalu je 45%.

Kompanija planira da u 2015. godini investira u automatske linije za izradu posuđa u mehaničkom delu, u proizvodnju alata, u proizvodnju peći na čvrsta goriva, proširi kapacitete, unapredi primenu informacionih tehnologija i otvori nove maloprodajne objekte. Slika 5.14. pokazuje da se u odnosu na isti period iz predhodne godine, cena akcije pala sa 2.200,00 na 1.900,00 dinara, ali istorijski posmatrano najviša cena iznosila je 6.505,00 dinara a najniža 140,00 dinara, što pokazuje velike oscilacije u ceni u rasponu od nekoliko godina, ali i veliki poslovni i finansijski uspeh kompanije.

Osnovni podaci	
Naziv hartije	Metalac a.d. Gornji Milanovac, obične akcije sa pravom glasa
Simbol	MTLC
Tržište	Standard Listing
Metod trgovanja	Metod kontinuiranog trgovanja
Matični broj	07177984
ISIN	RSMETAE71629
CFI	ESVUFR
Oznaka sektora	K-6420
Naziv sektora	K - Finansijske delatnosti i delatnost osiguranja
Broj izdatih hartija	1.020.000
Broj uključenih hartija	1.020.000
Valuta	RSD
Statistički prikaz vlasništva preduzeća	Centralni registar HoV
Market-mejker	M&V Investments a.d., Beograd
Internet prezentacija	www.metalac.com
Pokazatelji	
Tržišna kapitalizacija	1.978.800.000
EPS	236,26
P/E	8,21
P/B	0,66
ROE	8,00
Pokazatelji su izračunati prema podacima iz poslednjeg godišnjeg bilansa.	

Dnevni podaci 02.06.2015.	
Cena	1.940
Promena	0,00% 0 RSD
Obim	0
Promet	0
Cena otvaranja	/
Najviša dnevna cena	/
Najniža dnevna cena	/
VWAP	/

52 nedelje	
Najviša cena	Najniža cena
2.300	1.900
22.07.2014.	26.05.2015.

Istorijski	
Najviša cena	Najniža cena
6.505	140
17.04.2007.	04.04.2002.

Godišnje statistike	
Prosečan promet	383.425
Prosečan broj transakcija	1
VWAP	2.317
FFc	80,45%

Slika 5.15. Opšte karakteristike i statistika podataka kompanije Metalac ⁶⁶

Na osnovu podataka sa *Slike 5.15.* vidi se da prometa nije bilo na dan 2.5.2015. godine, dok je statistički izračunat prosečni promet na godišnjem nivou iznosio 383.425. U odnosu na izabrane akcije, akcije MTLIC imaju izuzetno visok procenat akcija koje se nalaze u slobodnom prometu i dostupne su potencijalnim investitorima, u visini od 80,45%.

5.2.5 Analiza poslovanja kompanije Beogradska autobuska stanica a.d., Beograd

Beogradska autobuska stanica (BAS) osnovana je 26. novembra 1965. godine kao Komunalno preduzeće „Autobuska stanica Beograd”, a osnivač je Skupština grada Beograda. Privatizacija preduzeća izvršena je 1997. godine, a 2001. godine promenjena je u akcionarsko društvo. Beogradska autobuska stanica pruža usluge u drumskom saobraćaju, bavi se i ugostiteljstvom, trgovinom i turizmom. Kompanija se 2007. godine uključila na Beogradsku berzu, tada je imala i najveću istorijsku cenu od 3.005,00 dinar (*Slika 5.16*).

Vlasnička struktura kompanije deli se na 56,69% akcija koje pripadaju zaposlenima i drugim malim akcionarima, 10% PIO fondu i 30,31% akcionarskom fondu AD Beograd.⁶⁷

Osnovni podaci		Dnevni podaci 02.06.2015.	
Naziv hartije	BAS a.d. Beograd, obične akcije sa pravom glasa	Cena	520
Simbol	BASB	Promena	4,00% 20 RSD
Tržište	MTP	Obim	3
Metod trgovanja	Metod preovlađujuće cene	Promet	1.560
Matični broj	07037929	Ukupna ponuda	103
ISIN	RSBASBE19264	Ukupna tražnja	55
CFI	ESVUFR	52 nedelje	
Oznaka sektora	H-5221	Najviša cena	Najniža cena
Naziv sektora	H - Saobraćaj i skladištenje	840	460
Broj izdatih hartija	311.187	11.09.2014.	22.05.2015.
Broj uključenih hartija	311.187	Istorijski	
Valuta	RSD	Najviša cena	Najniža cena
Statistički prikaz vlasništva preduzeća	Centralni registar HoV	3.005	460
Internet prezentacija	www.bas.rs	08.05.2007.	22.05.2015.
Pokazatelji			
Tržišna kapitalizacija	161.817.240		
EPS	3,84		
P/E	135,53		
P/B	0,35		
ROE	0,25		
Pokazatelji su izračunati prema podacima iz poslednjeg godišnjeg bilansa.			

*Slika 5.16. Opšte karakteristike i statistika podataka kompanije Beogradska autobuska stanica*⁶⁸

⁶⁷<http://www.bas.rs/> (pristupljeno: 4.6.2015. godine)

⁶⁸<http://www.belex.rs/trgovanje/hartija/dnevni/BASB> (pristupljeno: 2.6.2015. godine)

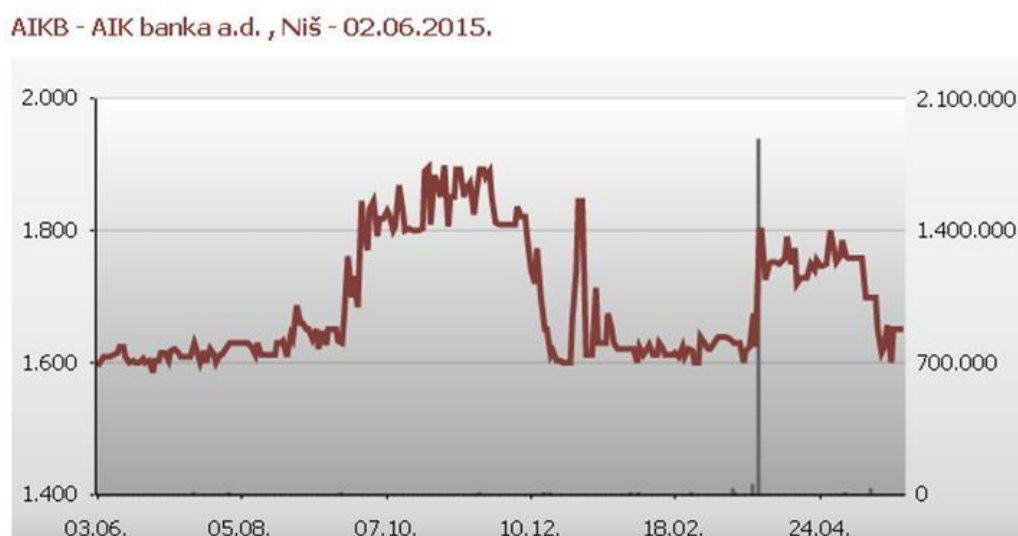


Slika 5.17. Grafik kretanja cene akcije BASB u periodu od juna 2014. do maja 2015. godine ⁶⁸

Od maja 2011. godine, cena akcije polako je opadala sa 1.600,00 dinara na 840,00 do 24.12.2014. godine. Tada je usledio drastičan pad cene akcije (Slika 5.17.) na 460,00 dinara, za samo jedan dan.

5.2.6 Analiza poslovanja kompanije Aik banka a.d., Niš

Aik banka osnovana je 1976. godine i gotovo dve decenije radila je kao interna banka Agroidustrijskog kombinata Niš. Izlaskom na otvoreno tržište 1993. godine počinje da obavlja univerzalne bankarske poslove. Zahvaljujući likvidnosti, solventnosti i rentabilnosti, Aik banka se uvrstila među lidere srpskog bankarskog sektora. Vlasnička struktura banke menja se u akcionarsko društvo 1995. godine, i tada akcije banke prelaze u vlasništvo pojedinačnih i institucionalnih akcionara. Strategija Aik banke jeste da širi obim svojih usluga iz godine u godinu, usmerena ka proizvodima namenjenim za stanovništvo i poljoprivredu, kao i sektoru malih i srednjih preduzeća. ⁶⁹



Slika 5.18. Grafik kretanja cene akcije AIKB u periodu od juna 2014. do maja 2015. godine ⁷⁰

⁶⁹<http://www.aikbanka.rs/sr/o-banci/istorijat> (pristupljeno: 4.6.2015. godine)

⁷⁰<http://www.belex.rs/trgovanje/hartija/dnevni/AIKB> (pristupljeno: 2.6.2015. godine)

Slika 5.18. pokazuje kretanje cene akcije AIKB, na kojoj se može videti da je nakon postepenog pada i rasta od početka 2015. godine, usledio nagli rast u martu. Smatra se da je tome doprinela vest da je deo MK grupe istakao ponudu za preuzimanje 100% akcijskog kapitala AIK banke, u cilju da ona bude još profitabilnija. U tom periodu AIK banka je zabeležila najveći rast prometa, na osnovu kojih je 30.000 akcija promenilo vlasnika, po prosečnoj ceni od 1.630,00 dinara.

Osnovni podaci		Dnevni podaci 02.06.2015.	
Naziv hartije	AIK banka a.d. Niš. obične akcije sa pravom glasa	Cena	1.650
Simbol	AIKB	Promena	0,00% 0 RSD
Tržište	Open Market	Obim	1.014
Metod trgovanja	Metod kontinuiranog trgovanja	Promet	1.673.100
Matični broj	06876366	Cena otvaranja	1.650
ISIN	RSAIKBE79302	Najviša dnevna cena	1.650
CFI	ESVUFR	Najniža dnevna cena	1.650
Oznaka sektora	K-6419	VWAP	1.650
Naziv sektora	K - Finansijske delatnosti i delatnost osiguranja	52 nedelje	
Broj izdatih hartija	9.045.756	Najviša cena	Najniža cena
Broj uključenih hartija	9.045.756	1.920	1.528
Valuta	RSD	29.10.2014.	03.06.2014.
Statistički prikaz vlasništva preduzeća	Centralni registar HoV	Istorijski	
Internet prezentacija	www.aikbanka.rs	Najviša cena	Najniža cena
Pokazatelji		15.829	1.150
Tržišna kapitalizacija	14.925.497.400	27.04.2007.	12.03.2009.
EPS	/	Godišnje statistike	
P/E	/	Prosečan promet	12.043.129
P/B	0,32	Prosečan broj transakcija	5
ROE	0,00	VWAP	1.637
Pokazatelji su izračunati prema podacima iz poslednjeg godišnjeg bilansa.		FFc	30,30%

Slika 5.19. Opšte karakteristike i statistika podataka kompanije Aik banka⁷⁰

Na osnovu Slike 5.18. vidi se velika istorijska razlika u ceni akcije, najviša je u 2007. godini iznosila 15.829,00 dinara, a najniža 1.150,00 dinara u 2009. godini. Godišnji prosečan promet od 12.043.129 akcija se spustio na 1.673.100 akcija. I prinos na akcijski kapital koji određuje realnu cenu akcija je 0,00 dinara.

5.3 Analiza očekivanog prinosa i rizika izabranih akcija

Očekivani prinos i rizik hartija od vrednosti mogu se izračunati na osnovu istorijskih podataka za određenu posmatranu hartiju od vrednosti, ukoliko oni postoje. Na sajtu <http://www.belex.rs> (Beogradska berza) postoje relevantni podaci za hartije od vrednosti koje se kotiraju na Beogradskoj berzi, sve od 2005. godine pa do današnjeg dana. Za odabrane akcije koje ulaze u sastav za formiranje optimalnog portfolija uzet je period posmatranja i analiziranja akcija od maja 2014. godine do maja 2015. godine, da bi se dobili što tačniji i precizniji rezultati. Pomoću programa Microsoft Office Excel, u kojem su cene datih akcija poređane po datumu za svaki trgovački dan, može se izračunati prosek cena hartija od vrednosti za svaki mesec primenom funkcije AVERAGE. Tada stopa prinosa sledi na osnovu formule (4.1), odnosno

$$r_{ij} = \frac{S_{ij} - S_{ij-1}}{S_{ij-1}},$$

gde su

r_{ij} - prinos i -te akcije u j -tom periodu,

S_{ij} - akcija kojoj odgovara prinos r_{ij} .

Dividende nisu uzete u obzir, jer u raspodeli dividende učestvuju samo oni akcionari kompanija koji su vlasnici akcija na dan isplate dividende, a oni akcionari koji su naknadno postali vlasnici, ne učestvuju u raspodeli dividende za predhodnu godinu.

Očekivani prinos za datu akciju dobija se zbirom stopa prinosa podeljenih sa ukupnim brojem posmatranih meseci za koje su u Excelu korišćene funkcije SUM i COUNT.

A na osnovu *Definicije 3.3.2* standardna devijacija dobija se iz sledeće formule:

$$\sigma(X)^2 = \frac{E((X - E(X))^2)}{m},$$

gde je

m - broj perioda (u ovom slučaju 12 meseci),

i standardna devijacija kao kvadratni koren iz varijanse na osnovu *definicije 3.3.4*,

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{E((X - E(X))^2)}{m}}.$$

Akcije kompanije Naftna Industrija Srbije (NIIS)

Tabela 5.1. Prosečna cena akcije NIIS po mesecima za posmatrani period trgovanja

	A	B
1	Mesec trgovanja	Prosečna cena
2	maj 2015	705,25
3	april 2015	691,10
4	mart 2015	659,91
5	februar 2015	727,67
6	januar 2015	721,95
7	decembar 2014	773,65
8	novembar 2014	844,53
9	oktobar 2014	882,74
10	septembar 2014	890,55
11	avgust 2014	892,38
12	jul 2014	911,13
13	jun 2014	914,43
14	maj 2014	924,15

Na osnovu *Tabele 5.1.* vidi se da je cena akcije bila u padu sve do marta 2015. godine kada je počela neznatno da raste. Takođe se vidi i da je prosečna cena akcije maja 2015. godine manja za 218,09 dinara u odnosu na maj iz predhodne godine.

Tabela 5.2. Prinos akcije NIIS po mesecima za posmatrani period trgovanja

D	E	F
Mesec trgovanja	Prinos	U procentima
maj 2015	0,0205	2,05%
april 2015	0,0473	4,73%
mart 2015	-0,0931	-9,31%
februar 2015	0,0079	0,79%
januar 2015	-0,0668	-6,68%
decembar 2014	-0,0839	-8,39%
novembar 2014	-0,0433	-4,33%
oktobar 2014	-0,0088	-0,88%
septembar 2014	-0,0021	-0,21%
avgust 2014	-0,0206	-2,06%
jul 2014	-0,0036	-0,36%
jun 2014	-0,0105	-1,05%

Tabela 5.2. pokazuje prinose za posmatrani period trgovanja, u kojoj se vidi da je najniži prinos bio u decembru 2014. godine i martu 2015. godine, a najveći u aprilu 2015. godine. Što dovodi do zaključka da je neznatni rast prosečne cene akcija u aprilu rezultirao najvećim skokom prinosa.

Tabela 5.3. Očekivani prinos, varijansa i standardna devijacija akcije NIIS

H	I
Očekivani prinos za akciju NIIS	U procentima
-0,0214	-2,14%
Varijansa za akciju NIIS	U procentima
0,0017	0,17%
Standardna devijacija za akciju NIIS	U procentima
0,0412	4,12%

Na osnovu Tabele 5.1. i Tabele 5.2. sledi očekivani prinos za akciju NIIS (Tabela 5.3). Ulaganje u akciju kompanije Naftne industrije Srbije donosi negativan očekivani prinos od 2,14%. Varijansa se procenjuje na 0,17% a standardno odstupanje na 4,12%.

Akcije kompanije Aerodrom Nikola Tesla (AERO)

Kao što se vidi iz Tabele 5.4. prosečna cena akcije kompanije Aerodrom Nikola Tesla bila je u konstantnom rastu, sa malim oscilacijama na početku godine. U odnosu na maj 2014. godine, zabeleženo je skoro trostruko povećanje prosečne cene akcije u maju 2015. godine.

Tabela 5.4. Prosečna cena akcije AERO po mesecima za posmatrani period trgovanja

	A	B
1	Mesec trgovanja	Prosečna cena
2	maj 2015	1.333,05
3	april 2015	1.221,10
4	mart 2015	1.003,41
5	februar 2015	954,72
6	januar 2015	949,89
7	decembar 2014	964,83
8	novembar 2014	855,68
9	oktobar 2014	845,74
10	septembar 2014	766,55
11	avgust 2014	655,52
12	jul 2014	595,61
13	jun 2014	586,38
14	maj 2014	565,65

Ako se posmatraju prinosi akcije AERO (Tabela 5.5), može se videti da su u posmatranom periodu trgovanja, zabeleženi veoma visoki prinosi u avgustu, septembru, oktobru i decembru 2014. godine, dok je najviši od 21,70% ostvaren u aprilu 2015. godine.

Tabela 5.5. Prinos akcije AERO po mesecima za posmatrani period trgovanja

D	E	F
Mesec trgovanja	Prinos	U procentima
maj 2015	0,0917	9,17%
april 2015	0,2170	21,70%
mart 2015	0,0510	5,10%
februar 2015	0,0051	0,51%
januar 2015	-0,0155	-1,55%
decembar 2014	0,1275	12,75%
novembar 2014	0,0118	1,18%
oktobar 2014	0,1033	10,33%
septembar 2014	0,1694	16,94%
avgust 2014	0,1006	10,06%
jul 2014	0,0157	1,57%
jun 2014	0,0366	3,66%

Na osnovu ostvarenih visokih prinosa iz meseca u mesec, sledi da se ostvaruje i dobar očekivani prinos akcije AERO (Tabela 5.6), koji je najviši u odnosu na očekivane prinose ostalih izabranih akcija. Zabeležena je i niska varijansa od 0,47%.

Tabela 5.6. Očekivani prinos, varijansa i standardna devijacija akcije AERO

H	I
Očekivani prinos za akciju AERO	U procentima
0,0762	7,62%
Varijansa za akciju AERO	U procentima
0,0047	0,47%
Standardna devijacija za akciju AERO	U procentima
0,0686	6,86%

Akcije kompanije Alfa Plam (ALFA)

Tabela 5.7. Prosečna cena akcije ALFA po mesecima za posmatrani period trgovanja

	A	B
1	Mesec trgovanja	Prosečna cena
2	maj 2015	25.038,45
3	april 2015	24.124,65
4	mart 2015	21.259,86
5	februar 2015	19.675,86
6	januar 2015	19.368,26
7	decembar 2014	20.113,26
8	novembar 2014	17.513,42
9	oktobar 2014	16.264,87
10	septembar 2014	15.542,86
11	avgust 2014	14.701,00
12	jul 2014	14.234,48
13	jun 2014	14.090,05
14	maj 2014	14.070,65

Prosečna cena akcije kompanije Alfa Plam iz meseca u mesec, beleži izuzetno visok rast, sa malim zanemarljivim padom prosečne cene početkom 2015. godine (*Tabela 5.7.*) U odnosu na maj 2014. godine, prosečna cena akcije skoro duplo je skočila u maju 2015. godine.

Tabela 5.8. Prinos akcije ALFA po mesecima za posmatrani period trgovanja

D	E	F
Mesec trgovanja	Prinos	U procentima
maj 2015	0,0379	3,79%
april 2015	0,1348	13,48%
mart 2015	0,0805	8,05%
februar 2015	0,0159	1,59%
januar 2015	-0,0370	-3,70%
decembar 2014	0,1484	14,84%
novembar 2014	0,0768	7,68%
oktobar 2014	0,0465	4,65%
septembar 2014	0,0573	5,73%
avgust 2014	0,0328	3,28%
jul 2014	0,0103	1,03%
jun 2014	0,0014	0,14%

Na osnovu *Tabele 5.8.*, u kojoj se vidi izračunat prinos akcije ALFA za svaki mesec u posmatranom periodu trgovanja, zabeležen je viši prinos akcije u decembru 2014. godine i aprilu 2015. godine u odnosu na ostale mesece, dok je nakon najvišeg prinosa u decembru usledio najniži prinos u januaru 2015. godine.

Tabela 5.9. Očekivani prinos, varijansa i standardna devijacija akcije ALFA

H	I
Očekivani prinos za akciju ALFA	U procentima
0,0504	5,04%
Varijansa za akciju ALFA	U procentima
0,0026	0,26%
Standardna devijacija za akciju ALFA	U procentima
0,0509	5,09%

S obzirom na visok kontinuiran porast prosečne cene, u posmatranom periodu trgovanja, usledio je i dobar očekivani prinos akcije, sa niskom varijansom, ali malo većim standardnim odstupanjem u odnosu na očekivani prinos akcije ALFA (*Tabela 5.9.*).

Ako se uporedi očekivani prinos akcije kompanije Aerodrom Nikola Tesla (*Tabela 5.6.*) i očekivani prinos akcije kompanije Alfa Plam (*Tabela 5.9.*) vidi se da je prinos akcije AERO veći za 2,58% od prinosa akcije ALFA, ali je varijansa akcije ALFA manja za 0,21% od varijanse akcije AERO.

Akcije kompanije Metalac (MTLC)

Na osnovu *Tabele 5.10.* vide se veće oscilacije u prosečnoj ceni akcije kompanije Metalac, iz meseca u mesec, u posmatranom periodu trgovanja. Prosečna cena akcije u maju 2015. godine, manja je za 269,3 dinara u odnosu na maj 2014. godine.

Tabela 5.10. Prosečna cena akcije MTLC po mesecima za posmatrani period trgovanja

	A	B
1	Mesec trgovanja	Prosečna cena
2	maj 2015	1.997,60
3	april 2015	2.114,15
4	mart 2015	2.087,00
5	februar 2015	2.052,72
6	januar 2015	2.141,63
7	decembar 2014	2.168,09
8	novembar 2014	2.225,00
9	oktobar 2014	2.253,04
10	septembar 2014	2.212,45
11	avgust 2014	2.203,90
12	jul 2014	2.215,09
13	jun 2014	2.193,38
14	maj 2014	2.266,90

Oscilacije su uticale i na dobijanje velikog broja negativnih prinosa (*Tabela 5.11.*) Najveći pad zabeležen je u maju 2015. godine, a zatim u februaru 2015. godine. U odnosu na prinos akcija NIIS, AERO i ALFA, akcije MTLC beleže najniži maksimalni prinos od 1,83%.

Tabela 5.11. Prinos akcije MTLC po mesecima za posmatrani period trgovanja

D	E	F
Mesec trgovanja	Prinos	U procentima
maj 2015	-0,0551	-5,51%
april 2015	0,0130	1,30%
mart 2015	0,0167	1,67%
februar 2015	-0,0415	-4,15%
januar 2015	-0,0122	-1,22%
decembar 2014	-0,0256	-2,56%
novembar 2014	-0,0124	-1,24%
oktobar 2014	0,0183	1,83%
septembar 2014	0,0039	0,39%
avgust 2014	-0,0050	-0,50%
jul 2014	0,0099	0,99%
jun 2014	-0,0324	-3,24%

Tabela 5.12. Očekivani prinos, varijansa i standardna devijacija akcije MTLC

H	I
Očekivani prinos za akciju MTLC	U procentima
-0,0102	-1,02%
Varijansa za akciju MTLC	U procentima
0,0005	0,05%
Standardna devijacija za akciju MTLC	U procentima
0,0224	2,24%

Na osnovu lošijih ostvarenih rezultata iz Tabele 5.10. i Tabele 5.11, sledi negativan očekivani prinos od 1,02%, ali je ostvarena najniža varijansa 0,05%, u odnosu na varijanse ostalih izabranih akcija. Očekivani prinos akcije MTLC ostvaruje duplo manji negativan očekivani prinos u odnosu na očekivani prinos akcije NIIS.

Akcije kompanije Beogradska autobuska stanicea (BASB)

Tabela 5.13. Prosečna cena akcije BASB po mesecima za posmatrani period trgovanja

	A	B
1	Mesec trgovanja	Prosečna cena
2	maj 2015	471,00
3	april 2015	470,00
4	mart 2015	489,09
5	februar 2015	505,00
6	januar 2015	505,00
7	decembar 2014	767,17
8	novembar 2014	840,00
9	oktobar 2014	840,00
10	septembar 2014	843,64
11	avgust 2014	850,00
12	jul 2014	850,00
13	jun 2014	850,00
14	maj 2014	850,00

Tabela 5.13. pokazuje konstantni pad prosečne cene akcije kompanije Beogradska autobuska stanica. Presečna cena akcije u maju, junu, julu i avgustu 2014. godine pokazuje da je cena akcije mirovala, odnosno da nije bilo većih promena. Zatim sledi manji pad u septembru 2014. godine, nakon čega cena akcije opet miruje u oktobru i novembru 2014. godine. Nagli skok usledio je početkom 2015. godine, sa 767,17 na 505,00 dinara. U maju 2015. godine zabeležena je prosečna cena od 471,00 dinara, što je za 379,00 dinara manje u odnosu na maj 2014. godine.

Tabela 5.14. Prinos akcije BASB po mesecima za posmatrani period trgovanja

D	E	F
Mesec trgovanja	Prinos	U procentima
maj 2015	0,0021	0,21%
april 2015	-0,0390	-3,90%
mart 2015	-0,0315	-3,15%
februar 2015	0,0000	0,00%
januar 2015	-0,3417	-34,17%
decembar 2014	-0,0867	-8,67%
novembar 2014	0,0000	0,00%
oktobar 2014	-0,0043	-0,43%
septembar 2014	-0,0075	-0,75%
avgust 2014	0,0000	0,00%
jul 2014	0,0000	0,00%
jun 2014	0,0000	0,00%

Nagli zabeleženi pad cene akcije u Tabeli 5.13. uticao je veoma negativno i na prinos u januaru 2015. godine, i tako akcije BASB beleže najviši negativni prinos u odnosu na ostale mesečne prinose i u odnosu na celokupne mesečne prinose ostalih izabranih akcija. Akcije kompanije Beogradske autobuske stanice, ostvaruju ili negativne prinose ili prinose 0,00% kada nema promene u ceni akcije, samo je jedan pozitivan prinos od 0,21% ostvaren u maju 2015. godine.

Tabela 5.15. Očekivani prinos, varijansa i standardna devijacija akcije BASB

H	I
Očekivani prinos za akciju BASB	U procentima
-0,0424	-4,24%
Varijansa za akciju BASB	U procentima
0,0088	0,88%
Standardna devijacija za akciju BASB	U procentima
0,0938	9,38%

Loše poslovanje kompanije i dobijeni negativni rezultati u Tabeli 5.13. i Tabeli 5.14, znatno su uticali i na dobijanje negativnog očekivanog prinosa od 4,24% i veoma visoke standardne devijacije od 9,38%. U odnosu na ostale izabrane kompanije, konkretno na akcije kompanije Naftne industrije Srbije i na akcije kompanije Metalac, koje imaju takođe negativne očekivane prinose, negativni očekivani prinos akcije BASB je za 2,07% veći od prinosa akcije NIIS i za 3,22% veći od prinosa akcije MTLC. Isto tako, varijansa i standardna devijacija je najviša u odnosu na ostale akcije koje ulaze u sastav za formiranje portfolija.

Akcije kompanije Aik banka (AIKB)

Prosečna cena akcije kompanije Aik banka imala je oscilacije u ceni iz meseca u mesec (*Tabela 5.16*). Najviši porast prosečne cene akcije zabeležen je na prelasku iz septembra u oktobar 2014. godine u iznosu od 143,29 dinara. U maju 2015. godine prosečna cena akcije je za 80,65 dinara bila veća u odnosu na maj 2014. godine.

Tabela 5.16. Prosečna cena akcije AIKB po mesecima za posmatrani period trgovanja

	A	B
1	Mesec trgovanja	Prosečna cena
2	maj 2015	1.704,85
3	april 2015	1.752,40
4	mart 2015	1.656,50
5	februar 2015	1.615,22
6	januar 2015	1.641,21
7	decembar 2014	1.713,61
8	novembar 2014	1.852,89
9	oktobar 2014	1.831,70
10	septembar 2014	1.688,41
11	avgust 2014	1.628,62
12	jul 2014	1.614,48
13	jun 2014	1.605,43
14	maj 2014	1.624,20

Tabela 5.17. ukazuje na to da je najveći pozitivan skok u ceni rezultirao najvećim prinosom u oktobru 2014. godine od 8,49%, da bi zatim u decembru 2014. godine usledio najviši negativni prinos od 4,22%. Takođe se mogu videti i značajne oscilacije prinosa iz meseca u mesec.

Tabela 5.17. Prinos akcije AIKB po mesecima za posmatrani period trgovanja

	D	E	F
	Mesec trgovanja	Prinos	U procentima
	maj 2015	-0,0271	-2,71%
	april 2015	0,0579	5,79%
	mart 2015	0,0256	2,56%
	februar 2015	-0,0158	-1,58%
	januar 2015	-0,0422	-4,22%
	decembar 2014	-0,0752	-7,52%
	novembar 2014	0,0116	1,16%
	oktobar 2014	0,0849	8,49%
	septembar 2014	0,0367	3,67%
	avgust 2014	0,0088	0,88%
	jul 2014	0,0056	0,56%
	jun 2014	-0,0116	-1,16%

Tabela 5.18. Očekivani prinos, varijansa i standardna devijacija akcije AIKB

H	I
Očekivani prinos za akciju AIKB	U procentima
0,0049	0,49%
Varijansa za akciju AIKB	U procentima
0,0018	0,18%
Standardna devijacija za akciju AIKB	U procentima
0,0424	4,24%

Akcije AIKB ostvaruju izuzetno mali očekivani prinos od 0,49% i u odnosu na takav očekivani prinos, visoku standardnu devijaciju od 4,24%. U odnosu na akcije kompanije Aerodroma Nikola Tesla i akcije kompanije Alfa Plam koje imaju pozitivan očekivani prinos, očekivani prinos akcije AIKB je za 7,13% manji od očekivanog prinosa akcije AERO i za 4,55% manji u odnosu na akcije ALFA.

5.4 Formiranje Markowitz-ovog optimalnog portfolija

Na osnovu dobijenih podataka za akcije svake kompanije može se formirati optimalni portfolio. Pored očekivanog prinosa i varijanse akcija, potrebno je još izračunati i kovarijansnu matricu, koja se formira kao

$$G = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2\sigma_1 & \sigma_3\sigma_1 & \sigma_4\sigma_1 & \sigma_5\sigma_1 & \sigma_6\sigma_1 \\ \sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \sigma_3\sigma_2 & \sigma_4\sigma_2 & \sigma_5\sigma_2 & \sigma_6\sigma_2 \\ \sigma_1\sigma_3 & \sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 & \sigma_4\sigma_3 & \sigma_5\sigma_3 & \sigma_6\sigma_3 \\ \sigma_1\sigma_4 & \sigma_2\sigma_4 & \sigma_3\sigma_4 & \sigma_4^2 & \sigma_5\sigma_4 & \sigma_6\sigma_4 \\ \sigma_1\sigma_5 & \sigma_2\sigma_5 & \sigma_3\sigma_5 & \sigma_4\sigma_5 & \sigma_5^2 & \sigma_6\sigma_5 \\ \sigma_1\sigma_6 & \sigma_2\sigma_6 & \sigma_3\sigma_6 & \sigma_4\sigma_6 & \sigma_5\sigma_6 & \sigma_6^2 \end{bmatrix}$$

Na osnovu dobijenih podataka za varijansu i standardnu devijaciju iz Tabela 5.3, 5.6, 5.9, 5.12, 5.15, 5.18 dobija se kovarijansna matrica, koja sledi na osnovu unetih parametara u Excel program

Tabela 5.19. Kovarijansna matrica za izabrane akcije kompanija

	A	B	C	D	E	F	G
1		NIIS	AERO	ALFA	MTLC	BASB	AIKB
2	NIIS	0,00166	0,00109	-0,00015	-0,00011	0,00170	0,00072
3	AERO	0,00109	0,00468	0,00243	0,00046	0,00178	0,00113
4	ALFA	-0,00015	0,00243	0,00264	0,00027	0,00143	0,00027
5	MTLC	-0,00011	0,00046	0,00027	0,00054	-0,00001	0,00069
6	BASB	0,00170	0,00178	0,00143	-0,00001	0,00878	0,00164
7	AIKB	0,00072	0,00113	0,00027	0,00069	0,00164	0,00176

Optimizacija Markowitz-ovog portfolija zasniva se na rešavanju sledećeg problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i &= \bar{r}_\pi \\ \sum_{i=1}^n \omega_i &= 1 \end{aligned}$$

odnosno, primenom Lagranžove funkcije definisane u poglavlju 4.2.1 *Markowitz-ov portfolio kao osnovni model optimizacije* sledi

$$\begin{bmatrix} 0,00166 & 0,00109 & -0,00015 & -0,00011 & 0,00170 & 0,00072 \\ 0,00109 & 0,00468 & 0,00243 & 0,00046 & 0,00178 & 0,00133 \\ -0,00015 & 0,00243 & 0,00264 & 0,00027 & 0,00143 & 0,00027 \\ -0,00011 & 0,00046 & 0,00027 & 0,00054 & -0,00001 & 0,00069 \\ 0,00170 & 0,00178 & 0,00143 & -0,00001 & 0,00878 & 0,00164 \\ 0,00072 & 0,00113 & 0,00027 & 0,00069 & 0,00164 & 0,00176 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} -0,0214 \\ 0,0762 \\ 0,0504 \\ -0,0102 \\ -0,0424 \\ 0,0049 \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0214 \\ 0,0762 \\ 0,0504 \\ -0,0102 \\ -0,0424 \\ 0,0049 \end{bmatrix} = \bar{r}_\pi$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Rešavanje ovog sistema linearnih jednačina nije tako jednostavno zbog većeg broja nepoznatih i lako se dolazi do greške u računanju. Stoga, radi preciznosti i korektnio dobijenih rezultata, ovaj problem optimizacije rešava se u Excelu.

Prvenstveno se definišu formule i označe odgovarajuća polja, kao što je prikazno u *Tabeli 5.20*. Za definisanje težinskih koeficijenta u početku se stavlja vrednost 0,00%, da bi se u kasnijim koracima na osnovu odgovarajuće funkcije dobile precizne vrednosti, odnosno koliko je optimalno uložiti u svaku akciju odabranih kompanija da bi se dobio efikasni portfolio. Očekivani prinosi su izračunati u poglavlju 5.3 *Analiza očekivanog prinosa i rizika odabranih akcija*, i oni se samo prepisuju, kao i kovarijansna matrica. Za varijansu (polje A15), uzima se proizvod svakog pojedinačnog težinskog koeficijenta i funkcije SUMPRODUCT, a prinos (polje A16) kao suma svakog pojedinačnog očekivanog prinosa i težinskog koeficijenta.

Tabela 5.20. Definisanje i popunjavanje odgovarajućih vrednosti za svaku izabranu akciju

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		NIIS	AERO	ALFA	MTLC	BASB	AIKB	
2	Težinski koeficijenti	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	
3	Očekivani prinos	-2,14%	7,62%	5,04%	-1,02%	-4,24%	0,49%	
4								
5								
6	Kovarijansna matrica	NIIS	AERO	ALFA	MTLC	BASB	AIKB	
7	NIIS	0,00166	0,00109	-0,00015	-0,00011	0,00170	0,00072	
8	AERO	0,00109	0,00468	0,00243	0,00046	0,00178	0,00113	
9	ALFA	-0,00015	0,00243	0,00264	0,00027	0,00143	0,00027	
10	MTLC	-0,00011	0,00046	0,00027	0,00054	-0,00001	0,00069	
11	BASB	0,00170	0,00178	0,00143	-0,00001	0,00878	0,00164	
12	AIKB	0,00072	0,00113	0,00027	0,00069	0,00164	0,00176	
13								
14	Varijansa	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	
15	Prinos	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	
16								
17		B3*SUMPRODUCT(\$B\$3:\$G\$3;B8:G8)					G3*G4	

Zatim se definišu varijansa, standardna devijacija i prinos portfolija, kao što je prikazano u *Tabeli 5.21*. Varijansa portfolija dobija se kao suma pojedinačnih varijansi, a standardna devijacija portfolija kao kvadrati koren iz varijanse portfolija. Prinos portfolija je ukupni prinos pojedinačnih prinosa, a target prinos predstavlja minimalnu prihvatljivu granicu prinosa koju portfolio treba da ostvari. Neka to bude npr. 5,04%.

Tabela 5.21. Definisanje varijanse, standardne devijacije, prinosa i terget prinosa portfolija

	J	K	L	M
Portfolio				
Varijansa		0,00%	←	SUM(B15:G15)
Standardna devijacija		0,00%	←	SQRT(K7)
Prinos		0,00%	←	SUM(B16:G16)
Target prinos		0,00%		

Pomoću funkcije SOLVE prikazane na *Slici 5.20*, na osnovu unetih parametara, za izabrane akcije, može se dobiti optimalan portfolio.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		NIIS	AERO	ALFA	MTLC	BASB	AIKB				
2	Težinski koeficijenti	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%		100%		
3	Očekivani prinos	-2,14%	7,62%	5,04%	-1,02%	-4,24%	0,49%				
4											
5											
6	Kovarijansna matrica	NIIS	AERO	ALFA	MTLC	BASB	AIKB				
7	NIIS	0,00166	0,00109	-0,00015	-0,00011	0,00170	0,00072				
8	AERO	0,00									
9	ALFA	-0,00									
10	MTLC	-0,00									
11	BASB	0,00									
12	AIKB	0,00									
13											
14	Varijansa	0,000									
15	Prinos	0,0									
16											
17											
18											
19											
20											

Solver Parameters

Set Target Cell:

Equal To: ☐ Max ☒ Min ☐ Value of:

By Changing Cells:

Subject to the Constraints:

Portfolio

Varijansa 0,00%

Standardna devijacija 0,00%

Prinos 0,00%

Target prinos 5,04%

Slika 5.20. Unos odgovarajućih parametara za funkciju SOLVE

U polje *Set Target Cell* unosi se polje u kome je definisan target prinos, u vrednosti od 5,04%, i postavlja se na *Min* jer treba da se postigne da prinos portfolija bude iznad target prinosa. Za *By Changing Cells* definišu se polja u kojima se nalaze težinski koeficijenti, u smislu da ta polja trebaju da se promene za odgovarajuće vrednosti kako bi portfolio bio optimalan. Zatim se za težinske koeficijente definiše još i da njihov ukupan zbir mora biti jednak jedinici (tj. 100%) u polje *Subject to the Constraints*. Polje I3 definisano je kao suma težinskih koeficijenata. Nakon unesenih parametara, klikne se opcija *Solve* i dobijaju se odgovarajuće vrednosti prikazane u Tabeli 5.22.

Tabela 5.22. Optimalan portfolio na osnovu izabranih akcija

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2		NIIS	AERO	ALFA	MTLC	BASB	AIKB				
3	Težinski koeficijenti	0,00%	47,27%	35,55%	0,00%	0,00%	17,18%		100%		
4	Očekivani prinos	-2,14%	7,62%	5,04%	-1,02%	-4,24%	0,49%				
5											
6											
7	Kovarijansna matrica	NIIS	AERO	ALFA	MTLC	BASB	AIKB				
8	NIIS	0,00166	0,00109	-0,00015	-0,00011	0,00170	0,00072				
9	AERO	0,00109	0,00468	0,00243	0,00046	0,00178	0,00113				
10	ALFA	-0,00015	0,00243	0,00264	0,00027	0,00143	0,00027				
11	MTLC	-0,00011	0,00046	0,00027	0,00054	-0,00001	0,00069				
12	BASB	0,00170	0,00178	0,00143	-0,00001	0,00878	0,00164				
13	AIKB	0,00072	0,00113	0,00027	0,00069	0,00164	0,00176				
14											
15	Varijansa	0,000000	-0,000052	0,000759	0,000000	0,000000	0,000000				
16	Prinos	0,00%	3,60%	1,79%	0,00%	0,00%	0,08%				

Portfolio

Varijansa 0,07%

Standardna devijacija 2,66%

Prinos 5,48%

Target prinos 5,04%

Na osnovu programa Microsoft Office Excel i funkcije SOLVE, dobija se optimalni portfolio za izabrane akcije koje se kotiraju na Beogradskoj berzi. Dobijeni su sledeći težinski koeficijenti:

$$\omega_{NIIS} = 0,00\%,$$

$$\omega_{AERO} = 47,27\%,$$

$$\omega_{ALFA} = 35,55\%,$$

$$\omega_{MTLC} = 0,00\%,$$

$$\omega_{BASB} = 0,00\%,$$

$$\omega_{AIKB} = 17,18\%.$$

Dakle, na osnovu funkcija SOLVE sledi da je najbolje ulagati u akcije kompanija koje imaju pozitivne očekivane prinose, i to ulagati u svaku srazmerno visini očekivanog prinosa.

Dobijen ukupni prinos portfolija je 5,48%, od kojeg 3,60% doprinosi ulaganje 47,27% sredstava u akcije kompanije Aerodroma Nikola Tesla, 1,79% doprinosi ulaganje 35,55% sredstava u akcije kompanije Alfa Plam i 0,08% doprinosi ulaganje 17,18% sredstava u akcije kompanije Aik banka.

Rizik portfolija se procenjuje na 0,07%, dok je standardno odstupanje 2,66%, što i nije tako loše za tržište kapitala Republike Srbije. Varijanse pojedinih akcija su izuzetno male.

6 ZAKLJUČAK

6.1 Kvantitativne i kvalitativne preporuke

Rezultati istraživanja ukazuju na adekvatnu primenu Markowitz-ovog modela za konstruisanje optimalnog portfolija sačinjenog od hartija od vrednosti koje se nalaze na tržištu kapitala Republike Srbije. Tehnika izračunavanja primenjena je u programu Microsoft Office Excel, da bi se dobili što tačniji i precizniji podaci.

Kompanije koje su bile predmet analize, u periodu od maja 2014. godine do maja 2015. godine, bave se različitom delatnošću i različito se kotiraju na listingu Beogradske berze. Izabrane su akcije kompanije Naftne industrije Srbije, Aerodroma Nikola Tesla, Alfa Plama, Metalca, Beogradske autobuske stanice i Aik banke.

Kompaniju Naftne industrije Srbije karakteriše negativan očekivani prinos od 2,14%, sa visokom standardnom devijacijom 4,12%. Smatra se da je na pad cene akcije uticala rusko ukrajinska kriza, smanjenje cene sirove nafte na svetskim berzama i negativne kursne razlike.

Nacionalna aviokompnija Nikola Tesla, nakon potpisivanja ugovora sa Etihad Airways-om, beleži izuzetan rast cene akcije. U maju 2015. godine iznosila je 1.333,05 dinara što je duplo u odnosu na maj 2014. godine. Time je povećan i očekivani prinos koji je najviši u odnosu na ostale akcije u visini od 7,62%, sa relativno niskom varijansom 0,47%.

Na drugom mestu po visini očekivanog prinosa od 5,04% nalazi se kompanija Alfa Plama. Ona beleži izuzetno visoku cenu akcije u odnosu na isti period iz 2014. godine i u odnosu na druge akcije. Poslovna dobit u prva tri meseca dostigla je 69,2 miliona dinara, dok je neto dobitak skočio skoro četiri puta na 107,5 miliona dinara. Ako se uporede očekivani prinosi akcija kompanije Aerodrom Nikola Tesla i kompanije Alfa Plam, vidi se da je prinos akcije avikompanije veći za 2,58% u odnosu na Alfa Plam.

Akcije kompanije Metalac ostvaruju negativan očekivani prinos ali za 1,14% manji u odnosu na negativni očekivani prinos akcije Naftne industrije Srbije. U poređenju sa ostalim akcijama, karakteriše ih najmanja varijansa 0,05%, i velika oscilacija u ceni, u rasponu od nekoliko godina, sa zabeleženih 140,00 dinara u aprilu 2002. godine na 2.300,00 dinara u aprilu 2007. godine.

Najnegativniji očekivani prinos od 4,24% imaju akcije Beogradske autobuske stanice, kao i najvišu ostvarenu varijansu od 0,88%. U odnosu na kompanije koje takođe imaju negativne očekivane prinose, negativni prinos akcije Beogradske autobuske stanice je za 2,07% veći od prinosa akcije Naftne industrije Srbije i za 3,22% veći od prinosa akcije Metalac. Ove akcije beleže konstantni pad, a nagli skok usledio je početkom 2015. godine, sa 767,17 na 505,00 dinara. U maju 2015. godine zabeležena je prosečna cena od 471,00 dinara, što je za 379,00 dinara manje u odnosu na maj 2014. godine.

Nakon vesti da je deo MK grupe istakao ponudu za preuzimanje 100% akcijskog kapitala Aik banke, u cilju da ona bude još profitabilnija, cena akcije Aik banke počinje da raste i beleži manji očekivani prinos 0,49%, koji je za 7,13% manji od očekivanog prinosa Aerodroma Nikola Tesla i za 4,55% manji u odnosu na očekivani prinos akcije Alfa Plama.

Pomoću funkcije SOLVE u Microsoft Office Excelu za unesene podatke svih akcija kompanija sledi da se za optimalan portfolio dobijaju relativno male vrednosti pod uticajem započetih reformi i nelikvidnosti tržišta. Prinos portfolija iznosi 5,48% sa znatno niskom varijansom 0,07%, ali isto tako treba ukazati na to da se vrednosti mogu razlikovati u odnosu na subjektivno ponašanje učesnika na tržištu.

6.2 Pravci daljih istraživanja

Nakon ekonomske krize i velikih političkih i socijalnih problema, cene akcija domaćih kompanija značajno su opale. Celokupna procena vrednosti, predviđanje kretanja cene, tehnička i fundamentalna analiza, u određenoj meri su subjektivne kategorije. Isto tako procena odgovarajuće dobiti se vrši na osnovu različitih metoda, i sam investitor određuje kada je pogodan trenutak da se kupi tj. proda određena hartija od vrednosti.

Na osnovu rezultata istraživanja neophodno je stalno pratiti kretanje tržišta i vršiti diverzifikaciju portfolija. Smatram da bi se najviše isplatilo ulaganje samo u akcije kompanije Aerodroma Nikola Tesla i akcije kompanije Alfa Plam, ali bi tada i rizik bio veći zbog kojeg se preporučuje diverzifikacija portfolija, odnosno ulaganje u veći broj različitih hartija od vrednosti. S obzirom da je upravljanje nacionalne aviokompanije u vlasništvu velike svetske aviokompanije i da se planiraju veliki projekti za unapređivanje i bolje funkcionisanje aerodroma, ulaganje u ove akcije u budućnosti trebalo bi da donese veliki prinos investitoru. A nakon najavljenih poskupljenja struja za avgust 2015. godine, ulaganje u akcije kompanije Alfa Plam bilo bi veoma isplativo sa porastom kupovine štednjaka i peći na čvrsta goriva, kao i mnogih drugih proizvoda za grejanje.

7 Literatura

- [1] Anđelić G. : „Investiranje", FTN izdavaštvo, Novi Sad, 2006.godina
- [2] Anđelić G., Đaković V. : „Osnove investicionog menadžmenta", Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2010.godina
- [3] Hegstrom R. : „Voren Bafet za sva vremena: principi stari, ekonomija nova", Plato, Beograd, 2006.godina
- [4] Jeremić Z. : „Finansijska tržišta i finansijski instrumenti", Univerzitet Singidunum, Beograd, 2012.godina
- [5] Jovanović P. : „Upravljanje investicijama", Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 2006.godina
- [6] Krejić N. : „Finansijska matematika 2", Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, pisani materijal, 2011.godina
- [7] Luenberger D. : „Investment science", Oxford University press, New York, 1998.godina
- [8] Lužanin Z. : „Matematički modeli u ekonomiji", Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, pisani materijal, 2007.godina
- [9] Mankju G. : „Principi ekonomije", Ekonomski fakultet Beograd, Beograd, 2008.godina, 566.strana
- [10] Markowitz H. : „The Journal of finance", Vol.7, No. 1, American Finance Association, 1952.godina, 78.strana
- [11] Rajter Ćirić D.: „Verovatnoća", Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Novi Sad, 2009.godina
- [12] Stojadinović D. : „Osnovi naučnog rada", Ekonomski fakultet, Priština, 2003.godina
- [13] Vukadinović P, Jović Z. : „Investicije", Univerzitet Singidunum, Beograd, 2012.godina
- [14] Vunjak N. : „Investiciono i hipotekarno bankarstvo", Ekonomski fakultet u Subotici, Subotica, 2013.godina
- [15] <http://www.aikbanka.rs>
- [16] <http://www.bas.rs>
- [17] <http://www.belex.rs>
- [18] <http://www.ekapija.com>
- [19] <http://www.finance.yahoo.com>
- [20] <http://new.airserbia.com>
- [21] <http://www.policonomics.com>
- [22] <http://www.psinvest.rs>
- [23] <http://www.slideshare.net>

Biografija



Ljiljana Momirov rođena je 20. februara 1988. godine u Novom Sadu. Završila je gimnaziju „Laza Kostić” 2007. godine. Diplomirala je 2013. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu, smer Matematika finansija u Novom Sadu, sa temom diplomskog rada „Integrali bazirani na monotonim skupovnim funkcijama”. U oktobru 2013. godine upisuje master studije primenjene matematike na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu.