UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Daniela Žigmund

PRIMENA FAZI SKUPOVA KOD PORTFOLIO MATRICA U STRATEGIJSKOM MENADŽMENTU

MASTER RAD

Mentor: dr Nebojša Ralević

Jul 2015. godine
Novi Sad

Sadržaj

Uvod

Donošenje odluka predstavlja svakodnevni problem u ekonomiji i finansijama, medicini, biologiji, psihologiji, sociologiji, politici, lingvistici, informatici, elektronskom poslovanju, inženjeringu, menadžmentu, itd. Modeli u bilo kojoj od pomenutih oblasti se tradicionalno zasnivaju na matematici koja se temelji na klasičnoj dvoelementnoj logici tj. logici u kojoj svaki element ili pripada ili ne pripada skupu, a treće opcije nema. Međutim za složene situacije i sisteme prožete neodređenošću, takav pristup nije odgovarajući jer je previše ograničen. Kako bi se taj problem izbegao i omogućio što verodostojniji rezultat, potrebno je sve posmatrati u fazi okruženju.

Tema ovog master rada pripada savremenoj matematičkoj oblasti baziranoj na fazi skupovima, tj. teoriji fazi skupova. Fazi brojevi su jedan od načina da se opiše nejasnoća podataka i nepreciznost. Oni se mogu smatrati kao produžetak realnih brojeva. Reč fazi (eng. fuzzy), predstavlja neodređen, neprecizan pojam, u matematičku literaturu uvodi Lotfi A. Zadeh 1965. godine u radu „Fuzzy Sets: Information and Control", da bi koristio podatke koji poseduju određenu neizvesnost. ([23])

Osnovni cilj definisanja ovog pojma je da se na matematički, formalan način predstavi i modelira neodređenost i nepreciznost prisutna u svakodnevnom životu. Zahvaljujući uvođenju pojma fazi, omogućeno je da se nekom iskazu dodeli vrednost koja varira između potpuno netačno do potpuno tačno. Kod klasičnih skupova postoji jasna granica pripadnosti skupu, tačnije element ili pripada ili ne pripada datom skupu, dok kod fazi skupova ta granica nije jasno određena. Fazi skup predstavlja uopštenje klasičnog skupa, jer se za svaki element određuje stepen pripadnosti skupu. Pripadnost elementa se može okarakterisati brojem iz intervala [0,1] i funkcija kojom se opisuje ta pripadnost se naziva funkcija pripadnosti (eng. membership function). Upravo fleksibilnost pri izboru oblika funkcije pripadnosti omogućava lakše prilagođavanje fazi sistema realnim situacijama i to je jedan od osnovnih razloga zbog kojih fazi sistemi u sve većoj meri postaju zamena klasičnim inženjerskim sistemima. Kao nadogradnja teorije fazi skupova razvijena je teorija fazi brojeva, i fazi aritmetika.

U ovom radu dat je pregled savremenih rezultata iz fazi teorije. Rad se sastoji iz sedam poglavlja. Prvo poglavlje ima za cilj da uvede u osnove fazi razmišljanja, i u samu fazi aritmetiku. Prikazane su operacije sa fazi skupovima, ukratko su objašnjeni fazi brojevi, kao i princip proširenja. Dat je detaljan pregled osnovnih pojmova i definicija vezanih za fazi skupove i njihova primenu u raznim oblastima. Literatura korišćena pri izradi ovog poglavlja je [1, 8, 11, 13, 19, 20, 23].

U drugom poglavlju je dat detaljan pregled onovnih definicija i osobina trougaonih normi i konormi, ilustrovanih pomoću primera i grafika. Predstavljene su osobine za četiri osnovne t-norme i t-konorme. Literatura korišćena u drugom poglavlju je iz [11, 13, 19, 20, 21, 23, 31].

U trećem poglavlju bazirali smo se na ulogu fazi matematike u ekonomskom odlučivanju. Tradicionalno, ekonomski modeli su zasnovani na klasičnoj matematici utemeljenoj na aristotelovskoj dvoelementnoj logici. Sa pojavom fazi matematike, kao sredstva za modeliranje pojava koje su prožete neodređenošću i nekompletnošću, stvara se mnogo adekvatniji okvir za modeliranje ekonomskih pojava. Novi koncept je rezultirao pojavom približnog rezonovanja i fazi sistema kontrole koji su se pokazali kao efikasno sredstvo pri donošenju odluka u uslovima neodređenosti.

U narednim poglavljima uveden je pojam portfolio matrice. Objašnjena je ukratko portfolio analiza, njene prednosti i portfolio strategije. Objašnjene su neke od portfolio matrica koje se koriste u strategijskom menadžmentu. Nakon toga, prikazali smo primenu fazi skupova sa različitim tumačenjem t-normi portfolio matrica u strategijskom menadžmentu, detaljnije je objašnjena fazi funkcija pripadnosti koja se koristi u rast-udeo portfolio matrici kao i neke druge vrste portfolio matrica. Koristeći teoriju fazi odlučivanja možemo izabrati portfolio, tačnije, dat je numerički primer korišćenja fazi teorije odlučivanja da struktuira portfolio uzimajući u obzir slučaj menadžera fonda.

U poslednjem poglavlju prikazana je optimizacija portfolija pomoću Markowitz-ovog modela. Harry Markowitz bio je pionir moderne ere teorije portfolija. U svom radu „Portfolio Selection" objavljenom 1952. godine u časopisu Journal of Finance, polazeći od pretpostavke da većina investitora teži da maksimizira dobit portfolija i minimizira njegov rizik, formulisan je koncept očekivani prinos-varijansa, gde je dobit modelirana očekivanim prinosom portfolija, a rizik njegovom varijansom. Privlačan i razuman sa teorijske tačke gledišta, njegov model je bio osnova za brojna buduća istraživanja, primene, proširenja i poboljšanja. Slobodno možemo reći da u posleratnoj ekonomiji nije bilo doprinosa teoriji portfolija koji bi u tom smislu, i u pogledu originalnosti, mogao da se uporedi sa Markowitz-ovim radom. Njegov pristup i danas je najjednostavniji i najopštiji problem selekcije portfolija. Markowitz-ov model je problem kvadratnog programiranja i ujedno jedna od najvažnijih primena ove oblasti numeričke optimizacije.

***

Izuzetnu zahvalnost dugujem svom mentoru, prof. dr Nebojši Raleviću, na ukazanom poverenju, pruženom znanju, požrtvovanosti, velikom strpljenju i pomoći, kao i na korisnim sugestijama i primedbama bez kojih ne bih uspela da završim ovaj master rad. Takođe, zahvaljujem se prof. dr Vladimiru Đakoviću na podršci i znanju koje mi je pružio tokom master studija, kao i prof. dr Lidiji Čomić, članu komisije.

Posebnu zahvalnost dugujem i svojoj porodici, i prijateljima koji su mi bili podrška tokom čitavih studija.

Novi Sad, jul 2015. godina

Daniela Žigmund

1 Osnovna fazi aritmetika

U slučajevima kada je nemoguće napraviti jasnu razliku između pripadnosti ili nepripadnosti nekog elementa datom skupu, ne mogu se koristiti principi klasične teorije skupova. Takve situacije su vrlo česte u svakodnevnom životu. Primera radi, zaposlenima u školi je postavljeno pitanje da li se slažu sa tvrdnjom da je visina njihovih mesečnih primanja odgovarajuća. Između ostalog mogu se dobiti različiti odgovori, a mi ćemo se bazirati na odgovore: ne slažem se, delimično se slažem, u potpunosti se slažem.

U ovom slučaju univerzalni skup je skup svih zaposlenih, a posmatra se njegov podskup sačinjen od zaposlenih koji se slažu sa gore navedenom tvrdnjom. Već na ovom jednostavnom primeru se vidi da nije u pitanju klasičan skup, jer postoje zaposleni koji se samo u određenoj meri slažu sa datom tvrdnjom. Zbog neodređenosti koja se javlja u ovakvim i sličnim situacijama nastala je potreba da se one matematički opišu, pa se, kao uopštenje klasičnih skupova, javljaju fazi skupovi.

1.1 Fazi skupovi

U ovom poglavlju dati su osnovni pojmovi koji su vezani za fazi skupove počevši od same definicije. Pored toga, dat je pregled uopštenja pojmova iz klasične teorije skupova kao i definicije osobina koje su karakteristične samo za fazi skupove. [videti 8, 13, 19]

U svakodnevnom jeziku u prenošenju znanja i informacija pojavljuje se velika nepreciznost i neodređenost, rasplinutost (eng. fuzziness). Karakteristike kao „star", „zdrav", „velik", „mlad", itd. su jednostavni primeri takvih termina. Ponekad se i u stručnim krugovima u komunikaciji upotrebljava prilična nepreciznost. Npr. ako se uzme primer iz života „Devojka je lepa" za većinu ljudi je razumljiviji od iskaza „Lepotu devojke na skali od 1 do 10 ocenjujemo sa 8.7". Fazi pristup, pored nepreciznosti, karakteriše i mekoća, postepenost prelaza od jedne do druge krajnosti, npr. od ukusnog do neukusnog jela. Sam L. Zadeh je rekao: „Kako složenost sistema raste, sposobnost da se donesu precizni a istovremeno i značajni iskazi o njegovom ponašanju opada dok se postigne prag iza kojeg preciznost i značajnost ne postanu međusobno isključujuće karakteristike". Osnovni cilj je da se izloži matematička aparatura pomoću koje će se moći predstaviti i računati sa tako nepreciznim pojmovima i tvrđenjima. Prve rezultate u ovoj oblasti je dao L. Zadeh 1965. godine. Od tada teorija fazi skupova, fazi logike i opštije fazi sistema se razvila zahvaljujući pre svega mnogobrojnim primenama. ([8])

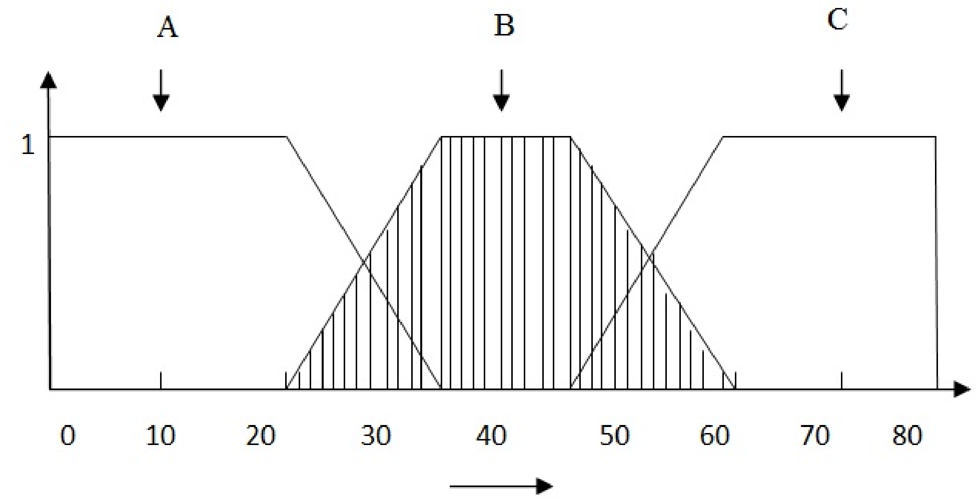
Fazi skup dozvoljava da neki element samo u određenoj meri pripada skupu, kao što su u gore datom primeru zaposleni koji se delimično slažu. Funkcija kojom se opisuje stepen pripadnosti nekog elementa se naziva funkcija pripadnosti i koja je data sledećom definicijom. [8, 13, 19]

Definicija 1.1. [13] *Funkcija pripadnosti za fazi skupove, u oznaci μ je preslikavanje μ: X$\rightarrow$ [0,1], gde je X univerzalni skup.*

U primeru koji smo na početku naveli, odgovorima: u potpunosti se slažem, ne slažem se i delimično se slažem; mogu se dodeliti vrednosti 0, 0.5 i 1, redom. Na ovaj način je brojevima opisan subjektivan osećaj svakog ispitanika.

Fazi skup se definiše upravo preko svoje funkcije pripadnosti. [8, 13, 19]

Primer 1. [23] Neka je A skup svih ljudi. Posmatraju se tri fazi podskupa: mladi A, srednjih godina B , i stari C. Odgovarajuće funkcije pripadnosti su date na Slici 1.1.



Slika 1.1 [23] Primer fazi skupa

Sa grafika se može primetiti da mladi ljudi koji imaju od 0 do 20 godina imaju vrednost funkcije pripadnosti 1, kako broj godina raste, vrednost njihove funkcije pripadnosti linearno opada. Slično je i kod ljudi koji po starosnoj dobi pripadaju skupu C, odnosno za ljude od 60 godina pa naviše, funkcija pripadnosti ima vrednost 1, a na intervalu od 45 do 60 godina, funkcija pripadnosti raste linearno. Slično je i kod ljudi koji pripadaju skupu B. Vrednost njihove funkcije pripadnosti je 1 na intervalu [30, 50], a na intervalima [20, 35] i [45, 60], funkcija uzima vrednosti iz intervala [0, 1].

Analitički, date funkcije pripadnosti mogu biti predstavljene na sledeći način:

Na podskupu A

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{x} \in [0, 20] \\ \frac{-1}{15}x + \frac{7}{3}, & \text{x} \in [20, 35] \end{cases}$$

Na podskupu B

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}x - \frac{4}{3}, & \text{x} \in [20, 35] \\ 1, & \text{x} \in [30, 50] \\ \frac{-1}{15}x + 4, & \text{x} \in [45, 60] \end{cases}$$

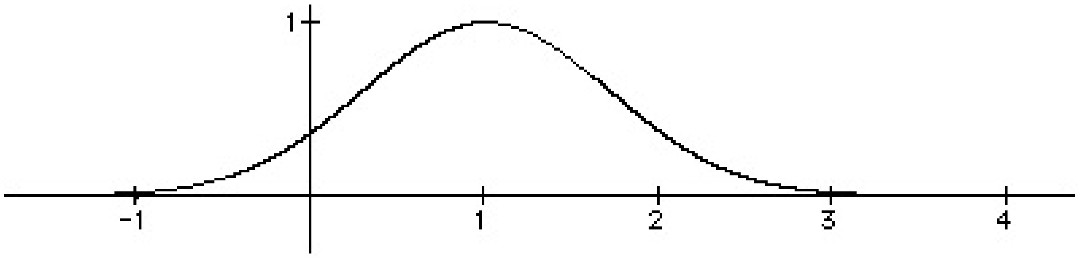
Na podskupu C

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}x - 3, & \text{x} \in [45, 60] \\ 1, & \text{x} \in [60, 100] \end{cases}$$

Definicija 1.2. [13] *Fazi skup A je skup uređenih parova (x, μ_A(x)) gde je x element univerzalnog skupa X, a μ_A(x) vrednost funkcije pripadnosti za element x tj.*

$$A=\{(x,\ \mu_A(x)\ )|x \in X, \mu_A(x) \in [0,1]\}$$

Funkcija pripadnosti određuje ocenu tj. stepen kojim neki element x ∈ A pripada fazi skupu A. Iz date definicije se jasno vidi da je klasičan skup specijalan slučaj fazi skupa kada se uzme da je vrednost funkcije pripadnosti za svaki element jednaka jedinici. Ako fazi skup ima konačno mnogo elemenata, oni se mogu nabrojati i obično se elementi koji imaju nulti stepen pripadnosti (tj. za koje je vrednost funkcije pripadnosti jednaka nuli) ne navode. Ukoliko fazi skup ima konačan broj elemenata, oni se mogu prikazati i pomoću tabele, navodeći u jednom redu elemente, a u drugom odgovarajuće vrednosti funkcije pripadnosti.



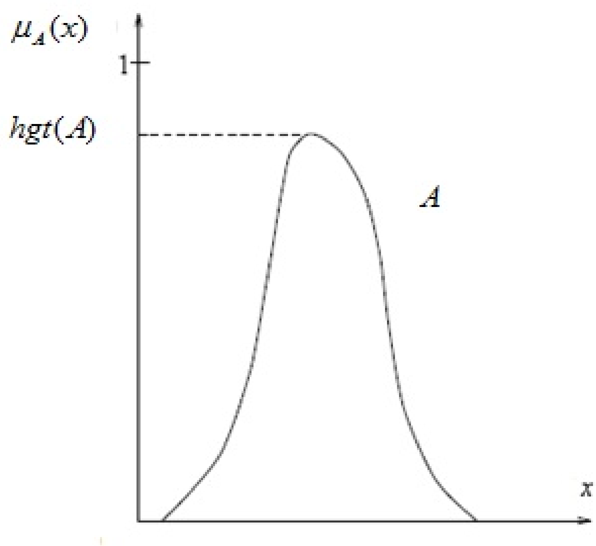
Slika 1.2 Funkcija pripadnosti za „x je blizu 1"

Definicija 1.3. [13] *Visina hgt(A) fazi skupa A je supremum funkcije pripadnosti, tj.*

$$hgt(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

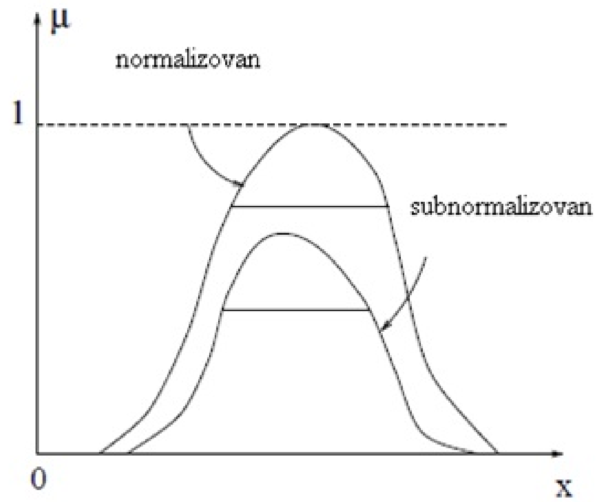
U slučaju da fazi skup A broji konačno mnogo elemenata, visina se definiše kao maksimum funkcije pripadnosti tj.

$$hgt(A) = \max_{x \in X} \mu_A(x)$$



Slika 1.3 [13] Visina fazi skupa A

Definicija 1.4. [13] *Fazi skup A je* **normalizovan** *ako je hgt(A) = 1, odnosno ako postoji bar jedan element, iz univerzalnog skupa, takav da je vrednost funkcije pripadnosti jednaka jedinici. U suprotnom fazi skup se naziva* **subnormalizovan**.



Slika 1.4 [13] Normalizovan i subnormalizovan fazi skup

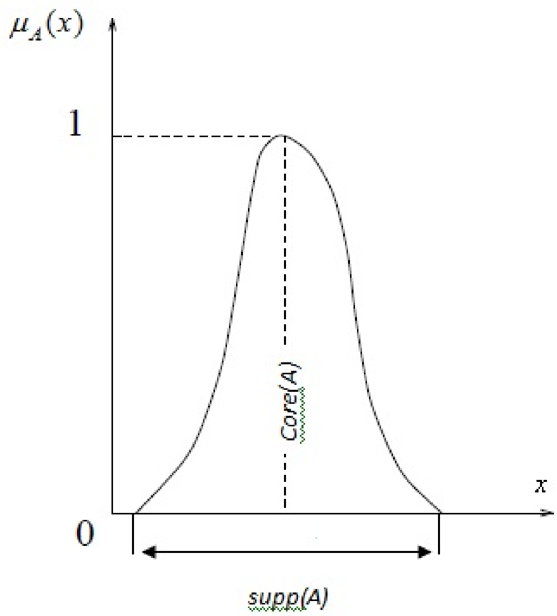
Definicija 1.5. [13] *Jezgro core(A) fazi skupa A je klasičan skup svih elemenata $x \in X$ takvih da je vrednost funkcije pripadnosti jednaka jedinici, tj.*

$$core(A)= \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$$

Odnosno, to je skup svih onih elemenata koji u potpunosti pripadaju datom skupu.

Definicija 1.6. [13] *Nosač supp(A) fazi skupa A je klasičan skup svih elemenata $x \in X$ čija je vrednost funkcije pripadnosti veća od nule, tj.*

$$supp(A)= \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$$



Slika 1.5 [13] Jezgro i nosač fazi skupa A

Primer 2. Neka je dat sledeći fazi skup:

$$A = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.4), (x_3, 0.2), (x_4, 1), (x_5, 0.8), (x_6, 0.3)\}$$

što se može predstaviti i kao:

$$A = \{(0.1/x_1), (0.4/x_2), (0.2/x_3), (1/x_4), (0.8/x_5), (0.3/x_6)\}$$

To je jedan diskretan fazi skup sastavljen od šest uređenih parova. Elementi x_i, i = 1,2,. . ., 6 ne moraju da budu brojevi, oni jednostavno pripadaju običnom skupu A = $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, A $\subseteq$ X. Funkcija pripadnosti na intervalu [0, 1] uzima sledeće vrednosti:
$\mu_A(x_1)$ = 0.1; $\mu_A(x_2)$ = 0.4; $\mu_A(x_3)$ = 0.2; $\mu_A(x_4)$ = 1; $\mu_A(x_5)$ = 0.8; $\mu_A(x_6)$ = 0.3.

Zaključak je da element x_4 u potpunosti pripada fazi skupu *A*, dok element x_1 jako malo pripada fazi skupu *A* jer je 0.1 jako blizu nule.

Slede dva primera za gore definisan skup A:

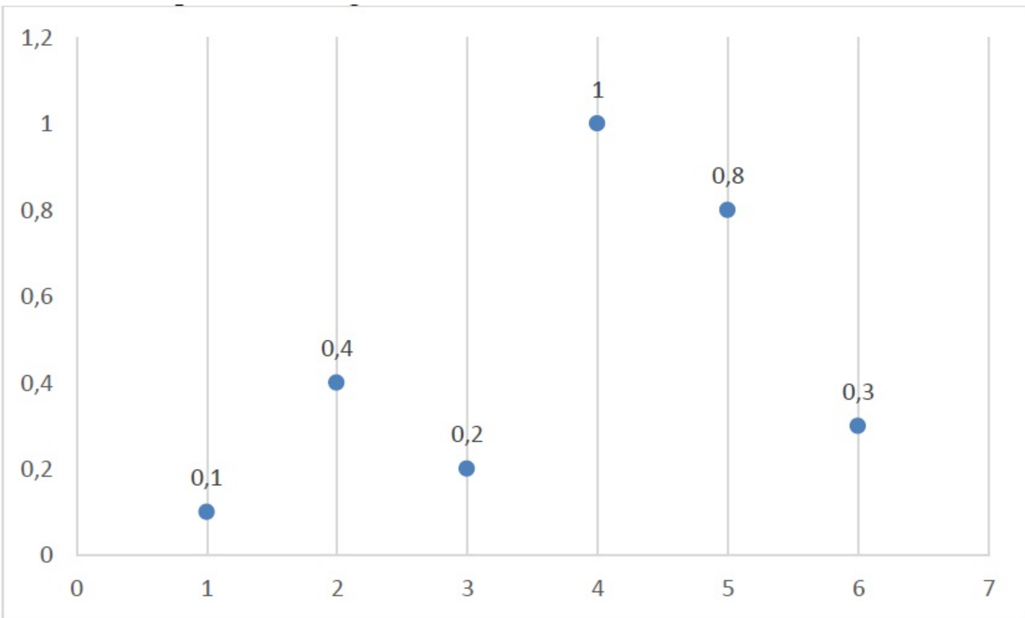
1. Neka su x_i, i = 1,2,. . ., 6 definisani na sledeći način:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6.$$

Dakle skup A je A ={1,2,3,4,5,6} i on je podskup univerzalnog skupa koji je u ovom slučaju skup prirodnih brojeva X = N. Onda fazi skup *A* postaje:

$$A = \{(1, 0.1), (2, 0.4), (3, 0.2), (4, 1), (5, 0.8), (6, 0.3)\}$$

Što se može predstaviti i grafički:



Slika 1.6 Grafički prikaz fazi skupa A

2. Sad se može uzeti empirijski primer. Jovanina ljubimica Sanja, dobila je 6 štenaca, no nisu joj svi podjednako dragi. To znači da u skladu sa definicijom gore datog fazi skupa *A* sledi:

$$A = \{(Roki, 0.1), (Mara, 0.4), (Viki, 0.2), (Dona, 1), (Marli, 0.8), (Rex, 0.3)\}$$

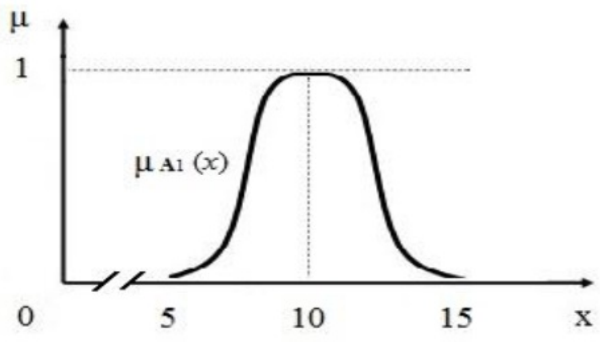
Odnosno, iz pomenutog legla Jovana će sebi odabrati Donu dok će preostalih 5 štenaca recimo pokloniti svojim drugaricama.

Primer 3. [1] U ovom primeru su predstavljeni brojevi koji su blizu 10.

1. Prvo se posmatra fazi skup

$$A = \{(x, \mu_{A_1}(x))|x \in [5, 15], \mu_{A_1}(x) = \frac{1}{1+(x-10)^2}\}$$

gde je $\mu_{A_1}(x)$ (Slika 1.7) neprekidna funkcija. Fazi skup A_1 predstavlja realne brojeve *blizu* 10.

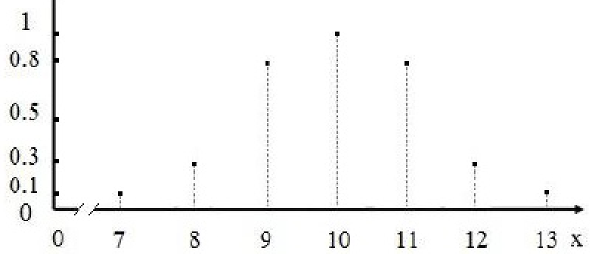


Slika 1.7 Realni brojevi blizu 10

2. Prirodni brojevi *blizu* 10 mogu biti izraženi pomoću konačnog fazi skupa, koji se sastoji od sedam uređenih parova

$$A_2 = \{(7, 0.1), (8, 0.3), (9, 0.8), (10, 1), (11, 0.8), (12, 0.3), (13, 0.1)\}$$

Funkcija pripadnosti, $\mu_{A_2}(x)$ (Slika 1.8) je diskretna funkcija



Slika 1.8 Prirodni brojevi blizu 10

Definicija 1.7. $[1, 11]$ *Fazi skup je konveksan ako i samo ako:*

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\},\ x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0, 1].$$

Prema tome, ako se uzmu dva elementa a i b iz konveksnog fazi skupa i spoje jednom duži, vrednost funkcije pripadnosti za svaku tačku te duži mora biti veća ili jednaka minimalnoj vrednosti funkcije pripadnosti za elemente a i b.

Kada postoji neki problem sa određenim stepenom neodređenosti, to može da se modelira i verovatnoćom koja isto kao i funkcija pripadnosti uzima vrednosti iz intervala [0,1]. Zato sledi primer koji će ukazati na osnovnu razliku u primeni verovatnoće i funkcije pripadnosti.

Primer 4. [23] Neka je X skup svih tečnosti. Uočimo njegov fazi podskup A: „tečnosti pogodnih za piće”. Tako će tečnosti kao čista voda imati vrednost funkcije pripadnosti 1, dok recimo vino može imati stepen 0.6, voćni sok 0.8, rakija 0.2, sona kiselina 0. Ako sada zamislimo situaciju da se žedni putnik nalazi u pustinji i da nailazi na dve boce sa tečnostima gde na prvoj piše vrednost funkcije pripadnosti μ_A = 0.92 a na drugoj boci verovatnoća da je pitka tečnost 0.92. Koju bocu će putnik izabrati? Da je funkcija pripadanosti 0.92 znači da se u boci nalazi tečnost između kisele vode i soka, što je prilično prihvatljivo. Za razliku od prve boce izborom druge boce putnik može dobiti i pitku vodu, no isto tako može dobiti i otrov. Očigledan izbor će biti prva boca.

1.1.1 Operacije sa fazi skupovima

Operacije sa fazi skupovima su prirodna uopštenja operacija sa klasičnim skupovima. Zato je prirodno da formule za operacije sa klasičnim skupovima iskazanim sa karakterističnim funkcijama prenesemo na funkcije pripadanja. Tako imamo *uniju, presek i komplement*:

$$\mu_{A\bigcup B}(\mathrm{x}) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$
$$\mu_{A\bigcap B}(\mathrm{x}) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$
$$\mu_{A^C}(\mathrm{x}\ ) = 1\text{-}\ \mu_A(x), \text{ respektivno.}$$

Na Primeru 1. se može potražiti funkcija pripadanja preseka ljudi srednjih godina i starih, kao i ljudi koji nisu mladi. Lako je videti da za operacije sa fazi skupovima važe sve prethodno navedene osobine za operacije sa klasičnim skupovima sem zakona kontradikcije i zakona isključenja trećeg.

Reći ćemo da je fazi podskup B *podskup* fazi podskupa A ako je $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$ za sve x $\in$ X. Za fazi podskup A definišemo njegov α-presek, $\alpha \in$ [0,1], kao klasičan skup

$$[A]_\alpha = \{\mathrm{x} \mid \mu_A \geq \alpha\ \}.$$

Primetimo da $\alpha \leq \beta$ povlači $[A]_\beta \subset [A]_\alpha$ i da je za fazi podskupove A i B

$$[A \bigcup B]_\alpha = [A]_\alpha \bigcup [B]_\alpha \text{ i } [A \bigcap B]_\alpha = [A]_\alpha \bigcap [B]_\alpha.$$

Svaki fazi podskup se može rekonstruisati pomoću svojih α-preseka, preko specijalnih fazi podskupova $\alpha[A]_\alpha$. Tačnije, važi sledeća teorema o dekompoziciji fazi skupa.

Teorema 1.1. [20] *Za svaki fazi podskup A važi*

$$A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha[A]_\alpha,$$

gde je $\bigcup$ *unija fazi skupova.*

Dokaz 1. *Neka je x proizvoljan fiksan elemenat iz X. Označimo* $\mu_A(x)$ *= r. Tada je*

$$\mu_{\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha[A]_\alpha(x)} = \sup_{\alpha\in[0,1]} \mu_{\alpha[A]_\alpha}(x) = \max\Big(\sup_{\alpha\in[0,r]} \mu_{\alpha[A]_\alpha}(x), \sup_{\alpha\in[r,1]} \mu_{\alpha[A]_\alpha}(x)\Big).$$

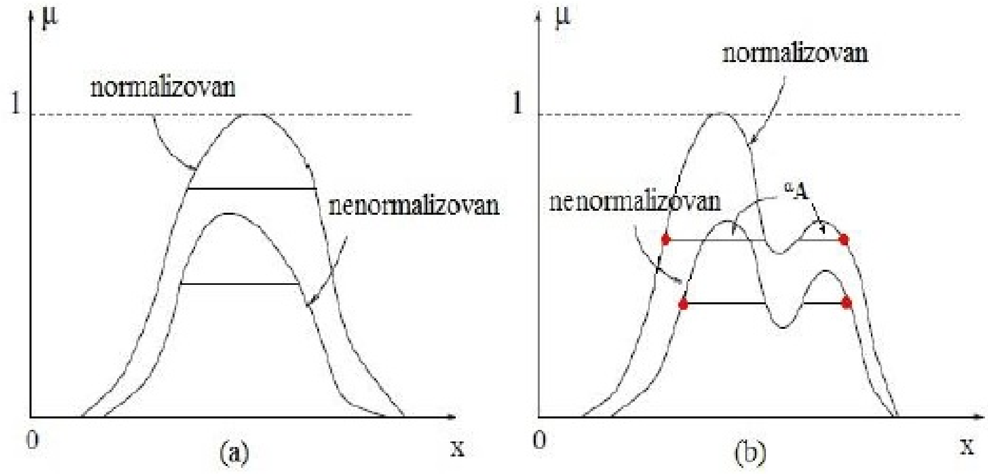
Kako je za $\alpha \in [0, r]$ *uvek* $\mu_A(x) = r \geq \alpha$*, to je* $\mu_{\alpha[A]_\alpha} = \alpha$*, a za*

$$\alpha \in [r, 1] \text{ uvek je } \mu_A(x) = r < \alpha, \text{ pa je } \mu_{\alpha[A]_\alpha} = 0,$$

te važi

$$\mu_{\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha[A]_\alpha(x)} = \sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha = r = \mu_A(x).$$

Fazi skup A, na univerzalnom skupu X = R, je *konveksan* ako i samo ako je α- presek intervala A^α (Slika 9.) konveksan za svako α iz intervala (0, 1]. U tom slučaju, svi α- preseci intervala A^α se sastoje od jednog segmenta (Slika 1.9(a)). Inače, skup je nekonveksan (Slika 1.9(b)).



Slika 1.9 (a) Konveksni fazi skupovi; (b) Nekonveksni fazi skupovi

Sledi pregled definicija osnovnih operacija nad fazi skupovima u skladu sa [1]:
Neka je X univerzalni skup, i skupovi *A* i *B* fazi skupovi definisani na sledeći način:

$$A = \{(x, \mu_A(x))\},\ \mu_A(x) \in [0, 1]$$
$$B = \{(x, \mu_B(x))\},\ \mu_B(x) \in [0, 1]$$

Operacije sa ovim fazi skupovima biće objašnjene preko njihovih funkcija pripadnosti.

Definicija 1.8. [1] *Fazi skupovi A i B su ekvivalentni, A = B , ako i samo ako za svako* $x \in X$ *važi*

$$\mu_A(x) = \mu_B(x).$$

Definicija 1.9. [1]

1. *Fazi skup A je podskup fazi skupa B, u oznaci A* $\subseteq$ *B ako za svako* $x \in X$ *važi da je*

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

2. *Fazi skup A je pravi podskup fazi skupa B, A* $\subset$ *B, ako je A podskup od B i A* $\neq$ *B, tj. ako važe sledeća dva uslova istovremeno:*

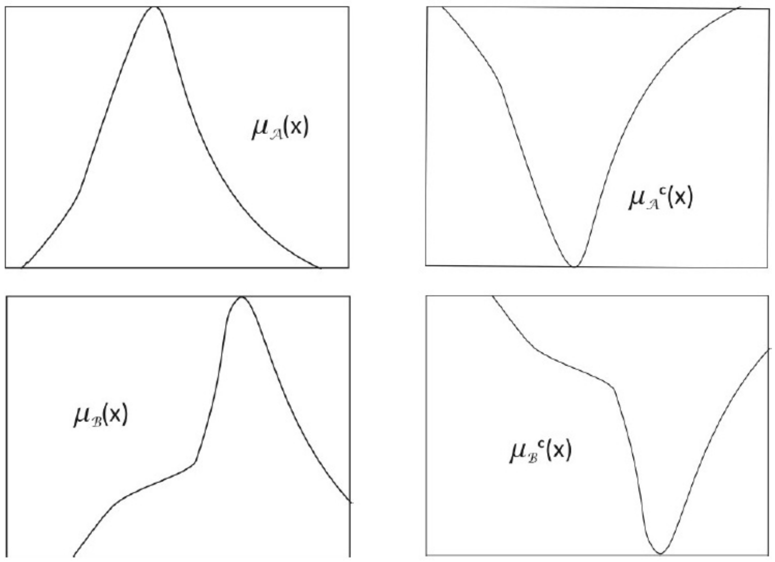
   (a) $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$*, za svako* $x \in X$

   (b) $\mu_A(x) < \mu_B(x)$*, za bar jedno* $x \in X$.

Definicija 1.10. [1] *Fazi skupovi A i A^C su komplementi ako važi:*

$$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x), \text{ tj. } \mu_{A^C}(x) + \mu_A(x) = 1$$

Funkcije $\mu_{A^C}(x)$ i $\mu_A(x)$ su simetrične u odnosu na pravu μ = 0.5.



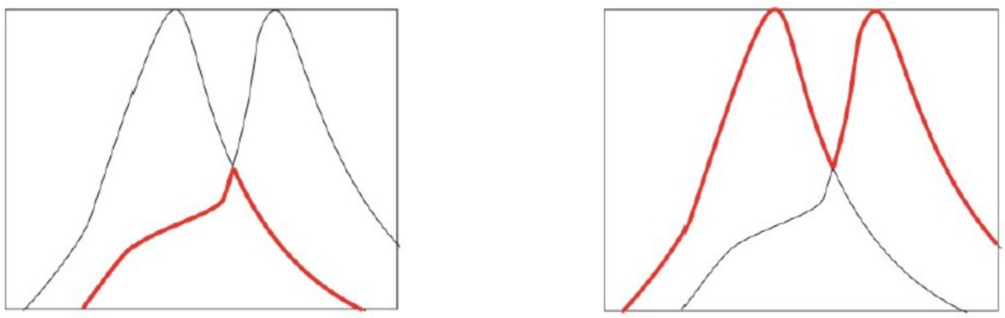
Slika 1.10 Prikaz funkcija pripadnosti fazi skupova (levo) i njihovih komplemenata (desno)

Definicija 1.11. [1] *Operacija preseka fazi skupova A i B, u oznaci A $\bigcap$ B, definiše se na sledeći način:*

$$\mu_{A \bigcap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad x \in X.$$

Definicija 1.12. [1] *Operacija unije fazi skupova A i B, u oznaci A $\bigcup$ B, definiše se na sledeći način:*

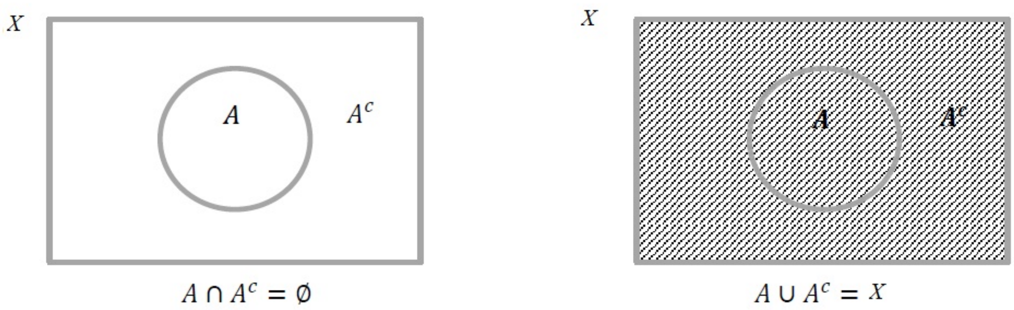
$$\mu_{A \bigcup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad x \in X.$$



Slika 1.11 Funkcija pripadnosti preseka fazi skupova predstavljena je crvenom bojom na slici levo, a unije na slici desno

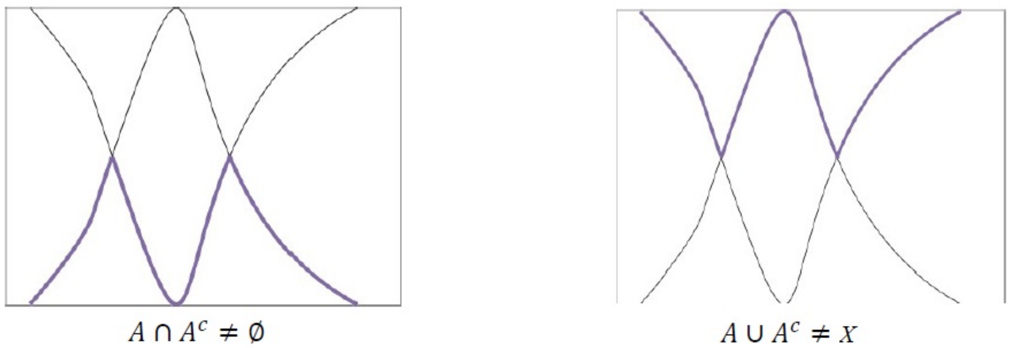
Često se u literaturi može naići na naziv *standardni presek i standardna unija* ([11]) s obzirom na to da postoji uopštenje.

Zakon isključenja trećeg i fazi skupovi: Obični skupovi imaju važnu osobinu isključenja trećeg: $A \bigcup A^C = X$ i $A \bigcap A^C = \emptyset$.



Slika 1.12 Zakon isključenja trećeg za „obične" skupove

Međutim ovaj zakon ne važi kod fazi skupova, što se može lepo videti na Slici 1.13. Ovo je i veoma logično jer kod običnih skupova element ili pripada ili ne pripada skupu, treće situacije nema, ona je isključena, dok kod fazi skupova to nije tačno.



Slika 1.13 Zakon isključenja trećeg ne važi za fazi skupove

1.2 Fazi brojevi

Među različitim vrstama fazi skupova, oni koji su definisani na univerzalnom skupu realnih brojeva su od posebnog značaja. Oni mogu, pod određenim uslovima, da se posmatraju kao fazi brojevi, koji odražavaju ljudsku percepciju neizvesne numeričke kvantifikacije. Slično tome, tzv. fazi vektori mogu se uvesti kao posebna klasa fazi odnosa koji su definisani na univerzalnom proizvodu skupa R^n Euklidovog n-prostora. Mogu se koristiti kao prikaz neodređenog vektora količine u Dekartovim koordinatama i stoga se mogu smatrati generalizovanim, n-dimenzionalnim fazi brojevima, koji uključuju klasu redovnih fazi brojeva za specijalan slučaj n = 1.

Fazi broj je broj čija vrednost zavisi od niza brojeva, koji može da proizvede mnogo različitih ishoda. Jedna analogija je da se vozi auto na autoputu. Iako vozač pokušava da vozi stalno 65 milja na sat, stvarni rezultati će varirati. Ako su brzine bile planirane svaki minut, bilo bi mnogo različitih brzina, kao što su 63 mph, 67 mph, i 65 mph. Fazi brojevi se koriste u programiranju, inženjeringu za komunikacione proizvode, kao i u eksperimentalnim naukama. Kompjuterski softveri i konsultantske kompanije su sve češći korisnici fazi brojeva. ([26])

Fazi broj A je specijalni fazi podskup nekog podskupa proširenog skupa realnih brojeva $\overline{R}$. Postoje razne definicije fazi broja, a mi ćemo ovde posmatrati samo fazi brojeve na $\overline{R}$ u smislu sledeće definicije. ([20])

Definicija 1.13. [20] *Fazi podskup A od* $\overline{R}$ *je fazi broj ako je normalizovan i konveksan, tj.* $\mu_A(x) = 1$ *za neko* $x \in R$ *i za sve x, y, z* $\in R$*, takve da je* $x < y < z$*, važi*

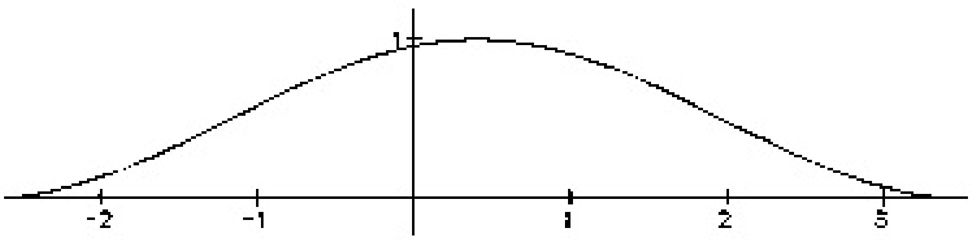
$$\mu_A(y) \geq \min((\mu_A(x), \mu_A(z))).$$

Ova definicija se može zapisati i u sledećem obliku.

Definicija 1.14. [11] *Fazi skup A nad skupom realnih brojeva se naziva fazi broj A ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. A je normalizovan, tj. hgt(A) = 1;
2. A je konveksan;
3. Postoji tačno jedno $\overline{x} \in$ R sa $\mu_A(\overline{x})$ = 1 tj. core(A) = $\overline{x}$;
4. Funkcija pripadnosti μ_A(x), x $\in$ R, je bar po delovima neprekidna.

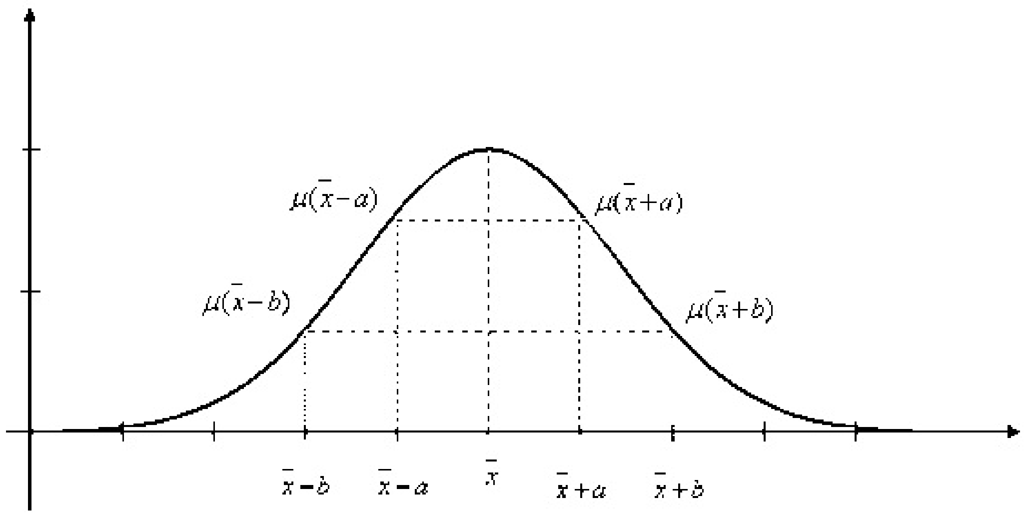
Vrednost $\overline{x}$ = core(A) koja pokazuje maksimalan stepen pripadnosti $\mu_A(\overline{x})$ = 1 naziva se modalna vrednost fazi broja A, u skladu sa vrednostima koje se najčešće pojavljuju u podacima uzoraka. Modalna vrednost može biti pominjana kao *maksimalna vrednost, centar vrednosti ili srednja vrednost*, gde se poslednja dva izraza po mogućstvu koristite za simetrične fazi brojeve. ([1])



Slika 1.14 Fazi broj A

Definicija 1.15. [11] *Fazi broj A iz prethodne definicije se zove simetričan ako funkcija pripadnosti $\mu_A(x)$ zadovoljava uslov*

$$\mu_A(\overline{x} + x) = \mu_A(\overline{x} - x)\ \forall\ x \in R.$$



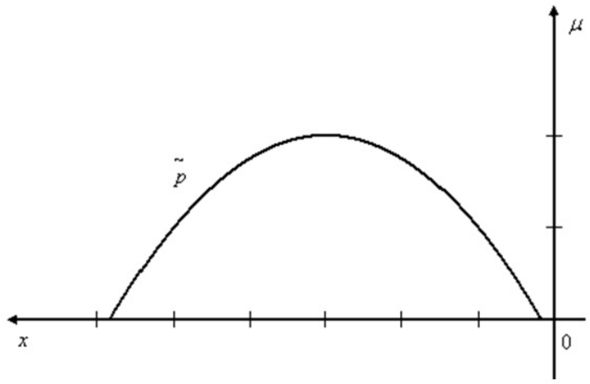
Slika 1.15 Funkcija pripadnosti simetričnog fazi broja

Definicija 1.16. [11] *Fazi broj A se zove (striktno) pozitivan, simbolizovan sa A > 0 ili sgn(A) = +1, ako i samo ako*

$$supp(A) \subset (0, \infty)$$

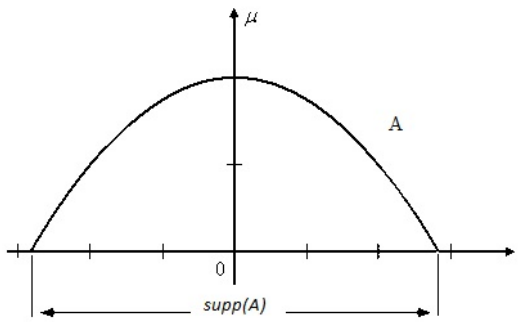
ili (striktno) negativan, simbolizovan sa A < 0 ili sgn(A) =-1, ako i samo ako

$$supp(A) \subset (-\infty, 0).$$



Slika 1.16 Funkcija pripadnosti (striktno) negativnog fazi broja

Definicija 1.17. [11] *Fazi broj A može da se zove (fazi) nula, simbolizovan sa sgn(A) = 0, ako nije ni pozitivan ni negativan, to jest, ako $0 \in supp(A)$.*



Slika 1.17 Funkcija pripadnosti fazi- nula broja

Da bi se izbegla greške u oznakama, u ovom radu će se fazi skupovi označavati sa A, B, C,. . .,a odgovarajuće funkcije pripadnosti sa μ_A(x), μ_B(x), μ_C(x),. . ..

1.3 Princip proširenja

Zadeh je u [8] uveo koncept fazi skupa i njegove primene. U [6] Dubois i Prade su uveli pojam fazi realnih brojeva i odredili su neke od njegovih osnovnih svojstava. U [6] Zadeh je predložio tzv. „Zadehov princip proširenja”, koji je odigrao važnu ulogu u teoriji fazi skupova i njegovoj primeni. Ovo proširenje se proučavalo i primenjivalo od strane više autora, uključujući: Ngujen u analiziranju ovog proširenja, Barros u analizi kontinuiteta ovog proširenja, Roman u analizi diskretnih fazi dinamičkih sistema i kontinuiteta takvog proširenja, a Belohlavek u proučavanju sličnosti. ([4])

Princip proširenja koji je uveo Zadeh je jedan od najosnovnijih ideja teorije fazi skupova. On nam daje opšti metod za produženje klasičnih matematičkih koncepata u cilju razmatranja fazi količina. Neke ilustracije su date, uključujući pojam fazi udaljenost između fazi skupova. Princip proširenja se zatim sistematski primenjuje na realnu algebru: operacije na fazi brojevima su opširno razvijene. Ove operacije generalizuju analizu intervala i moraju da budu računski aktivne. Iako je skup realnih fazi brojeva opremljen proširenim dodatkom, mnoge strukturne osobine su sačuvane. ([5])

Zadehov princip proširenja daje matematički pristup za produženje klasične funkcije u fazi mapiranje. On je smatrao da je princip proširenja važno sredstvo u razvoju fazi aritmetike i drugih oblasti. ([25])

Definicija 1.18. [24] *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ fazi podskupovi klasičnih skupova $X_1, X_2, \ldots, X_n$ respektivno i neka je dato preslikavanje $f : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y$ takvo da za svaku n-torku $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ važi: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y \in Y$. Tada je*

$$B = f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

fazi podskup od Y čija je funkcija pripadnosti:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{y} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \ldots, \mu_{A_n}(x_n), & \textit{ako postoji } \; y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$$

tj. princip proširenja kaže da je slika nekog fazi skupa opet fazi skup čija je funkcija pripadnosti upravo ova gore navedena.

Primer 5. [20] Neka je X fazi podskup skupa realnih brojeva približno 2 dat sa funkcijom pripadnosti

$$\mu_X(x) = \begin{cases} x-1 & \text{za } 1 \le x \le 2 \\ 3-x & \text{za } 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{ostalo.} \end{cases}$$

Funkcija $f(x) = x^2$ se principom proširenja prenosi na funkciju

$$[f(X)](y) = sup\{\mu_x | x \in R, y = x^2\} =$$

$$= \begin{cases} max(\mu_X(\sqrt{y}, \mu_X(-\sqrt{y}))) & \text{za } y \ge 0 = \\ 0 & \text{ostalo} \end{cases}$$

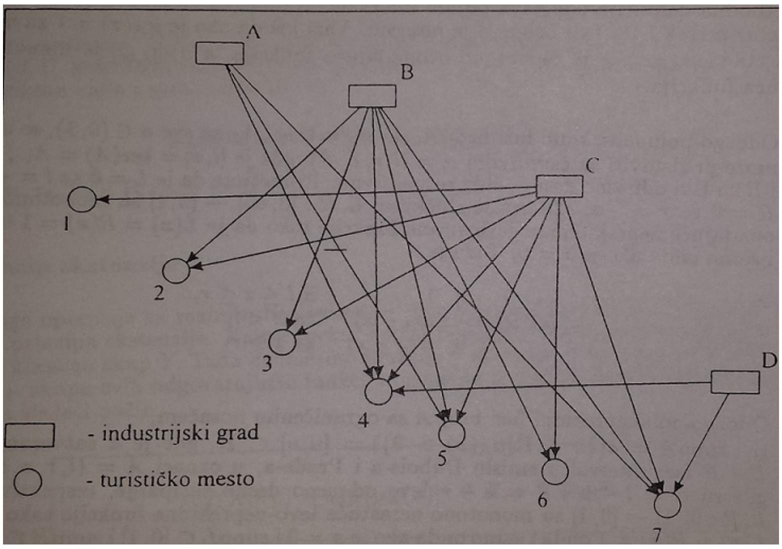
$$= \begin{cases} \sqrt{y}-1 & \text{za } 1 \le y \le 4 \\ 3-\sqrt{y} & \text{za } 4 \le x \le 9 \\ 0 & \text{ostalo.} \end{cases}$$

1.4 Primene fazi skupova

U ovom poglavlju ćemo navesti neke od nedavno dobijenih primena fazi skupova u raznim oblastima.

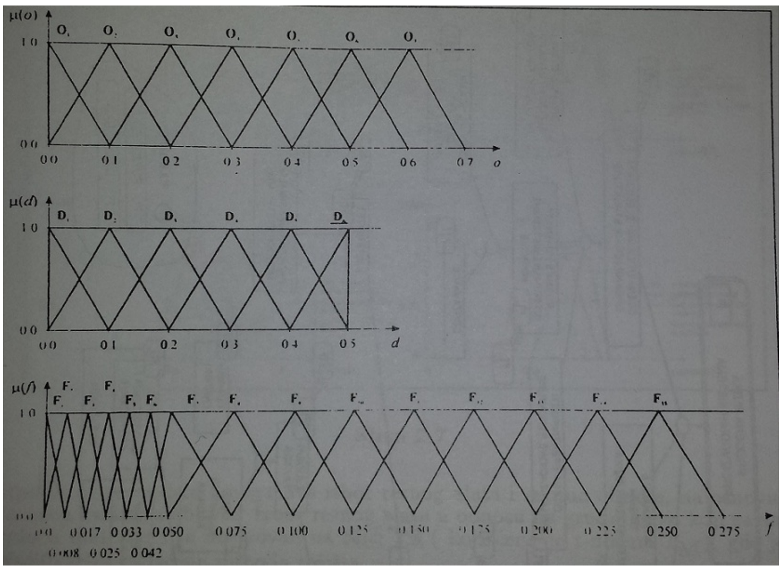
1.4.1 Model raspodele putovanja po zonama

Razmatraju se tokovi putnika u vazdušnom saobraćaju između industrijskih gradova i turističkih mesta. Tokovi putnika se ocenjuju na osnovu broja putnika koje emituju industrijski gradovi i broja putnika koja privlače turistička mesta. Neka se mreža vazdušnog saobraćaja sastoji iz 4 industrijska grada, 7 turističkih mesta i 18 linija (Slika 1.18). Promenljive *o, g* i *f* su broj otputovalih putnika iz grada prema turističkim aerodromima, broj doputovalih putnika u turističko mesto iz industrijskih gradova i broj putnika između grada i turističkog mesta, respektivno.



Slika 1.18 [20]

Formiraćemo odgovarajuće fazi skupove tzv. metodom Wanga i Mendela. Po toj metodi, prvo se za diskretne podatke definišu intervali za ulazne promenljive *o* i *d*, tako i za izlaznu promenljivu *f* (na osnovu datih podataka, koje ovde zbog ograničenog prostora ne navodimo, i koje su normalizovane). Ovi intervali se dele na podintervale, prema proceni eksperta. Nad ovim podintervalima se formiraju odgovarajući fazi skupovi. Ovde smo naveli trouglaste fazi skupove (Slika 1.19), ali se mogu koristiti i drugi oblici, npr. Gausova kriva.

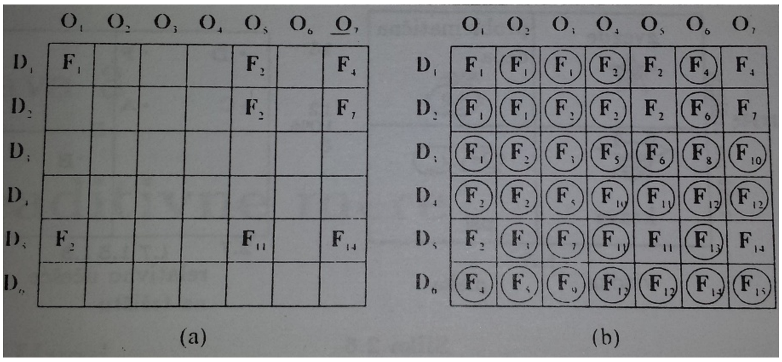


Slika 1.19 [20]

Sada dolazi etapa generisanja fazi pravila. Na osnovu ulaznih promenljivih $(x_1, \ldots, x_n)$ i izlazne promenljive y formiraju se pravila. Za svaki i- ti ulazno- izlazni podatak $(x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}, y^{(i)})$ formira se jedno fazi pravilo. Za svaki dati podatak k- tog ulaza $x_k^{(i)}$ uzima se fazi skup, označimo ga recimo sa $A_k^{(i)}$, sa najvećim stepenom pripadnosti.
Tada je i- to pravilo

ako x_1 = $A_1^{(i)}$ i x_2 = $A_2^{(i)}$ i . . . x_n = $A_n^{(i)}$, onda je y = $B^{(i)}$.

Kako obučavajući skup ima 18 vektora podataka dobijeno je 18 pravila, od kojih je formirana nepotpuna baza od 8 fazi pravila (neka fazi pravila su se poklapala ili bila konfliktna), Slika 1.20 a). Konfliktno pravilo sa manjim stepenom (proizvod stepena pripadnosti $x_1, \ldots, x_n, y$ odgovarajućim fazi skupovima) je eliminisano.



Slika 1.20 [20]

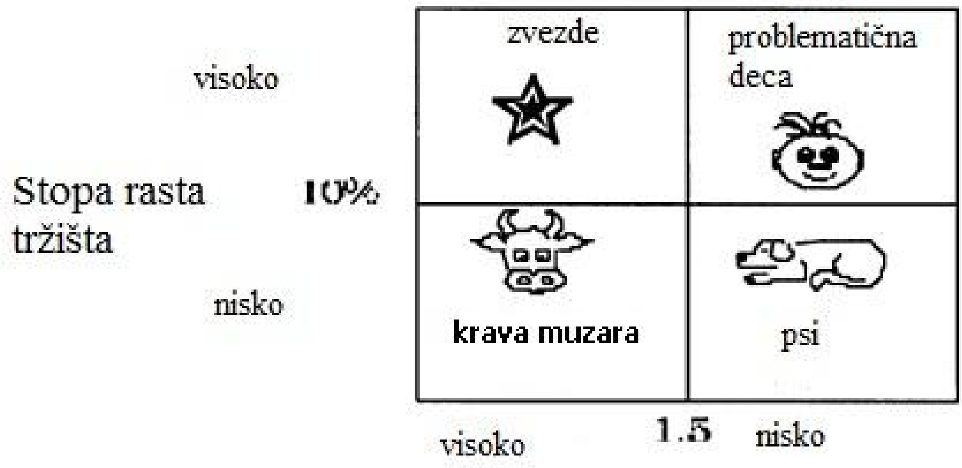
Do potpune baze fazi pravila se dolazi popunjavanjem od strane analitičara, koji vodi računa da povećanjem broja otputovalih putnika iz industrijskih zona raste i veličina toka (redni brojevi fazi skupova koji reprezentuju tokove povećavaju se s leva na desno), te da povećavanjem broja doputovalih putnika u turistička mesta raste broj putnika između industrijskih zona i turističkih mesta (redni brojevi fazi skupova povećavaju se od gore na dole). Tako je dobijena tabela potpune baze fazi pravila, (Slika 1.20 b)). Interpolacija fazi pravila se može vršiti i pomoću raznih metoda, kao što je primena kriva za popunjavanje prostora (npr. Peanova kriva), određivanjem najmanjeg Euklidskog rastojanja, itd. Za kompoziciju u fazi pravilima je korišćeno max - min kompozicija. Dalje, dobijena fazi pravila se mogu korišćenjem genetskog algoritma daljim obučavanjem na kontrolnim podacima približiti stvarnoj situaciji. Isto tako, primenjeno je i $S_{\mathbf{M}}$ - $T_{\mathbf{P}}$ kompozicija. Za defazifikaciju je korišćen metod centra gravitacije, tj. uzimanjem težišta dobijenog fazi skupa. Dobijeni rezultati znatno bolje modeliraju realnu situaciju, nego neke klasične metode, kao što je recimo entropijski model. ([20])

1.4.2 Portfolio matrice u strategijskom menadžmentu

Strategijski menadžment je proces u kojem neka organizacija određuje svoje ciljeve i teži ka tome da ih ostvari. Jedna od metodologija u ovoj oblasti za odabir odgovarajuće strategije je poznata kao analiza poslovnog portfolija. Termin „interpretacija portfolija" se uobičajeno koristi da bi se opisala aktivnost u dve faze:

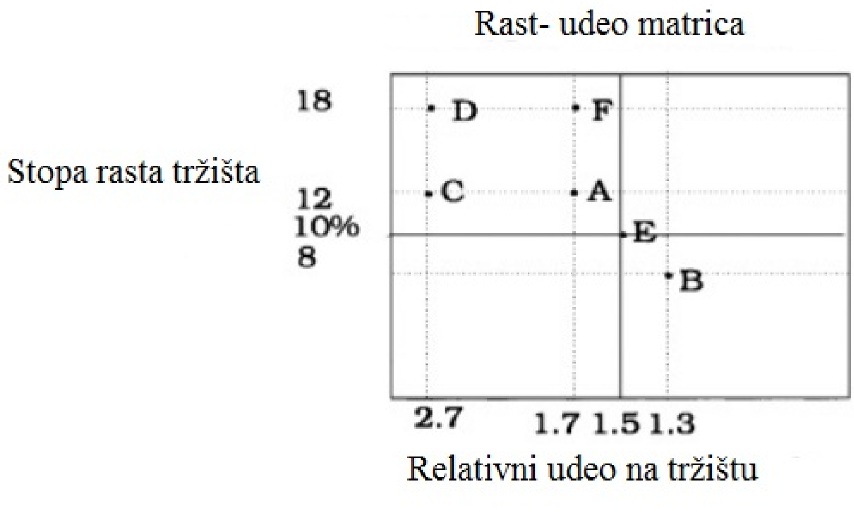
1. Analiza razloga da organizacija ima određenu poziciju u matrici;

2. Formulacija aktivnosti ili koraka koje treba preduzeti da bi se popravila trenutna pozicija organizacije i postigli predviđeni ciljevi.



Slika 1.21 [20, 21] Rast-udeo poslovne portfolio matrice

Ovo često dovodi do preporuke vrlo različitih strategija koje smeštaju organizaciju vrlo blisko u matrici (posmatraćemo rast- udeo matricu, Slika 1.21, Slika 1.22), ali sa različitih strana u odnosu na granice koje ukazuju na poziciju organizacije, što je jedan od glavnih nedostataka portfolio analize. Isto tako portfolio analiza preporučuje istu strategiju za sve organizacije koje se nalaze u istom kvadrantu, bez obzira na poziciju u matrici. Primenom fazi skupova sa odgovarajućim funkcijama pripadanja i operacija t-normi, ovim problemom se dobija prirodna interpretacija i omogućava lakši izbor odgovarajuće strategije. ([20])



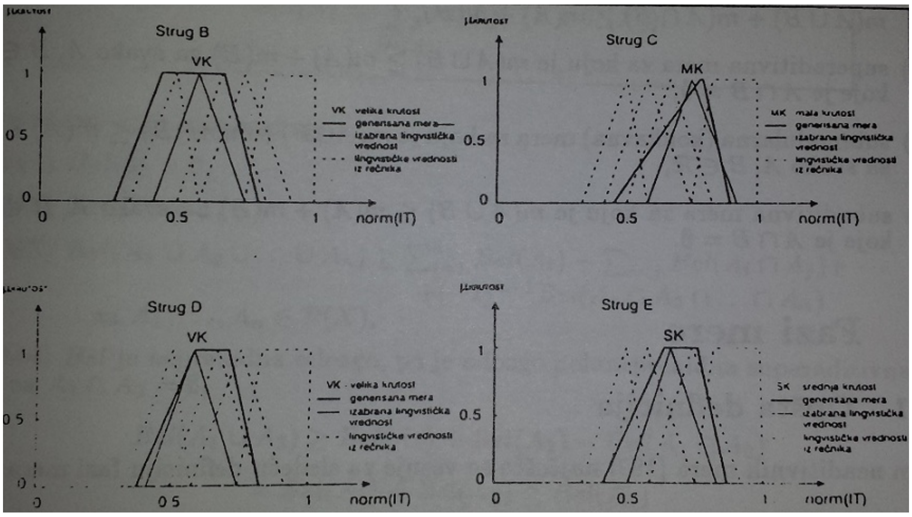
Slika 1.22 [20, 21] Položaj 6 poslovnih jedinica u rast- udeo portfolio matrici

1.4.3 Procena rizika proizvodnih sistema

Fazi sistemi imaju važnu ulogu u modeliranju složenog problema rizika. Proizvodni i poslovni sistemi su primenom novih tehnologija, automatizacije procesa, usložnjavanjem informaciono-komunikacionih tokova i računarske podrške, uz sve ostale trendove u značajnoj meri povećali složenost navedenih sistema. Ova složenost može prouzrokovati da vrlo mali poremećaji mogu dovesti do otkaza celog sistema, te velike ekonomske štete, pa i do katastrofalnih nesreća. Rastući značaj faktora rizika u svim poslovnim sistemima dovelo je do koncepta upravljanja rizikom. ([20])

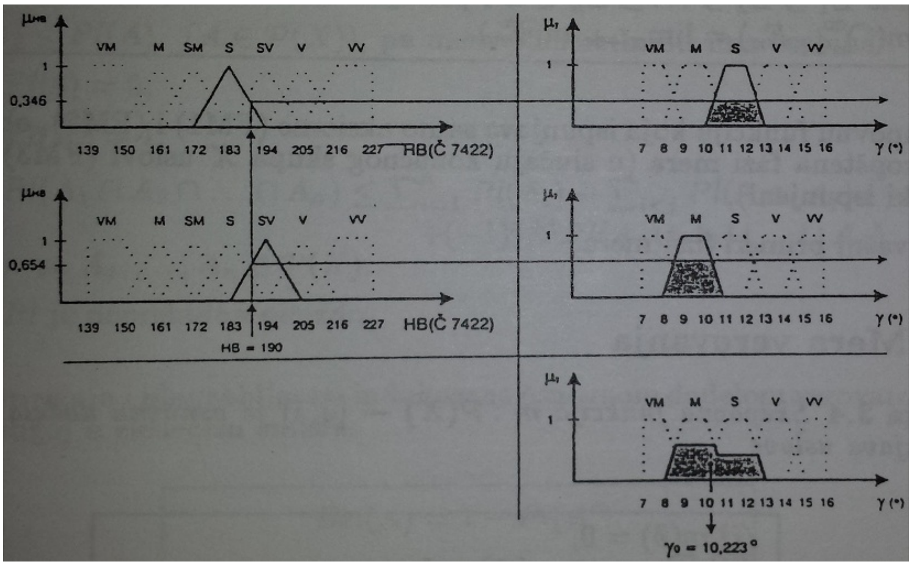
1.4.4 Procena i rangiranje mašina i mašinskog alata

Na osnovu formiranih rečnika za vrednost atributa (jezičke promenljive) krutost elementa objekta mašina alatka, kao i značaja atributa za date obradne uslove, izvodi se ježička ocena kvalitativne karakteristike krutosti mašine alatke. Neka je broj alternativa-strugova četiri: A, B, C, D i neka se o njima odlučuje na osnovu kriterijuma: krutost glavnog vretena, krutost zadnjeg šiljka, krutost nosača alata (koje ocenjujemo sa funkcijama pripadnosti velika-VK, srednja-SK i mala-MK). Tako su dobijene generisane mere (ocene) i izabrane ocene za alternative (Slika 1.23). Tako je dobijeno rangiranje strugova: B, D, E i C.



Slika 1.23 [20]

Primena ovog modela omogućava izbor reznog alata i režima obrade, na osnovu zahtevanog kvaliteta obrade. Izbor reznog alata u odnosu na grudni ugao koji zavisi od tvrdoće materijala je ilustrovan na Slici 1.24 (korišćena je t-norma T_{M}), gde je za defazifikaciju korišćena metoda težišta. ([20])



Slika 1.24 [20]

2 Trougaone norme i trougaone konorme

Pojam trougaone norme se prvi put pojavljuje u matematičkoj literaturi 1942. godine, kada je Karl Menger u svom radu Statistical metrics, uveo ovaj pojam s ciljem konstruisanja metričkih prostora koristeći raspodele verovatnoće. On je koristio vrednosti u intervalu [0, 1], umesto celog skupa realnih brojeva, da bi opisao rastojanje između dva elementa. Karl Menger je predstavio trougaone norme pomoću funkcije T(α, β), koja je definisana za $0 \le \alpha \le 1$ i $0 \le \beta \le 1$ za nju važi sledeće:

1. $0 \le$ T(α, β) ≤ 1,
2. T je neopadajuće,
3. T(α, β) = T(β, α),
4. T(1, 1) = 1,
5. ako je α > 0 onda je T(α,1) > 0.

Međutim, zanimanje za metričke prostore verovatnoće i njegove operacije, posebno počinje da se ispoljava tek kada su Berthold Schweizer i Abe Sklar publikovali konačan skup aksioma za t-norme 1958. godine u Espaces metriques aleatoires. Trougaone norme su se prvo koristile u kontekstu probabilističkih metričkih prostora, u smislu proširenja trougaonih nejednačina iz klasičnih metričkih prostora u uopštene slučajeve. Danas se koriste, između ostalog, u teoriji fazi skupova i fazi logike, te je ovom prilikom dat kratak pregled osnovnih pojmova. Materijal korišćen iz [10, 13, 22, 23, 31].

2.1 Trougaone norme

Definicija 2.1. [19] *Trougaona norma T (t-norma) je funkcija T:* $[0,1]^2 \to$ *[0,1] takva da za svako x, y, z ∈[0,1] važe sledeći uslovi:*

$$(T1) \qquad T(x,y) = T(y,x)\ (komutativnost)$$

$$(T2) \qquad T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)\ (asocijativnost)$$

$$(T3) \qquad T(x,y) \le T(x,z)\ kada\ je\ y \le z\ (monotonost)$$

$$(T4) \qquad T(x,1) = x\ (rubni\ uslov)$$

Pošto su t-norme algebarske operacije na intervalu [0,1], takođe je moguće koristiti oznaku x*y umesto T(x, y). Zapravo, uslovi (T1) - (T4) se mogu drugačije zapisati na sledeći način:

$$(T1) \qquad x * y = y * x$$

$$(T2) \qquad x * (y * z) = (x * y) * z$$

$$(T3) \qquad x * y \le x * z\ kada\ je\ y \le z$$

$$(T4) \qquad x * 1 = x$$

Postoji neprebrojivo mnogo t-normi, ali ovde su navedene četiri osnovne t-norme T_M, T_P, T_L i T_D. Njihove definicije su:

1. T_M(x, y) = min(x, y) (minimum)
2. T_P(x, y) = xy (algebarski proizvod)
3. T_L(x, y) = max(x + y - 1, 0) (Lukašijevičeva t-norma (eng. Lukasiewich))
4. $$T_D(x,y) = \begin{cases} min(x,y) & \text{ako max(x, y) = 1} \\ \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$ (Norma drastičnog preseka)

Važi

$$T_D < T_L < T_P < T_M,$$

gde je $T_1 \leq T_2$ ako je T_1 (x,y) $\leq T_2$ (x,y) za svako (x,y) $\in$ [0,1].

t- norme T_W i T_M imaju interesantnu osobinu da su kompletno određene samo sa njihovim vrednostima na dijagonali $\triangle$ = $\{$(x, x)| x $\in$ [0, 1]$\}$ jediničnog kvadrata.
Postoje važne familije t- normi koje zavise od jednog ili više parametara.

Napomena 1.

1. Iz definicije 2.1 se može zaključiti da za svako $x \in [0, 1]$, svaka t-norma T zadovoljava sledeće dodatne granične uslove:

   $$T(0, x) = T(x, 0) = 0,$$
   $$T(1, x) = x.$$

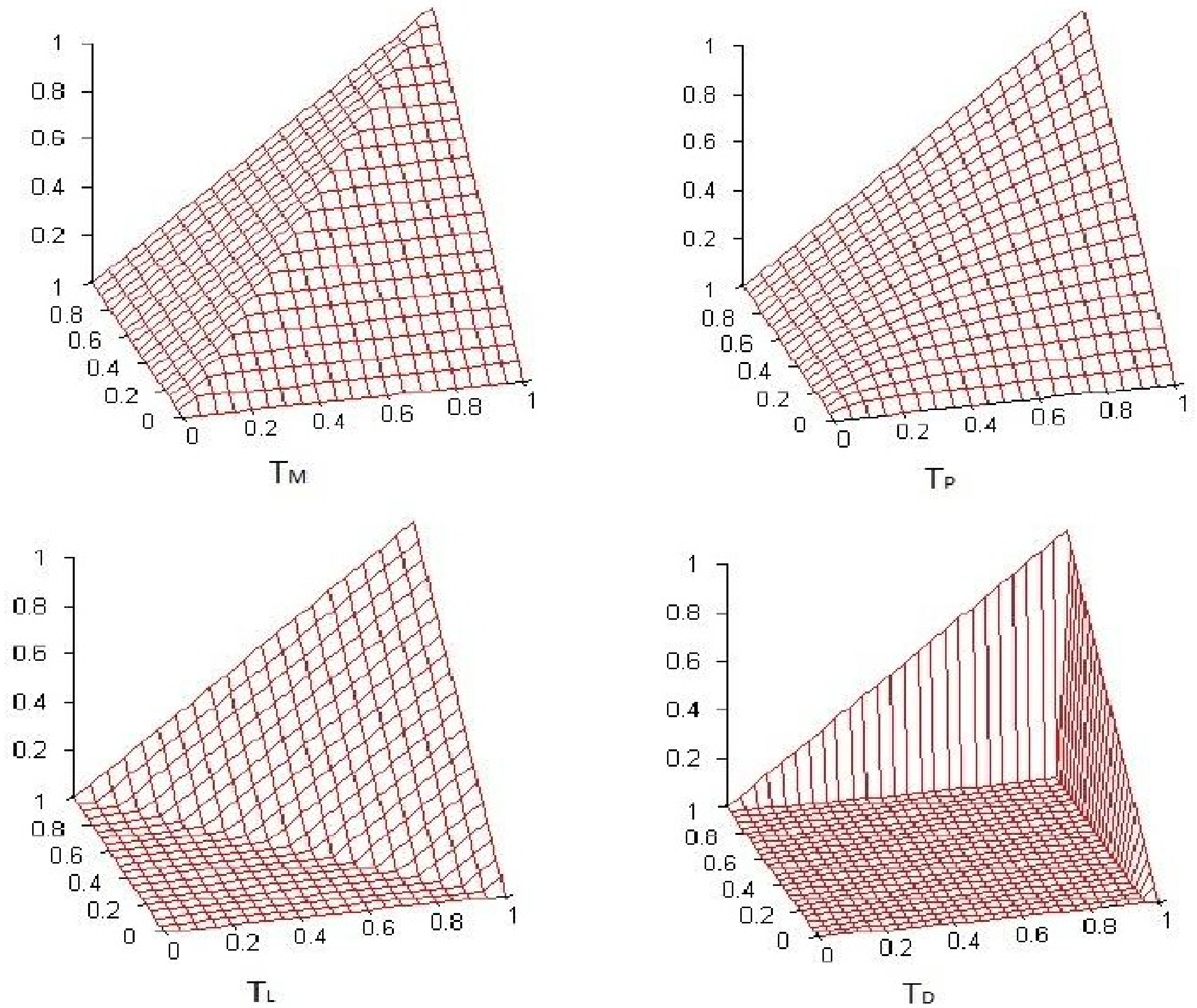
2. Koristeći osobine (T3) i (T1) dobija se monotonost i po prvoj i po drugoj komponenti, tj.

   $$T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2), \text{ za } x_1 \leq x_2 \text{ i } y_1 \leq y_2.$$

   Zaista, ako $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \leq y_2$, onda se dobija

   $$T(x_1, y_1) \leq T(x_1, y_2) = T(y_2, x_1) \leq T(y_2, x_2) = T(x_2, y_2).$$

Sledi definicija, koja pokazuje kako se mogu uporediti dve t-norme.



Slika 2.1 3D [31] grafik za četiri osnovne t-norme

Definicija 2.2. *[13]*

1. *Ako za dve t-norme T_1 i T_2, važi nejednakost $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ za svako $(x, y) \in [0,1]^2$, onda se kaže da je T_1 slabija od T_2 ili, ekvivalentno, da je T_2 jača od T_1. U tom slučaju se piše $T_1 \leq T_2$.*

2. *Ako je $T_1 \leq T_2$ i ako za neko $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ važi $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ sledi $T_1 < T_2$, tj. $T_1 < T_2$ ako je $T_1 \leq T_2$ i $T_1 \neq T_2$.*

Definicija 2.3. [20] *Trougaona norma T_1 je slabija od trougaone norme T_2, u oznaci $T_1 \leq T_2$, ako važi da je $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$, za svako $(x, y) \in [0,1]^2$. Analogno se može reći da je T_2 jača od T_1.*

T-norma T_M je najjača a T_W najslabija t-norma, što se lepo vidi iz sledeće teoreme:

Teorema 2.1. [13] *Za svaku t-normu T i za sve $(x, y) \in [0,1]^2$, važi:*

$$T_W(x, y) \leq T(x, y) \leq T_M(x, y).$$

Dokaz 2. *Neka su $(x, y) \in [0,1]$, i neka je T(x, y) proizvoljna t-norma. Pošto je pretpostavka da je $y \in [0,1]$ sledi da je $y \leq 1$ i koristeći osobine monotonosti i rubne uslove, dobija se:*

$$T(x, y) \leq T(x, 1) = x \leq x.$$

Pretpostavimo da je i $x \in [0, 1]$, pa koristeći pored monotonosti i rubnih uslova još i komutativnost, dobija se:

$$T(x, y) = T(y, x) \leq T(y, 1) = y \leq y.$$

Onda iz $T(x, y) \leq x$ i $T(x, y) \leq y$ sledi da je proizvoljna t-norma $T(x, y) \leq \min(x, y)$ a to je upravo t-norma minimuma, tj.

$$T(x, y) \leq T_M(x, y).$$

Sad se posmatra slučaj kada x = 1. Onda je T(x, y) = T(1, y) = y = $T_W(x, y)$, a za slučaj kad je y = 1 slično: T(x, y) = T(x, 1) = x = $T_W(x, y)$. Znači u oba slučaja je T(x, y) = $T_W(x, y)$ pa samim tim važi da je $T(x, y) \geq T_W(x, y)$, jer s druge strane ako $x, y \in (0, 1)$ sledi $T_W(x, y) = 0 \leq T(x, y)$.

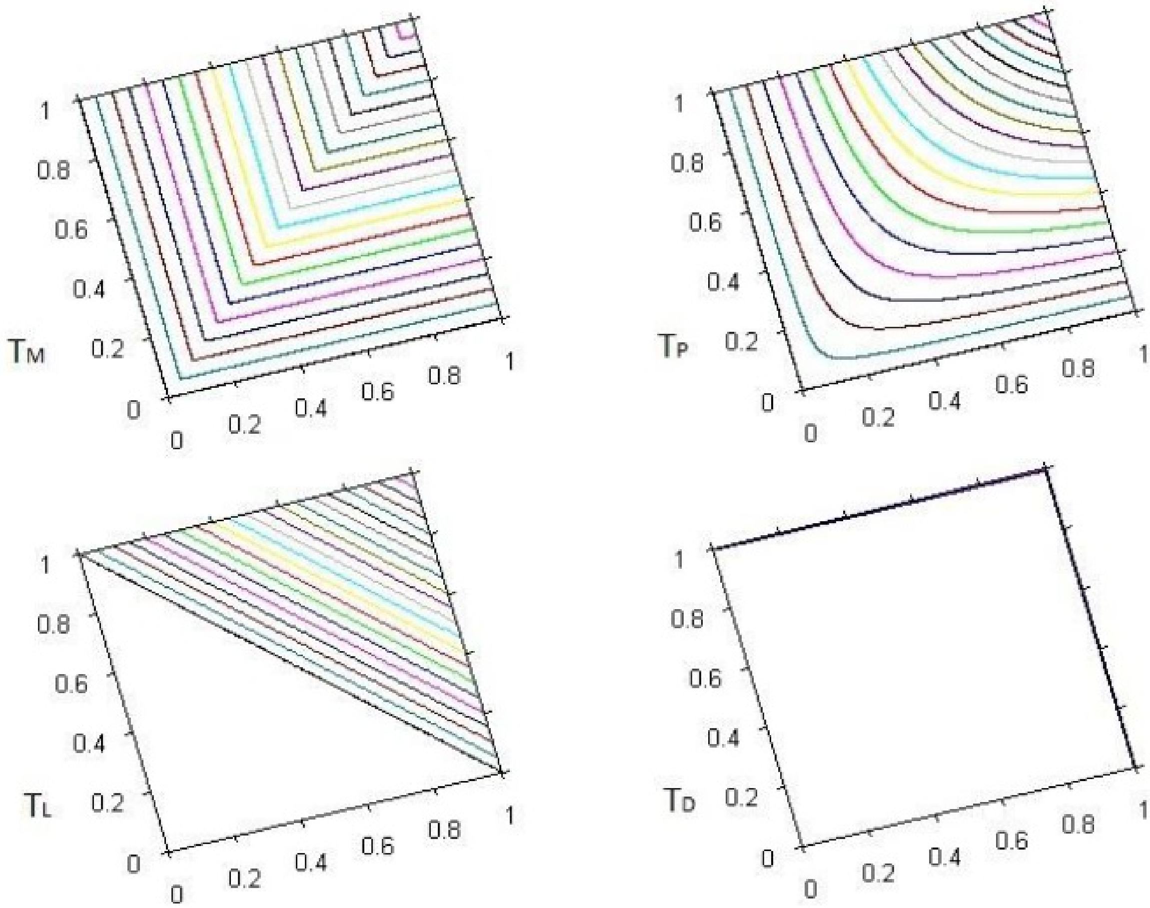
Generalno, nije uvek jednostavno odrediti da li je neka t-norma slabija ili jača od druge t-norme. Trougaone norme T_M i T_D su najjača i najslabija t-norma, respektivno, što je dato sledećom teoremom.

Teorema 2.2. [23] *Za svaku t-normu T važi: za svako x, y $\in$ [0, 1],*

$$T_D(x, y) \leq T(x, y) \leq T_M(x, y).$$

Dokaz 3. *Neka su dati x, y $\in [0, 1]$ i neka je T(x, y) proizvoljna t-norma. Koristeći činjenicu da je y $\leq$ 1 i osobine (T3) i (T4) dobija se T(x, y) $\leq$ T(x, 1) = x. Ako se iskoristi da je i x $\leq$ 1, kao i osobine (T1), (T3) i (T4), redom, dobija se T(x, y) = T(y, x) $\leq$ T(y, 1) = y. Dakle, T(x, y) $\leq$ x i T(x, y) $\leq$ y, te odatle sledi T(x, y) $\leq$ min(x, y) = T_M.*

Dalje, za x = 1 se dobija T(x, y) = T(1, y) = y = T_D(x, y), a za y = 1 se dobija T(x, y) = T(x, 1) = x = T_D(x, y). Za x = 0 ili y = 0 važi T(x, y) = T_D(x, y) = 0 tj. obe t-norme su jednake. Sledi da je T(x, y) jednako sa T_D(x, y) na rubu. Ako je x, y $\neq$ 0 tada je T(x, y) $\geq$ 0 i T_D(x, y) = 0, pa se ponovo zaključuje da je T(x, y) $\geq$ T_D(x, y).



Slika 2.2 [31] Konturni grafik za četiri osnovne t-norme

Napomena 3. Kako je $T_L < T_P$ (vidi se i sa Slike 2.2), na osnovu prethodne teoreme dobija se poređenje za četiri osnovne trougaone norme:

$$T_D < T_L < T_P < T_M.$$

Osobine, kao što su komutativnost (T1), asocijativnost (T2) i monotonost (T3) su zadovoljene na otvorenom jediničnom kvadratu $(0,1)^2$ (naravno, zajedno sa graničnim uslovom (T4) i graničnim uslovima iz napomene 1 pod 1). Da bi ove osobine bile zadovoljene na celom jediničnom kvadratu $[0,1]^2$, uvodi se sledeća teorema.

Teorema 2.3. [23] *Neka je A skup gde je (0,1)* $\subseteq A \subseteq [0,1]$, *i neka je* $*: A^2 \rightarrow A$ *binarna operacija na A. Ako za svako x, y, z* $\in A$ *važe osobine (T1) - (T3) i*

$$x * y \leq min(x, y) \tag{2.1}$$

tada funkcija T: $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ *data sa*

$$T(x,y) = \begin{cases} x * y & \text{ako } (x,y) \in (A \setminus \{1\})^2 \\ min(x,y), & \text{inače.} \end{cases}$$

je t- norma. T je jedina t-norma čija restrikcija na $(A \setminus \{1\})^2$ *se poklapa sa restrikcijom operacije* $*$ *na* $(A \setminus \{1\})^2$.

U nastavku će se navesti definicija t-podnorme (eng. t-subnorm).

Definicija 2.4. [13] *Funkcija F:* $[0,1]^2 \to$ *[0,1] koja zadovoljava, za svako x, y, z ∈[0,1], osobine (T1) - (T3) i (2.1) se zove* **t-podnorma**.

Očigledno, svaka t-norma je i t-podnorma. Obrnuto, u opštem slučaju, ne važi. Ovo ilustruje primer nula funkcije, tj. funkcije F: $[0,1]^2 \to$ [0,1] date sa F(x, y) = 0, za svako x, y ∈[0,1].
Iz teoreme 2.3 sledi da se svaka t-podnorma može transformisati u t-normu tako što se redefiniše, ako je potrebno, u tačkama oblika (x, 1) i (1, x) pri čemu x prolazi kroz ceo jedinični interval.

Posledica 1. [13] Ako je F t-podnorma, onda je funkcija T: $[0,1]^2 \to$ [0,1] definisana sa

$$T(x,y) = \begin{cases} F(x,y) & \text{ako (x, y)} \in (0,1)^2 \\ min(x,y), & \text{inače.} \end{cases}$$

trougaona norma.

Slede neke osobine t-normi T_M i T_D, koje su date kao teorema.

Teorema 2.4. [13]

1. *Jedina t-norma T koja zadovoljava T(x, x) = x za svako x ∈ [0, 1] je minimum* T_M.
2. *Jedina t-norma T koja zadovoljava T(x, x) = 0 za svako x ∈ (0, 1) je drastičan proizvod* T_D.

Napomena 4.

1. Asocijativnost (T2) dozvoljava da se svaka t-norma na jedinstven način proširi u n-arnu operaciju običnom indukcijom, definišući za svako $(x_1,\ldots,x_n) \in [0,1]^n$

$$T_{i=1}^{n} x_i = \mathrm{T}(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = \mathrm{T}(x_1, x_2\ldots,x_n).$$

Ako važi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ = x, tada se koristi zapis

$$x_T^{(n)} = \mathrm{T(x, x, \ldots, x)}.$$

Takođe, prihvaćena je sledeća konvencija:

$$x_T^{(0)} = 1 \text{ i } x_T^{(1)} = \mathrm{x}.$$

2. Činjenica da je svaka t-norma slabija od T_M, dozvoljava da se proširi u beskonačnu operaciju, stavljajući za svaki niz $(x_i)_{i\in N}$ elemenata iz [0, 1]

$$T_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} T_{i=1}^{n} x_i \tag{2.2}$$

Pošto na osnovu teoreme 2.3 uvek važi

$$T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) \leq T_{i=1}^{n-1} x_i \ i \ ocigledno \ je \ da \ T_{i=1}^{n} \geq 0, \tag{2.3}$$

sledi da je $(T_{i=1}^{n} x_i)_{n\in N}$ monotono nerastući i ograničen niz, što znači da konvergira, odnosno postoji granična vrednost iz (2.2),

3. Za $(x_i)_{i\in I}, x_i \in [0,1]$, gde je I proizvoljan skup indeksa, dobija se uopštenje za (2.2) oblika

$$T_{i\in I}x_i = \inf\{T_{j=1}^{k}x_{ij}|(x_{i1},\ldots,x_{ik})\}\ je\ konacna\ podfamilija\ od\ (x_i)_{i\in I}\}.$$

Primer 6. [20]

1. Familija $(T_\lambda^{\mathbf{F}})_{\lambda\in[0,+\infty]}$ Frankovih t-normi je data sa

$$T_\lambda^{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{cases} T_{\mathbf{W}}(x,y) & \text{za } \lambda = 0 \\ T_{\mathbf{P}}(x,y) & \text{za } \lambda = 1 \\ T_{\mathbf{L}}(x,y) & \text{za } \lambda = +\infty \\ log_\lambda(1+\frac{(\lambda^x-1)(\lambda^y-1)}{\lambda-1}) & \text{inače.} \end{cases}$$

2. Familija $(T_\lambda^{\mathbf{Y}})_{\lambda\in[0,+\infty]}$ Yagerovih t-normi je data sa

$$T_\lambda^{\mathbf{Y}}(x,y) = \begin{cases} T_{\mathbf{W}}(x,y) & \text{za } \lambda = 0 \\ T_{\mathbf{M}}(x,y) & \text{za } \lambda = +\infty \\ max(0, 1-((1-x)^\lambda+(1-y)^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}} & \text{inače.} \end{cases}$$

Asocijativnost date t-norme T omogućava njeno proširenje na n-arnu operaciju $T_{i=1}^{n}$: $[0,1]^n \rightarrow [0,1]$ na sledeći način:

$$T_{i=1}^{n}x_i = \mathrm{T}(T_{i=1}^{n-1}x_i, x_n) = \mathrm{T}(x_1, \ldots, x_n)\ .$$

Primer 7. [20] t-norme $T_{\mathbf{W}}$ i $T_{\mathbf{L}}$ se proširuju na n-arne operacije

$$T_{\mathbf{L}}(x_1,\ldots,x_n) = \max(0, \sum_{i=1}^{n}x_i - (n - 1))$$

$$T_{\mathbf{W}}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n}x_i\chi_{\{x_1,\ldots,x_n\}}(\prod_{i=1}^{n}x_i),$$

gde je χ_A *karakteristična funkcija skupa A*.

Dakle, operacija T se može proširiti na beskonačnu operaciju $T_{i=1}^{\infty}$ na sledeći način za bilo koji niz (x_n) iz [0,1]

$$T_{n=1}^{\infty}x_n = \lim_{n\rightarrow\infty}T_{i=1}^{n}x_i$$

(granica na desnoj strani uvek postoji pošto je niz $(T_{i=1}^{n}x_i)$ nerastući).

2.2 Trougaone konorme

Trougaone konorme ili t-konorme predstavljaju uopštenje operacije unije. Za njih su karakteristične osobine kao što su: komutativnost, asocijativnost i monotonost. U odnosu na t-norme jedino su granični uslovi nešto drugačiji. Sledi definicija trougaonih konormi i navode se neke njihove osobine.

Definicija 2.5. [23] *Trougaona konorma S (t-konorma) je funkcija S:*$[0,1]^2$*→ [0,1] takva da za svako x, y, z ∈ [0,1] važe sledeći uslovi:*

$$(S1) \qquad S(x,y) = S(y,x)\ (komutativnost)$$

$$(S2) \qquad S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z)\ (asocijativnost)$$

$$(S3) \qquad S(x,y) \leq S(x,z)\ kada\ je\ y \leq z\ (monotonost)$$

$$(S4) \qquad S(x,0) = x\ (rubni\ uslov)$$

Sa aksiomatske tačke gledišta, t-norme i t-konorme se razlikuju samo u njihovim rubnim uslovima.

Analogno kao kod trougaonih normi, i ovde se navode četiri elementarne trougaone konorme ([13]):

1. S_M(x, y) = max(x, y) (maximum),
2. S_P(x, y) = x + y - xy (Suma verovatnoće),
3. S_L(x, y) = min(1, x + y) (Lukasiewiez t-konorma),
4. $$S_D(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ako } (x,y) \in [0,1]^2 \\ max(x,y) & \text{inače.} \end{cases}$$

U početku je trougaona konorma uvedena kao dualna operacija za trougaonu normu od strane Švajcera i Skalara: ([11])

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y),\ x, y \in [0,1].$$

Za ovo postoji i sledeća definicija:

Definicija 2.6. [13] *Funkcija S:* $[0,1]^2 \rightarrow$ *[0,1] je trougaona konorma ako i samo ako postoji trougaona norma T takva da za sve (x, y)* $\in [0,1]^2$ *, važi*

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y),\ x, y \in [0,1].$$

Dokaz 4. *(⇒) Neka je S trougaona konorma i neka je preslikavanje T :*$[0,1]^2 \rightarrow$ *[0,1] definisano sa T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y). Treba pokazati da je ovako definisano preslikavanje trougaona norma, tj. treba pokazati da su osobine (T1) - (T4) iz Definicije 2.3 zadovoljene:*

1. **(T1)** *T(x, y) = 1- S(1 - x, 1 - y) = 1 - S (1 - y, 1 - x) = T(y, x) - važi zbog pretpostavke da je S trougaona konorma, a ona ima osobinu komutativnosti.*
2. **(T2)** *T(x T(y, z)) = 1- S(1 - x, 1 - T(y, z)) =*
= 1 - S (1 - x,1 - (1 - S(1 - y, 1 - z))) =
= 1 - S (1 - x,1 - 1 + S(1 - y, 1 - z)) =
= 1 - S (1 - x, S(1 - y, 1 - z)) = 1 - S(S (1 - x, 1 - y), 1 - z)) =
= 1 - S (1 - 1 + S(1 - x, 1 - y), 1 - z) = 1 - S (1 - T(x, y), 1 - z)) = T(T(x, y), z)
Ovo sve važi zbog toga S kao trougaona konorma ima osobinu asocijativnosti.

3. **(T3)** *Neka je $y \leq z$.*
   Onda važi i da je 1 - y $\geq$ 1 - z (*).
   Iz (*) i iz osobine monotonosti za trougaone konorme, važi da je:
   S(1 - x, 1 - y) $\geq$ S(1 - x, 1 - z) iz čega sledi:
   1 - S (1 - x, 1 - y) $\leq$ 1 - S(1 - x, 1 - z))) i onda imamo:
   T(x, y) = 1- S(1 - x, 1 - y) $\leq$ 1 - S (1 - x, 1 - z) = T(x, z).

4. **(T4)**
   T(x, 1) = 1- S(1 - x, 1 - 1) = 1 - S (1 - x, 0) = 1 - (1 - x) = x
   T(x, 0) = 1- S(1 - x, 1 - 0) = 1 - S (1 - x, 1) = 1 - 1 = 0

   ($\Leftarrow$) Sada se pretpostavlja da je T trougaona norma takva da za svako x, y $\in [0,1]$ važi S(x, y) = 1 - T(1 - x,1 - y). Na analogni način kao što je pokazano da važi smer ($\Rightarrow$), pokazuje se da je preslikavanje S trougaona konorma.

Za trougaonu konormu S definisanu u Definiciji 2.6 kaže se da je **dualna** trougaonoj normi T, i obrnuto, t-norma T je **dualna** t-konormi S. Upoređujući odgovarajuće elementarne trougaone norme i konorme, vidi se da su jedne drugima dualne. Upravo zbog dualnosti, menja se poredak koji važi za trougaone norme, pa za elementarne t-konorme važi da je:

$$S_M \leq S_P \leq S_L \leq S_D.$$

U skladu sa tim, dualnost utiče i na jačinu t-konormi. Pa tako sledi definicija:

Definicija 2.7. [13] *Za svaku trougaonu konormu S i svako x, y $\in [0,1]$ važi:*

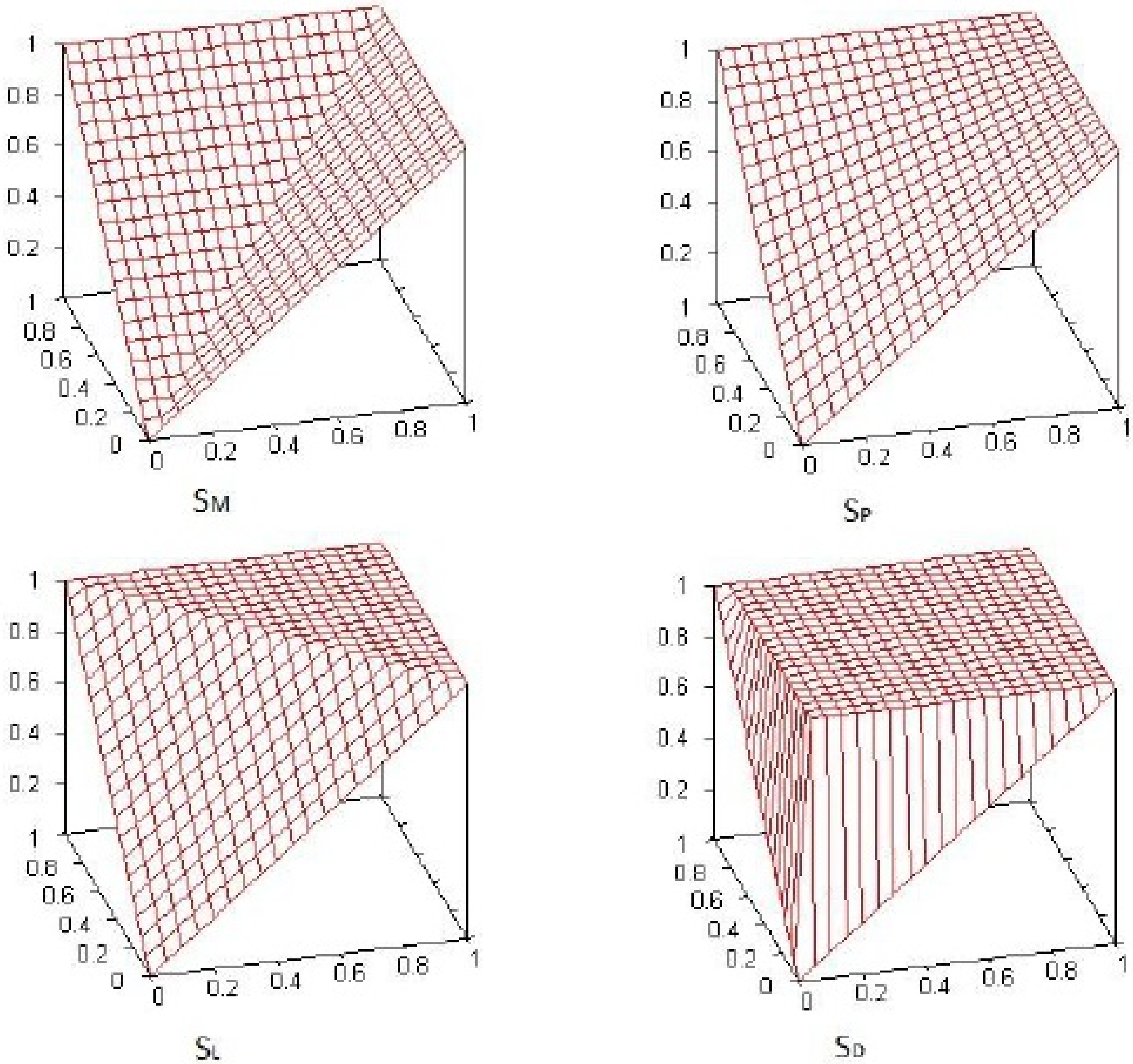
$$S_M(x,y) \leq S(x,y) \leq S_D(x,y).$$

Dokaz 5. *Dokaz ide analogno dokazu za Teoremu 2.2: Neka su x, y $\in [0,1]$ i neka je S(x, y) proizvoljna trougaona konorma. Iz osobina komutativnosti, monotonosti, rubnih uslova i $y \geq 0$ sledi da je $S(x,y) \geq S(x,0) = x \geq x$. Zatim ako se iskoristi da je $x \geq 0$ i osobine monotonosti, komutativnosti i rubnih uslova za t-konorme, dobija se da je S(x, y) = S(y, x) $\geq$ S(y, 0) = y $\geq$ y.*

Prema tome sledi da je S(x, y) $\geq$ x i S(x, y) $\geq$ y, pa iz toga zajedno sledi da je:

S(x, y) $\geq$ max(x, y).

U slučaju da je x = 0, y $\neq$ 0 važi S(x, y) = S(0, y) = y = $S_D(x,y)$. U slučaju da je x $\neq$ 0, y = 0 važi S(x, y) = S(x, 0) = x = $S_D(x,y)$.
Za x, y $\in (0,1)$ važi S(x, y) $\leq$ S(x, 1) = S(1, x) $\leq$ S(1, 1) = 1 = $S_D(x,y)$, tj. važi da je S(x, y) $\leq$ $S_D(x,y)$.



Slika 2.3 [31] 3D grafik za četiri osnovne t-konorme

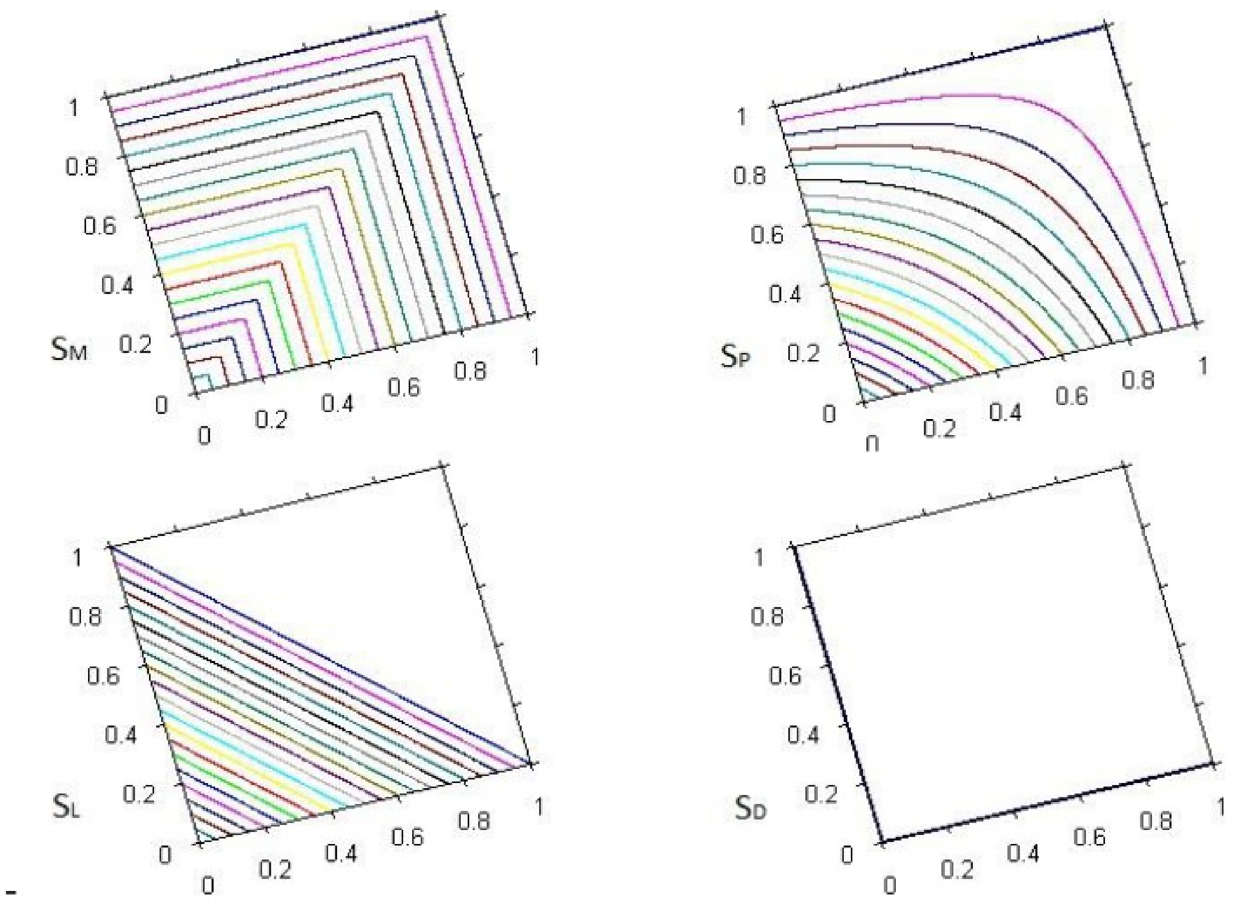
Primer 8. [20]

1. Familija $(S_\lambda^{\mathbf{F}})_{\lambda\in[0,+\infty]}$ Frankovih t-konormi je data sa

$$S_\lambda^{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{cases} S_{\mathbf{M}}(x,y) & \text{za } \lambda = 0, \\ S_{\mathbf{P}}(x,y) & \text{za } \lambda = 1, \\ S_{\mathbf{L}}(x,y) & \text{za } \lambda = +\infty, \\ 1\text{-}log_\lambda(1 + \frac{(\lambda^{1-x}-1)(\lambda^{1-y}-1)}{\lambda-1}) & \text{inače.} \end{cases}$$

2. Familija $(S_\lambda^{\mathbf{Y}})_{\lambda\in[0,+\infty]}$ Yagerovih t-konormi je data sa

$$S_\lambda^{\mathbf{Y}}(x,y) = \begin{cases} S_{\mathbf{D}}(x,y) & \text{za } \lambda = 0, \\ S_{\mathbf{M}}(x,y) & \text{za } \lambda = +\infty, \\ min(1,(x^\lambda + y^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}} & \text{inače.} \end{cases}$$



Slika 2.4 [31] Konturni grafik za četiri osnovne t-konorme

Postoji nekoliko važnih parametrizovanih familija t-normi i t-konormi. Većina parametrizovanih familija t-normi daje odgovarajućim familijama dodatne generatore.

Weber je 1983. godine, predložio korišćenje sledećih t-normi $(T_\lambda^{SW})_{\lambda>-1}$ i t-konorme $(S_\lambda^{SW})_{\lambda>-1}$ za modeliranje veznika I i ILI, respektivno, za fazi skupove. Za λ > -1, x,y $\in$ [0,1], to je

$$T_\lambda^{SW}(x, y) = \max(0, \tfrac{x+y-1+\lambda xy}{1+\lambda}),$$
$$S_\lambda^{SW}(x, y) = \min(x+y+\lambda xy, 1).$$

t-konorma S_λ^{SW}, λ > -1, pojavljuje se već kao „dodatak pravila” za Sugenove λ-fazi mere u Sugenu 1974. godine, i stoga su često nazivani Sugenovi dodaci. ([9])

Hamacher je 1978. godine istraživao aksiomu od neprekidnih vrednosti logičkih veznika I i ILI kada je skup istinitih vrednosti jedinični interval. Njegov glavni rezultat se može preformulisati u sledećem obliku: neprekidna t-norma T je racionalna funkcija (tj. T(x, y) = P(x , y)/Q(x, y) sa polinomima P i Q) ako i samo ako T pripada familiji $(T_k^H)_{k\in[0,\infty)}$ gde

$$T_k^H(x, y) = \frac{xy}{k+(1-k)(x+y-xy)}$$

do slučaja x= y= k= 0.

Stavimo T_∞^H = T_D. Tada je familija (T_k^H) neprekidna i smanjenja u parametar k. Podsetimo se da je T_1^H = T_P.

Često, kao granični član parametrizovane familije, javljaju se najjača t-norma T_M i najslabija t-norma T_D. Slična situacija je i u slučaju familija t-konormi. Razlog za ovu činjenicu je opravdan sledećom teoremom koju je dao Dombi 1982. godine.

Teorema 2.5. [21] *Neka je f dodatni generator neprekidne Arhimedove t-norme T, tj. f:[0,1] $\rightarrow$[0,∞] je neprekidna, strogo je smanjeno mapiranje sa f(1) = 0. Neka $\lambda \in (0, \infty)$ bude realna konstanta. Zatim je takođe f^λ dodatni generator. Neka T_λ bude t-norma generisana sa f^λ. Tada za svako x,y $\in$[0,1] je*

$$\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(x, y) = T_M(x, y) \text{ i}$$
$$\lim_{\lambda\to 0^+} T_\lambda(x, y) = T_D(x, y).$$

Presek fazi skupa je definisan pomoću parova minimuma u poređenju sa odgovarajućom vrednošću pripadnosti, a unija pomoću parova maksimuma i komplementarnosti. Druga t-norma i konorma mogu da se koriste umesto min i max operatora, respektivno. Primena fazi skupova u teoriju strategijske evaluacije i selekcije uključuje samo presek skupa tako da koristimo sledeće t-norme:

1. T_M(x, y) = min(x, y) ;
2. T_P(x, y) = xy;
3. Sugenovu λ t-normu:
   T_λ^{SW}(x, y) = max(0, $\frac{x+y-1+\lambda xy}{1+\lambda}$), λ > -1,
4. Hamcherovu t-normu:
   T_k^H(x, y) = $\frac{xy}{k+(1-k)(x+y-xy)}$, k > 0.

2.3 Neke osobine t-normi

Jezikom polugrupa možemo reći da su za datu t-normu T i t-konormu S, ([0,1], T) i ([0,1], S) - komutativne totalno uređene polugrupe. Može se primetiti u slučaju ([0, 1],T), neutralni element e_T dat sa 1 i anihilator a_T je 0. Sa druge strane, u slučaju ([0, 1], S), neutralni element e_S je 0, a anihilator a_S je 1 (tj. S(a_S, x) = a_S). U oba ova slučaja, uređenje je ili uobičajeno uređenje realnih brojeva, ili obrnuto uređenje realnih brojeva.

Teorema 2.6.

1. *Trougaona norma T_M je jedina t-norma koja zadovoljava*

$$T(x, x) = x \text{ za svako } x \in (0,1).$$

2. *Trougaona norma T_D je jedina t-norma koja zadovoljava*

$$T(x, x) = 0 \text{ za sve } x \in (0,1).$$

Dokaz 6.

1. *Neka za t-normu T važi T(x, x) = x za sve x $\in$ (0,1). Tada za y $\leq$ x < 1 na osnovu monotonosti T imamo*

$$y = T(y, y) \leq T(x,y) \leq \min(x,y) = y.$$

Odatle na osnovu komutativnosti i rubnog uslova sledi T= $T_{\mathbf{M}}$.

2. *Neka za t-normu T važi T(x, x)= 0 za sve x* $\in$ *(0,1). Tada za svako y* $\in$ *[0,x) važi*

$$0 \leq T\,(x,y) \leq T\,(x,x) = 0,\ \text{što daje } T= T_{\mathbf{D}}.$$

Definicija 2.8. [20] *Trougaona norma T je striktna ako je neprekidna (u smislu neprekidna kao funkcija dve promenljive) i važi:*

$$T(x,y) < T(x,z) \; kad\; god\; je\; x > 0 \; i\; y < z. \tag{2.4}$$

Obrnuto ne važi.

Osobina striktne monotonosti (2.4) je ekvivalentna sa osobinom kancelacije (skraćivanja): za x > 0, T (x, y) = T (x, z) sledi y = z. Primetimo da striktna monotonost (2.4) ne povlači neprekidnost. Štaviše, postoje t-norme koje zadovoljavanju (2.4), a imaju gust skup tačaka prekida. ([20])

Definicija 2.9. [20] *Trougaona norma T je Arhimedova ako za svako x,y* $\in$ *(0,1), x* $\neq$ *y postoji ceo broj n, takav da je*

$$x_T^{(n)} = T_{i=1}^{n} x < y. \tag{2.5}$$

Primer 9. Trougaone norme $T_{\mathbf{P}}$ i $T_{\mathbf{L}}$ su Arhimedove, ali $T_{\mathbf{M}}$ nije Arhimedova t-norma.

Teorema 2.7. [20] *Trougaona norma T je Arhimedova onda i samo onda ako za svako x* $\in$ *(0,1)*

$$\lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = 0.$$

Dokaz 7. *Ako je T Arhimedova t-norma tada za svako x* $\in$ *(0,1) i svako* $\epsilon > 0$ *važi* $0 \leq x_T^{(n_0)} < \epsilon$ *za neko* $n_0 \in N$. *Odatle na osnovu monotonosti T sledi* $0 \leq x_T^{(n)} < \epsilon$ *za sve prirodne brojeve* $n \geq n_0$, *što daje (2.5).*
Pretpostavimo sada da za t-normu T za svako x $\in$ *(0,1) važi* $\lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = 0$. *Tada za svako y* $\in$ *(0,1) postoji prirodan broj n tako da je* $x_T^{(n)} < y$, *što znači da je T Arhimedova t-norma.*

Primer 10. Trougaona norma $T_{\mathbf{D}}$ je Arhimedova (jer je $x_{T_{\mathbf{D}}}^{(2)} = T_{\mathbf{D}}(x, x) = 0$), iako nije neprekidna.

Teorema 2.8. [20] *Ako je trougaona norma T Arhimedova, onda ona zadovoljava uslov*

$$T(x,x) < x \; za \; sve \; x \in (0,1). \tag{2.6}$$

Ako je trougaona norma T neprekidna, onda je ona Arhimedova onda i samo onda ako važi (2.6).

Dokaz 8. *Ako bi za neko x* $\in$ *(0,1) bilo T(x, x) = x onda bi bilo* $x_T^{(n)} = x$ *za sve n* $\in$ *N, što bi bilo u suprotnosti sa pretpostavkom da je T Arhimedova t-norma.*
Da bismo dokazali drugi deo tvrđenja pretpostavimo da važi (2.6) za sve x $\in$ *(0,1). Za proizvoljno u* $\in$ *(0,1) na osnovu monotonosti T niz*

$$\{u_T{}^{(2^k)}\}_{k\in N}$$

je monotono ne-rastući, te konvergira ka nekom elementu $u_0 \leq u < 1$. Na osnovu neprekidnosti T sledi

$$T(u_0,u_0) = \lim_{k\to\infty} T(u_T{}^{(2^k)}, u_T{}^{(2^k)}) = \lim_{k\to\infty} (u_T{}^{(2^k)})_T^{(2)} = \lim_{k\to\infty} u_T{}^{(2^{k+1})} = u_0.$$

Odatle na osnovu (2.6) sledi $u_0 = 0$. Zato je na osnovu Teoreme 2.7 t-norma T Arhimedova.

Postoje dve važne klase neprekidnih Arhimedovih t-normi. Očigledno je svaka striktna t-norma i Arhimedova t-norma, ali obrnuto nije tačno.

Primer 11. $T_{\mathbf{L}}$ je neprekidna Arhimedova t-norma, koja nije striktna.

Definicija 2.10. *Neprekidne Arhimedove t-norme koje nisu striktne zovemo nilpotentne.*

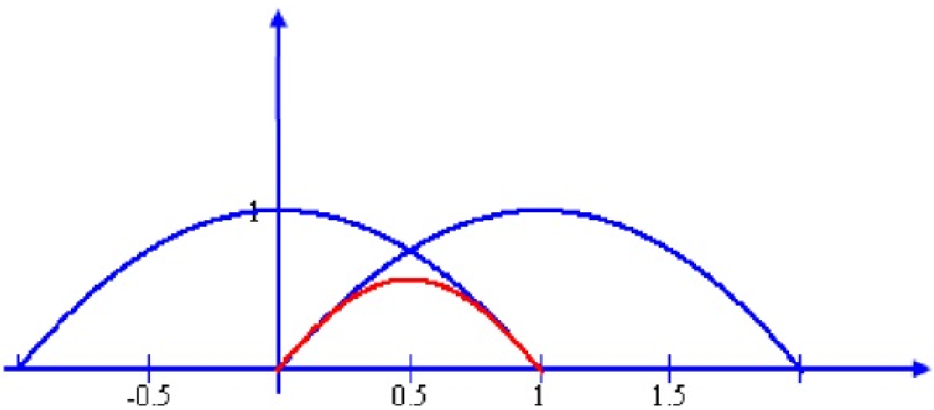
Teorema 2.9. [20] *Neka je T neprekidna Arhimedova t-norma. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

1. *T je nilpotentna t-norma.*
2. *Postoji nilpotentni elemenat za T, tj. takav elemenat $x \in (0,1)$ da za neko $n \in N$ važi $x_T^{(n)} = 0$.*
3. *Postoji delitelj nule za T.*
4. *Svaki elemenat $x \in (0,1)$ je nilpotentan za T.*

2.4 Operacije na fazi skupovima zasnovane na t-normama i t-konormama

Predstavićemo definicije preseka i unije fazi skupova koje se baziraju na trougaonim normama i trougaonim konormama. To su uopštenja standardnog preseka i unije [13, 19].

Definicija 2.11. [9, 13] *Neka je T proizvoljna trougaona norma. T-* **presek** *fazi skupova A i B, $A \bigcap B$ definiše se kao $\mu_{A\bigcap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$, za svako $x \in X$.*



Slika 2.5 T- presek fazi skupova A i B

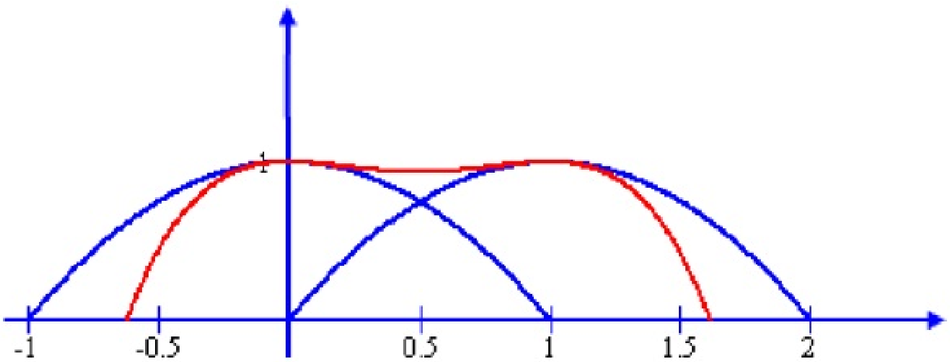
Primer 12. Neka su dati fazi skupovi A i B, neka su date njihove funkcije pripadnosti respektivno: $\mu_A(x) = 1 - x^2$ koja je definisana za $x \in [-1, 1]$, i $\mu_B(x) = 1 - (1 - x)^2$ koja je definisana za $x \in [0, 2]$ i neka je data trougaona norma $T_p(x, y) = xy$, onda sledi da je funkcija pripadnosti preseka fazi skupova A i B:

$$\mu_{A \bigcap B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x) = (1 - x^2)(1 - (1 - x)^2).$$

Definicija 2.12. $[9, 13]$ *Neka je S proizvoljna trougaona konorma. S-* **unija** *fazi skupova A i B,* $A \bigcup B$ *definiše se kao* $\mu_{A \bigcup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$*, za svako* $x \in X$.

Primer 13. Neka su dati fazi skupovi A i B, i neka su njihove funkcije pripadnosti definisane kao u prethodnom primeru i neka je data trougaona konorma $S_p(x, y) = x + y - xy$, onda sledi da je funkcija pripadnosti unije fazi skupova A i B:

$$\mu_{A \bigcup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x) = 1 - x^2 + 1 - (1 - x)^2 - (1 - x^2)(1 - (1 - x)^2) = -x^4 + 2x^3 - x^2 + 1.$$



Slika 2.6 S-unija fazi skupova A i B

3 Uloga fazi matematike u ekonomskom odlučivanju

Tradicionalno, ekonomski modeli su zasnovani na klasičnoj matematici utemeljenoj na aristotelovoj dvoelementnoj logici. Sa pojavom fazi matematike, kao sredstvom za modeliranje pojava koje su prožete neodređenošću i nekompletnošću, stvara se mnogo adekvatniji okvir za modeliranje ekonomskih pojava. Novi koncept je rezultirao pojavom približnog rezonovanja i fazi sistema kontrole koji su se pokazali kao efikasno sredstvo pri donošenju odluka u uslovima neodređenosti. [3]

3.1 Uloga fazi skupa u modeliranju neodređenosti

Tradicionalno, ekonomski modeli su zasnovani na klasičnoj matematici utemeljenoj na aristotelovskoj dvoelementnoj logici. U aristotelovom konceptu, određeni element ili pripada ili ne pripada nekom skupu, treće mogućnosti nema. Međutim, ovakav egzaktan pristup nije pogodan za modeliranje pojava koje su prožete neodređenošću. Poznat je Wang-ov paradoks:

Ako je x mali broj, onda je to i x + 1. Ako je x + 1 mali broj, onda je to i (x + 1) + 1. Tako dolazimo do zaključka da je i pet biliona mali broj, kao i beskonačnost.

Rešenje koje je mogla da ponudi klasična matematika bilo bi da se odabere proizvoljna, ali jasna granica između skupa malih i velikih brojeva. Pojam fazi skupa, potpuno suprotan pojmu tradicionalnog aristotelovog skupa, uvodi Zadeh. Ovim konceptom se dopušta nijansiranje stepena pripadnosti elementa određenom skupu, tj. svakom elementu pridružujemo realan broj kao indikator stepena pripadanja tog elementa skupu.

Fazi skupovi, ili rasplinuti skupovi, su učinili mogućim modeliranje različitih tipova neodređenosti, različite od slučajne neodređenosti. Naime, fazi konceptom neodređenost se inkorporira u samu definiciju modela, što model čini realnijim, a samim tim i pogodnim okvirom za ljudsko rezonovanje.

Fazi rešenje Wang-ovog paradoksa bilo bi da se odredi gornja granica g do koje se brojevi smatraju nedvosmisleno malim i ti brojevi bi pripadali skupu malih brojeva sa funkcijom pripadanja 1, a skupu velikih brojeva sa funkcijom pripadanja 0. Dalje bi, za svaki element veći od g, tj. $g + 1$, $(g + 1) + 1$ itd. funkcija pripadanja skupu malih brojeva linearno opadala, a funkcija pripadanja skupu velikih brojeva linearno rasla i dostizala vrednost 1 za najmanji prirodan broj koji bismo smatrali nedvosmisleno velikim brojem. Ovakvim fazi pristupom, umesto oštre klasične granice, uspostavljamo „prelazni pojas" između skupa malih i velikih brojeva. Metaforički rečeno, dopuštamo svaku nijansu sive između crne i bele boje. [7]

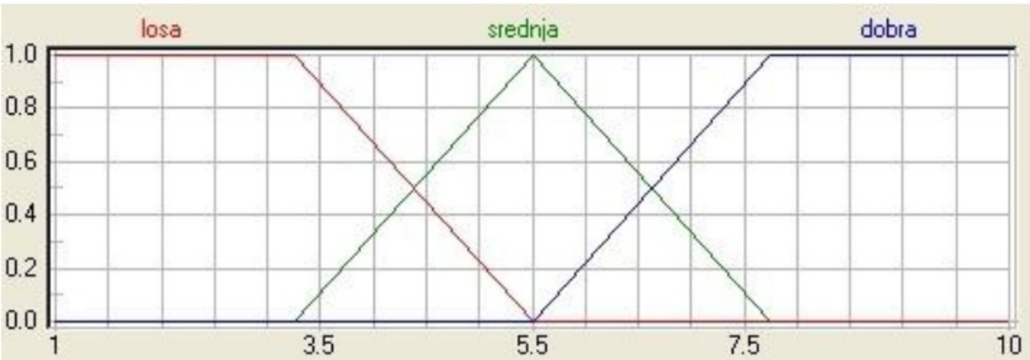
Ekonomske odluke se donose u promenljivom okruženju, gde je neodređenost uslovljena nepoznavanjem sistema u celini. Nemoguće je sa sigurnošću izdvojiti konačan skup pojava koje utiču na datu pojavu, a i za one pojave koje znamo da imaju uticaj često smo suočeni sa nemogućnošću poznavanja njenih vrednosti u svakom trenutku. Dakle, fazi priroda ekonomskih sistema ogleda se kako u delimičnom nepoznavanju celine sistema, tako i u nekompletnosti dostupnih informacija. Značajnu ulogu u ponašanju ovih sistema ima ljudska psihologija, što dodatno usložnjava sistem koji se ne može uspešno modelirati metodama klasične matematike.

Sa pojavom fazi matematike, kao sredstva za modeliranje pojava koje su prožete neodređenošću i nekompletnošću, stvara se mnogo adekvatniji okvir za ekonomska istraživanja postizanjem zadovoljavajućeg kompromisa između dostupnih informacija i stepena neodređenosti koji dopuštamo. Pod pojmom fazi neodređenosti podrazumevamo neodređenost u smislu nepoznavanja sistema kao celine i potrebe za nijansiranim odgovorom donosioca odluke. Drugim rečima, fazi neodređenost se suštinski razlikuje od neodređenosti u smislu teorije verovatnoće, gde neodređenost potiče od slučajne prirode modeliranih procesa.

Uprkos ogromnom tehničkom napretku u poslednjih dvadesetak godina, mnogi industrijski i organizacioni procesi su i dalje kontrolisani od strane iskusnih profesionalaca ili menadžera koji donose odluke u promenljivom okruženju, oslanjajući se na sopstvenu intuiciju i iskustvo. Zadatak fazi logike je da ponudi skup fazi zakona jednostavne formulacije, bliskih načinu ljudskog rezonovanja, koji objašnjavaju okruženje. Oslanjanjem na ove zakone, donosioci odluka smanjuju mogućnost greške usled uticaja okoline ili subjektivne pogrešne procene.

Važan koncept koji se koristi u brojnim primenama je koncept lingvističke varijable. Lingvistička varijabla je uređena petorka (x, T(x), X, G, M), gde je x ime varijable, T(x) skup lingvističkih terma, tj. vrednosti lingvističke varijable, X univerzalni skup, G pravilo za generisanje lingvističkih terma, M pravilo koje svakom lingvističkom termu t iz skupa T dodeljuje značenje M(t) koje je, u stvari, fazi broj na X.

Posmatrajmo lingvističku varijablu čiji je naziv „kvalitet uprave”. Domen varijable (osa x) definisan je skalom kvalitativnih vrednosti od 1 do 10 koje služe za ocenjivanje kvaliteta uprave. Osa y meri stepen u kome je, za određenu ocenu, uprava loša, srednja ili dobra. „Loša”, „srednja” i „dobra” su lingvistički termi varijable „kvalitet uprave”, čije značenje je prikazano na Slici 3.1. Na primer, uz ocenu 4 uprava je 31,5 % srednja i 68,5 % loša. Definisanje broja lingvističkih terma na koje se opseg deli, kao i definisanje fazi skupova koji se pridružuju lingvističkim termima su zadaci za eksperte, koje treba obaviti u skladu sa konkretnom pojavom koja se modelira.



Slika 3.1 [28] Fazi skupovi pridruženi termima lingvističke varijable „kvalitet uprave”

3.2 Približno zaključivanje u uslovima neodređenosti

U tradicionalnoj logici, koja predstavlja osnovu klasične matematike, zaključivanje se vrši po dva osnovna zakona, modus ponensu i modus tolensu. Na primer, zaključivanje po modus ponensu (MP) odvija se po šemi:

Premisa 1: **x je A**
Premisa 2: **AKO x je A ONDA je y je B**
Zaključak: **y je B**

gde su A i B klasični skupovi. Drugim rečima, modus ponens daje logičku osnovu da u istim situacijama isto reagujemo. Međutim, nijedna ekonomska situacija nije u potpunosti podudarna nekoj istorijskoj, što nameće potrebu za definisanjem približnog rezonovanja, a to je u okvirima tradicionalne logike nemoguće. Za potrebe definisanja nove logičke strukture, tradicionalni modus ponens (MP) se proširuje na generalizovani modus ponens (GMP) sa sledećom šemom:

Premisa 1: **x je** $\mathbf{A_1}$
Premisa 2: **AKO x je A ONDA je y je B**
Zaključak: **y je** $\mathbf{B_1}$

gde su A, A_1, B i B_1 fazi skupovi, pri čemu A i A_1 nisu obavezno jednaki fazi skupovi, kao ni B i B_1, tj. njihove funkcije pripadanja nisu obavezno iste, ali su odstupanja relativno mala. Jasno, x i y, u slučaju GMP-a, su lingvistčke varijable, A, A_1 termi lingvističke varijable x, a B i B_1 termi lingvističke varijable y. Naravno, što je stepen razlikovanja funkcija pripadanja skupova A i A_1, kao i B i B_1 manji, približno zaključivanje bliže je klasičnom. Generalizovani modus ponens daje logičku osnovu da u sličnim situacijama slično reagujemo. Fazi koncept zaključivanja po sličnosti predstavlja osnovu za približno rezonovanje u brojnim ekonomskim modelima prožetim neodređenošću.

3.3 Fazi sistemi kontrole

Fazi sistem kontrole podrazumeva zaokružen sistem kontrole pojava prožetih neodređenošću, ne obavezno ekonomskih. Šema ovog sistema prikazana je ispod.

Numerički ulaz → Fazifikator → Fazi ulaz → Skup fazi zakona → Fazi izlaz → Defazifikator → Numerički izlaz

Numeričke vrednosti ekonomskih veličina se, najpre, fazifikuju. Zatim, tako fazifikovane vrednosti, tj. lingvističke varijable sa pridruženim termom, ulaze u skup fazi zakona i aktiviraju jedan od njih. Nakon toga se vrši zaključivanje po GMP-u i kao rezultat toga dobija se fazi izlaz, druga lingvistička varijabla sa pridruženim odgovarajućim termom. Iz ovog fazi izlaza moguće je, ukoliko je potrebno, izvršiti ekstrakciju numeričkog odgovora. Posmatrajmo najjednostavniji, ali ilustrativan, primer korišćenja fazi sistema kontrole.

Pretpostavimo da neka osoba ima na raspolaganju svotu novca od 10.000 evra na određeni period i da želi da eventualno zaradi, u smislu dinarske protivvrednosti, tako da se odlučuje da li da konverziju izvrši na početku ili na kraju tog perioda. Jasno, odluka kada da se izvrši konverzija donosi se u odnosu na očekivani kurs dinara prema evru. Pretpostavimo da je srednji kurs evra na dan odluke 110, a 115 dinara za jedan evro projektovani srednji kurs na isteku tog perioda. Ovi podaci čine numerički ulaz sistema i nakon njihove fazifikacije dobijamo fazi ulaz očekivanog odnosa dinara prema evru - lingvističku varijablu „dinar prema evru" kojoj je pridružen lingvistički term „slabi". Ovakav fazi ulaz se prosleđuje u skup fazi zakona i aktivira samo jedan fazi zakon i to onaj zakon čiju premisu zadovoljava. Kompletan sistem fazi kontrole, u našem primeru, sastoji se od tri fazi zakona:

AKO dinar prema euru slabi ONDA konverziju izvršiti na kraju perioda
AKO dinar prema euru jača ONDA konverziju izvršiti na početku perioda
AKO dinar je prema euru stabilan ONDA konverziju ne vršiti,

gde lingvistička varijabla „dinar prema evru" ima tri lingvistička terma „slabi", „jača" i „stabilan". Termu „stabilan" pridružujemo fazi skup okoline broja 110. Naravno, rasplinutost fazi skupa na levo i na desno od 110 je uslovljena visinom troškova konverzije. Drugim rečima, za sitne oscilacije srednjeg kursa oko početne vrednosti se ne isplati vršiti konverziju, jer bi nakon obračuna menjačkih troškova dobijena količina novca bila manja nego da se konverzija u dinare izvršila u početnom trenutku. Premisa iz našeg primera aktivira prvi zakon, koji povlači izlaz: konverziju izvršiti na kraju perioda. Primetimo da, u ovom slučaju, ne dobijamo fazi odgovor nego jasnu komandu. U slučaju da se fazi zaključivanjem ne dobija komanda nego lingvistički term, kao što je kod fazi zakona tipa:

AKO je nezaposlenost relativno niska ONDA je prosečna plata relativno visoka,

moguće je izvršiti ekstrakciju numeričke vrednosti iz fazi odgovora. Postoje tehnike kojima se iz lingvističkog terma „relativno visoka" lingvističke varijable „prosečna plata" precizira numerička vrednost prosečne plate. U brojnim ekonomskim primenama ne postoji potreba za ekstrakcijom numeričkog odgovora, kao što je, na primer, kod različitih fazi sistema kontrole koji kontrolišu trgovanje na berzi, gde sistem nudi savet donosiocu odluke u formi komande kupovine, prodaje ili zadržavanja pozicije. Ovaj odgovor se, u nekim sistemima, nijansira tako da skup lingvističkih terma fazi varijable „akcija trejdera” ima, recimo, sledeći oblik: jako prodati, prodati, zadržati poziciju, kupiti, jako kupiti. Primetimo da, u prethodnom primeru, svaki put kada dinar prema evru slabi, izlazna komanda je da se konverzija izvrši na kraju perioda, tako da se može tumačiti da se zaključivanje vrši po klasičnom modus ponensu. Međutim, i u slučaju projektovanog kursa od 115 i, recimo 116 dinara za jedan evro, lingvistička varijabla „dinar prema evru” poprima vrednost „slabi” i vodi ka istoj komandi, tako da je zaključivanje svakako približno.

U gore navedenom primeru, postoje tri mogućnosti budućeg odnosa dinara prema evru koje su opisane pomoću tri lingvistička terma. U slučaju da na neku pojavu utiču, recimo, dve pojave, svaka opisana sa po tri lingvistička terma, kompletan fazi sistem kontrole imao bi $3 \bullet 3 = 9$ zakona, po jedan za svaku kombinaciju stanja ulaznih lingvističkih varijabli.

Fazi zakoni u manje složenim sistemima često se dobijaju od strane iskusnih eksperata. Međutim, za dobijanje fazi zakona u visoko nelinearnim složenim ekonomskim modelima sa zašumljenim podacima gde se najčešće očekuje nijansiran odgovor, koriste se neuronske mreže, koje imitiraju strukturu neurona u mozgu. Ova struktura sastoji se od neurona i veza među njima. Dostupni empirijski podaci obrađuju se na način da se ustanovi veza ulaznih i izlaznih neurona. Drugim rečima, neuronske mreže, u uslovima ovakvih nelinearnih modela, efikasno prepoznaju uzročno-posledične veze. Uprkos nemogućnosti da objasne ustanovljene veze, kada su dobro definisane, neuronske mreže sa velikim uspehom predviđaju izlaz za proizvoljan skup ulaznih podataka.

Nedostaci koje je ispoljila klasična matematika u modeliranju pojava koje sadrže elemente neodređenosti, prevaziđeni su pojavom fazi koncepta, gde se neodređenost unosi u samu definiciju modela. Novi pristup rezultirao je pojavom približnog rezonovanja po generalizovanom modus ponensu i fazi sistema kontrole, na koje se donosilac odluka oslanja u promenljivom i dinamičnom okruženju karakterističnom za ekonomske modele. Na taj način značajno se smanjuje mogućnost greške donosioca odluke usled subjektivne pogrešne procene. Materijal korišćen za izradu ovod dela uzet je iz [14, 17, 31].

4 Strateška portfolio analiza

Portfolio analiza je skup tehnika za vrednovanje odgovarajućih strategija za postizanje poželjne kombinacije poslovnih aktivnosti/ strateških poslovnih jedinica u poslovnom sistemu. Ona se još može i definisati kao skup detaljnih analiza svih ili odabranih poslovnih partnera kompanije. Detaljni prikazi operativnih i finansijskih parametara i racio pokazatelja pomažu korisniku u donošenju vitalnih odluka u poslovanju.

Skup poslovnih informacija kroz razne vrste izveštaja pomaže menadžmentu kompanije da na pravi način iskoristi potencijal niskorizičnih kompanija i prilagodi svoju kreditnu politiku prema visokorizičnim poslovnim partnerima. U cilju pojednostavljenja procesa analize klijenata, proizvod je podeljen na četiri sekcije koje će, svaka sa svojim specifičnostima, ukazati na bitne parametre u njihovom poslovanju:

1. Rezime poslovnog portfolija
2. Analiza vlasničke strukture i povezanih lica
3. Analiza uvozno/izvoznih podataka
4. Finansijska analiza

Prednosti:

- Utvrđivanje visokorizičnih poslovnih partnera i primena adekvatnih mera kreditne kontrole
- Sagledavanje potencijala niskorizičnih klijenata
- Najbrži način uočavanja kritičnih promena u portfoliju
- Identifikovanje trenutnih stanja klijenata radi planiranja buduće saradnje
- Identifikovanje potencijalnih klijenata kroz povezana lica
- Adekvatnije planiranje investicija i prodaje.

Portfolio analiza daje:

- Procenu strateškog položaja neke strateške poslovne jedinice SADA
- Procenu strateških PROMENA koju bi strateška poslovna jedinica htela učiniti, sa procenom anticipiranih efekata i implikacija na promene u potrebama za resursima.

Portfolio strategija:

- Poželjni portfolio poslovnih aktivnosti / SPJ
- Bitne strateške promene potrebne za postizanje poželjnog portfolija
- Bitni resursi potrebni za izvođenje strateških promena
- Očekivani rezultati

4.1 Portfolio matrica

Portfolio matrica je dijagram koji se koristi da definiše proizvode u smislu kako rastu u svojoj branši i njihovog specifičnog tržišnog udela. Da bi se kreirala portfolio matrica, prvo treba da se nacrta dijagram sa 4 kvadrata. Vertikalna osa dijagrama je za rast u industriji, a horizontalna osa je za tržišni udeo na određeni proizvod u toj industriji. Zatim, svaki proizvod se analizira i stavlja na matricu u smislu njihovog specifičnog tržišnog udela protiv rasta industrije.

4.1.1 Izbor odgovarajuće portfolio matrice

Portfolio matrice koje se najčešće koriste su:

1. Matrica Bostonske konsultantske grupe (BCG),
2. Matrica General Electric-a, odnosno, McKinsey & Co. (GE),
3. Matrica životnog ciklusa razvijena od strane Arthur D. Little, Inc. (ADL),
4. Alternativna BCG-matrica,
5. Matrica profitabilnosti (Hax, Majluf, 1984, Johnson, Scholes, 1984).

Strateška pozicija se određuje na osnovu: relativnog tržišnog učešća u odnosu na vodećeg konkurenta i stope rasta tržišta poštanskih usluga u celini. Kao moguće polje delovanja pri obradi tržišta može se posmatrati čitavo potencijalno tržište ili samo njegovi segmenti.

U Tabeli 4.1 prikazani su odgovarajući spoljni i unutrašnji faktori koji određuju dimenzije navedenih portfolio matrica.

Portfolio matrice	Eksterni faktori	Interni faktori
BCG	Stepen rasta tržišta	Udeo na tržištu
GE	Atraktivnost privredne grane	Kompetitivne prednosti
ADL	Zrelost privredne grane	Celokupna poslovna pozicija
Alternativna BCG	Mogućnost diferenciranja	Kompetitivne prednosti
Matrica profitabilnosti	Potencijali rasta tržišta Cena kapitala	Profitabilnost Generisanje gotovinskih sredstava

Tabela 4.1 [4] Portfolio Matrice

Na izbor odgovarajuće matrice, pored samih faktora utiče i mogućnost njihove gradacije. Najdetaljniju analizu omogućava ADL matrica.

Nedostaci pri primeni ovih matrica su:

- omogućavaju uvid u ograničen broj uticajnih faktora. Ovaj nedostatak se može delimično nadoknaditi primenom različitih portfolio matrica;

- portfolio analiza je više alat za dijagnozu stanja poslovanja preduzeća, nego što je pouzdan metod za izbor optimalne strategije, tj. pomaže pri identifikaciji problema, ali ne i u njegovom potpunom rešavanju.

Matrice BCG, GE i ADL su bazične matrice portfolio analize, koje su korišćene pri sistematizaciji i informatičkoj transformaciji metodologije strateške portfolio analize u odgovarajuću programsku podršku.

4.1.2 Portfolio matrica bostonske konsultantske grupe

BCG je najjednostavnija forma portfolio matrice, čija se koncepcija zasniva na činjenici da troškovi proizvodnje opadnu za fiksni procenat svaki put kada se ukupan kumulativni obim proizvodnje udvostruči, što prikazuje kriva iskustva. Ona predstavlja osnovu za izbor strategije, a zasniva se na dva osnovna pravila:

1. Preduzeće treba da teži da ima najveći udeo na tržištu, jer time ima najviši kumulativni obim proizvodnje, najniže proizvodne troškove i najveću rentabilnost, sledeći efekte krive iskustva.
2. Može doći do problema u upravljanju organizacijom ukoliko troškovi preduzeća ne slede efekte krive troškova.

Dimenzije:

1. Relativno tržišno učešće
2. Stopa rasta tržišta

Relativno tržišno učešće - odnos sopstvenog tržišnog učešća i tržišnog učešća najvećeg konkurenta

- Ukoliko je RTU > 1, reč je o visokom RTU, i obrnuto
- RTU pokazuje doprinos posla prilivu gotovine (efekti krive iskustva).

$$\text{Relativno tržišno učešće} = \frac{\frac{Sopstvena\ prodaja}{Ukupna\ prodaja}}{\frac{Prodaja\ najveceg\ konkurenta}{Ukupna\ prodaja}} =$$

$$= \frac{Sopstvena\ prodaja}{Prodaja\ najveceg\ konkurenta}$$

Na primer, ako je rezultat 0,45 to znači da prihod od te strateške poslovne jedinice predstavlja 45% liderovog tržišnog učešća. Ako je rezultat veći od 1 to znači da je data strateška poslovna jedinica lider u tržišnom učešću, a ako je rezultat 1 znači da deli lidersko mesto na tržištu sa još nekom firmom. Proizvodi koji imaju visoko tržišno učešće predstavljaju i glavne generatore gotovine za jedno preduzeće.

Stopa rasta tržišta predstavlja atraktivnost tržišta za pojedinu stratešku poslovnu jedinicu, a izračunava se na sledeći način:

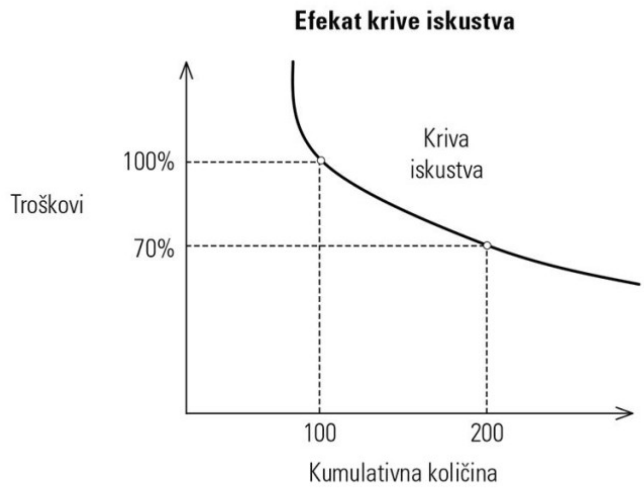
$$\text{Stopa rasta tržišta u periodu t} = \frac{ukupno\ trziste\ u\ periodu\ t - ukupno\ trziste\ u\ periodu\ t{-}1}{ukupno\ trziste\ u\ periodu\ t{-}1}$$

Stopa rasta može biti pozitivna (što označava rastuće tržište), nula (što predstavlja stagnirajuće tržište) i negativna (što ukazuje na opadajuće tržište u perspektivi). Stopa rasta tržišta se u BCG matrici predstavlja sa oznakama „niska” i „visoka” što u stvari govori da li je stopa rasta tržišta za tu stratešku poslovnu jedinicu niža ili viša od proseka rasta tržišta cele ekonomije tog područja.

Kriva iskustva se zasniva na stečenom iskustvu da, kada se udvostruči količina proizvedene robe, ukupni troškovi po komadu mogu da se smanje za 20% do 30%.
Uzroci krive iskustva su:

- učenje
- racionalizacija
- standardizacija
- tehnički napredak
- povoljnija nabavka
- promene materijala koji se koriste.

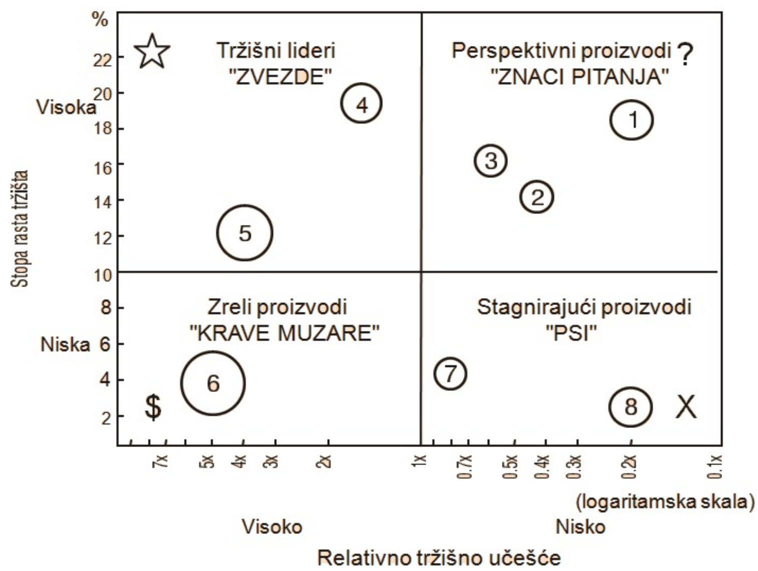
Efekat krive iskustva opisuje potencijal za smanjenje troškova koji može da se dostigne savesnim upravljanjem troškovima ali koje se nikako ne dešava automatski. [16]



Slika 4.2 [16] Efekat krive iskustva

BCG matrica ima dimenzije 2x2 i svaki kvadrant u njoj predstavlja određenu stratešku kategoriju. Svi kvadranti imaju svoj simbolički naziv:

1. „Zvezde”,
2. „Krave muzare”,
3. „Upitnici” („problematična deca” ili „divlja mačka”),
4. „Psi”.



Slika 4.3 BCG-matrica relativnog tržišnog učešća/ rast tržišta

Svrha ove matrice je:

1. da strategu pruži jednostavan, pregledan pogled na celokupan trenutni portfolio kompanije
2. time omogućava donošenje korisnih odluka o strategiji rasta, kao i eventualnom ukidanju neprofitabilnih delova. [30]

Pozicija svake odvojene SPJ u BCG matrici se dobija na osnovu stepena rasta tržišta kojem SPJ pripada, kao prve dimenzije i njenog relativnog udela na tržištu, kao druge dimenzije ove matrice. Stepen rasta tržišta se dobija stavljanjem u odnos godišnjeg prinosa sa prošlogodišnjim obimom i izražava se u procentima. Relativni udeo na tržištu se izračunava kao odnos sopstvene prodaje sa prodajom vodećeg konkurenta. Obe vrednosti se računaju za isti vremenski period.

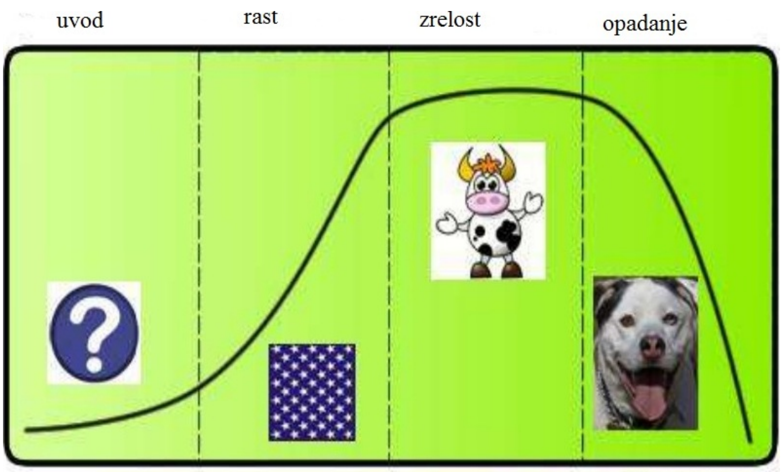
Poslovi koji pripadaju prvom kvadrantu imaju visok udeo na brzo rastućem tržištu. Zahtevaju veliku količinu obrtnih sredstava za dalje investiranje, koje često nisu u stanju da sami obezbede. Karakteristično je da je za njih preduzeće na vreme uočilo određenu potrebu, tj. tražnju i uspelo da ih uspešno plasira na tržište i kao takvi predstavljaju najbolje profitne i razvojne mogućnosti tog preduzeća. Za njih se može očekivati da brzo postanu samoinvestirajući.

Poslovi koji pripadaju drugom kvadrantu imaju visok udeo na sporo rastućem tržištu, što im omogućava generisanje velikih količina obrtnih sredstava koja se mogu koristiti za investiranje u poslove locirane u ostalim kvadrantima. Kod ovih poslova treba preduzeti akcije za revitalizaciju i poboljšavanje pozicije jer se oni najčešće nalaze u zreloj fazi razvoja. Poslovi koji pripadaju trećem kvadrantu imaju nizak udeo na brzo rastućem tržištu, što im omogućava generisanje izuzetno malih količina obrtnih sredstava. Ovde su moguće sledeće strategije: prevođenje posla u prvi kvadrant reinvestiranjem od drugog posla, potpuno napuštanje ili zadržavanje postojećeg stanja (što treba izbegavati).

Poslovi koji pripadaju četvrtom kvadrantu imaju nisko učešće na sporo rastućem tržištu, a samim tim i nizak stepen profitabilnosti, tako da mogu lako da postanu izvori gubitaka. Ovde su moguće sledeće strategije: što bezbolnije oslobađanje ovih poslova ili njihovo održavanje, pa, novim investiranjem, prelazak u susednu oblast (ako je neophodno zadržavanje ovih poslova). ([4])

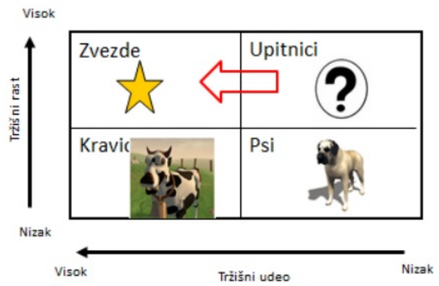
Najvažniji nedostaci BCG:

1. Ignoriše elemente okruženja preduzeća, kao što su barijere za uključivanje u određenu industriju, pravna i politička ograničenja, elastičnost tražnje i cikličnost. Tretira stopu rasta kao jedinstveni pokazatelj atraktivnosti grane
2. Fenomen „učenja" i krive iskustva se ne može neograničeno koristiti
3. Stopa rasta tržišta ne implicira uvek potrebe za odlivom- dokaz su neke zrele grane sa niskom stopom rasta.



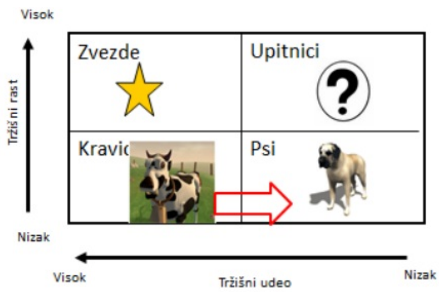
Slika 4.4 Veze između BCG i životnog ciklusa proizvoda

Krave muzare



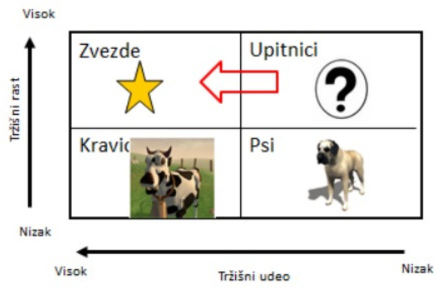
Krave muzare označavaju strateške poslovne jedinice čiji proizvodi pripadaju slabo rastućim, neatraktivnim granama ali koji imaju visoko relativno tržišno učešće. Kao poslovi koji su u silaznoj putanji svoga životnoga veka, a sa visokim tržišnim učešćem, oni donose dosta novca. Taj novac se ne investira u razvoj SPJ te tako donosi dosta gotovine korporaciji koja te pare može iskoristiti za ulaganje u druge SPJ koje se nalaze u drugim poljima (najčešće se novac preusmerava upitnicima). Budući da su u neatraktivnim granama, mala je mogućnost pojave novih konkurenata pa se ove SPJ zadržavaju u poslovnom portfoliju preduzeća sve dok obezbeđuju priliv gotovine.
Primer: Pepsi

Psi



Psi su strateške poslovne jedinice čiji proizvodi pripadaju slabo rastućim granama, a uz to imaju i nisko relativno tržišno učešće. Ovi poslovi su mali stvaraoci profita, ali su i zbog ograničene mogućnosti za rast i mali potrošači finansijskih sredstava. Mada su sredstva potrebna za investiranje u proizvod mala, ona ipak često prevazilaze svotu generisanih sredstava, pa takvi poslovi imaju negativan novčani tok.
Primer: Bioskopi u malim gradovima

Upitnici



Upitnici su strateške poslovne jedinice koje imaju nisko relativno tržišno učešće a nalaze se na brzo rastućem tržištu. Ovi poslovi mogu pružiti priliku za dugoročni profit i rast, ali im pozicija u budućnosti nije najjasnija pa su zbog toga označeni upitnicima. Mogu uz značajnija ulaganja vrlo lako prerasti u zvezde i u budućnosti doneti dosta novca, ali isto tako mogu, čak i pored velikih ulaganja, da spadnu na poziciju psa. Da takvi poslovi ne bi postali zamka za novac, pored mogućnosti za ulaganjem, treba uvek razmotriti i mogućnost dezinvestiranja, odnosno prodaje „upitnika”.

Zvezde

Zvezde su strateške poslovne jedinice koje imaju visoko relativno tržišno učešće i nalaze se na brzo rastućem tržištu. Nude priliku za visoki profit i daljni rast posla. U ove SPJ je potrebno dosta ulagati da bi posao nastavio rasti i da bi se zadržala vodeća pozicija na tržištu. Zato što one same generišu dosta novca, nekada je samo taj novac dovoljan da podmiri potrebe za rastom pa čak i da se ostvari pozitivan gotovinski tok, dok je često slučaj (pogotovo kod mladih zvezda) da im je potrebno dodatne gotovine od strane korporacije da bi se zadovoljile potrebe za ubrzanim rastom. Kada rast tržišta ovih poslova postane nizak, onda zvezde prelaze u krave muzare, ali treba paziti da se ne izgubi visoko tržišno učešće jer bi onda ovi poslovi prerasli u pse.

5 Primena fazi skupova sa različitim tumačenjem t-normi portfolio matrica u strategijskom menadžmentu

Strategijski menadžment se može definisati kao deo procesa po kojima organizacija formuliše ciljeve i uspehe koje može da ostvari. Naglasak generičke strategije na jednoj ili dve promenljive povećava svoj uticaj i intuitivni apel, ali komplikuje njegovo korišćenje. Ovo je slično muzici: postoje samo osam beležaka u muzičkoj skali, ali oni mogu biti raspoređeni na neoređen broj načina. Vrednost generičkih strategija leži više u pitanjima koja provociraju nego u bilo kom naporu nezavisne implementacije.

Nekoliko metodologija su razvijene da pomognu pri izboru najadekvatnije strategije, odnosno miks strategije, u domenu strategijskog menadžmenta. Jedna od njih je poznata kao poslovna portfolio analiza. Termin „interpretacija portfolija" se uobičajeno koristi u domenu strategijskog menadžmenta da opiše dvofaznu aktivnost:

1. analiza razloga i uticaja koji su rezultirali u tačnim organizacionim pozicijama u matrici i
2. formulacija radnji ili koraka koje treba preduzeti da se poboljša položaj stvarne organizacije i da se dostignu korporativni ciljevi.

Može se posmatrati kao ozbiljna studija o tome šta su uradili i šta su i dalje spremni da urade za organizaciju da bi se postigao željeni uspeh. Portfolio analiza preporučuje strategiju za svaku poslovnu jedinicu na osnovu svog položaja u kompanijskom ukupnom portfoliju prema poznatim i prihvaćenim pravilima.

Ovo može dovesti do preporuka različitih strategija za poslovne jedinice stavljene veoma blisko jedna drugoj ali na suprotnim stranama ograničene u matrici, što je prvi nedostatak portfolio analize. Takođe, portfolio analize ukazuju na izbor iste strategije za sve poslovne jedinice smeštene u istom kvadrantu, nezavisno od tačne pozicije u matrici. Jedan od legitimnih nedostataka za rast-udeo matricu je izražen na sledeći način: „četiri ćelije matrica na osnovu visoko-niskih klasifikacija prikriva činjenicu da su mnoge kompanije na tržištu sa prosečnom stopom rasta i imaju relativno tržišno učešće koje nije ni visoko ni nisko, već između ili srednje". Domen strategijskog menadžmenta je već prepoznatljivo kao polje pogodno za primenu teorije fazi skupova, prvenstveno, za faziranje glavnog koncepta strategijskog menadžmenta koji pripadaju polju nesigurnosti i neodređenosti. Imajući ovo u vidu, uključeno fazi rezonovanje u portfolio analizi pokušava da napravi kvalitativni pomak u menadžerskim sposobnostima u strategijskom odlučivanju. U tumačenju portfolio matrica, oslonili smo se na „skupove kao tačke" koji ukazuju na zastupljenost fazi skupova u n-dimenzionalnim jedinicama kocke, koju je predložio Kosko. ([21])

5.1 Primena fazi logike u portfolio analizi strategijskog menadžmenta

Jedna metodologija je razvijena da pomogne u strategiji evaluacije i izbora procesa koji je poznat kao poslovna portfolio analiza. Među raznim pristupima ove vrste, najpopularniji je rast-udeo matrica. Vizuelno prikazivanje organizacije poslovnog portfolija, razvijena je mreža od četiri kvadranta, kao na Slici 1.21. Horizontalna osa na Slici 1.21. pokazuje tržišno učešće poslovanja u odnosu na svog glavnog konkurenta i karakteriše snagu organizacije u tom poslu. Vertikalna osa pokazuje procenat rasta na tržištu u tekućoj godini i karakteriše atraktivnost tržišta za poslovnu jedinicu. Prema njihovom položaju u matrici, poslovne jedinice identifikovane u korporaciji nazivaju se „zvezde", „krava muzara", „problematična deca" ili „psi". Četiri glavna strateška izbora identifikovana za poslovne jedinice rast-udeo matrice su:

1. liderstvo

2. strategija rasta
3. strategija oslobađanja
4. strategija oslobađanja i likvidacije.

Ovde su ove četiri alternativne strategije ukratko sumirane.

Liderska strategija:

Glavni strateški problem za lidera se vrti oko toga kako da održi vodeći položaj, možda i da postane dominantni lider za razliku od ostalih lidera. Tri kontrastna strateška položaja su otvorena za industrijske lidere i dominantne firme:

1. ostati na ofanzivnoj strategiji, kada lideri pokušavaju da budu „prvi pokretači” da se izgradi održiva konkurentska prednost i solidna reputacija kao lider
2. utvrditi i braniti strategijski cilj koji je da zadrži sadašnje tržišno učešće, jačanje trenutnog položaja na tržištu i zaštiti bilo koju konkurentnu prednost koju firma ima
3. prati strategiju lidera sa ciljem da će obeshrabreni biti izazivači i da će sve cene opadati, suprotstavljajući se sa velikim razmerama promotivne kampanje kada izazivači čine preteće poteze da dobiju udeo na tržištu i ponude bolji dogovor glavnim klijentima „disidentskih” firmi.

Strategija rasta:

Ulazak preduzeća na tržište nastaju iz organizacionog znanja i znanja preduzetnika. Znanje je osnova za odlučivanje o najboljem mestu na kome možemo tražiti šanse za rast preduzeća. Svaki preduzetnik i preduzeće poseduju znanje o proizvodu koji trenutno proizvode i znanje o grupi kupaca kojima prodaju proizvod. Različite kombinacije nivoa ovih znanja o proizvodu i tržištu predstavljaju model različitih strategija rasta.

Strategija oslobađanja:

Ove strategije su za slaba preduzeća. Najčešća je „žetvena” strategija, koja upravlja srednjim kursom između očuvanja kvo statusa i izlaska što pre iz posla . Kod „žetvene” strategije firma može postepeno da podigne cene i iseče promotivne troškove, smanji kvalitet u ne tako vidljivim načinima, smanji održavanje opreme i slično.

Strategija oslobađanja i likvidacija:

Kada posebna linija poslovanja gubi svoju privlačnost, najatraktivnije rešenje obično je da ga proda. Normalno, što bi preduzeća trebala da se odreknu tako brzo kao što je praktično, osim ako je potrebno vreme da ih u boljem stanju proda. Od svih strateških alternativa, likvidacija je većini neprijatna i bolna, ali ipak bolje rešenje nego stečaj.

Primena različitih alternativnih strategija zavisi od pozicija poslovnih jedinica u portfolio kvadrantima, tj. različite strategije se nastavljaju ako oba indikatora, tj. relativni udeo na tržištu i rast tržišnih stopa je visok, ili ako su oba pokazatelja niska ili ako je jedan pokazatelj visok, a drugi je nizak. Shodno tome, „zvezde” treba da teže liderskoj strategiji i da zadrže visoku stopu rasta tržišta i visok udeo na tržištu. „Krava muzara” su one poslovne jedinice koje čine najveći profit i proizvedu dodatni novac koji se može koristiti za održavanje položaja „zvezda” ili poboljšanje posla u „problematičnoj deci” poslovnih jedinica u korporativnom ukupnom portfoliju. „Problematična deca” su one poslovne jedinice koje još uvek imaju potencijal za povećanje relativnog tržišnog udela, ali mora da bude neka dodatna gotovina, slobodna za neophodne investicije. Ona se obično uzimaju iz „krave muzare”. Poslovne jedinice karakterizovane kao „psi” su one manje profitabilne i najbolje strategijsko rešenje za njih je da se oslobodi ili likvidira, pa bi tako zarađen novac mogao biti usmeren na više izvodljive i poslovne jedinice pozicionirane u drugim kvadrantima u korporativnoj portfolio matrici.

Linije koje dele rast-udeo matricu na četiri kvadranta su donekle proizvoljni skupovi. Visoka stopa rasta se uzima preko 10%. Demarkacija između visokog i niskog relativnog tržišnog udela podešena je na 1.5. Takve demarkacije nas podsećaju na paradoks od gomile peska: ako od jedne gomile peska oduzmemo jedno zrno peska, tada to što ostaje, još uvek sa pravom se može smatrati gomilom peska, jer u suštini oduzimanje jednog jedinog zrna peska ne menja se gomila. Ako je u dve grupe zrna peska odstupanje među zrnima samo jedno, tada su obe ili ni jedna gomile. Ova na privid potpuno neškodljiva i u svemu neprotivurečna pretpostavka dovodi do paradoksa, da je bilo koja ukupnost gomila, čak i ona koja se sastoji od jednog zrna. Ključni pojam u ovom slučaju je malo „nejasan", drugačije rečeno nema jasne granice; takva reč je „gomila". Što se tiče izjava o fizičkim procesima, dolazimo do stepene istine. Slično tome, ne možemo reći da je 10% visok rast stope, dok je 9,9% je nizak rast stope.

Glavna prepreka sa upotrebom rast-udeo matrice je u određivanju tržišnog udela u složenim industrijama. Zbog toga, moramo zameniti tačan numerički indikator subjektivnim približavanjem, odnosno fazi vrednošću.

Ovde se opisuje proces tumačenja portfolio matrice pomoću teorije fazi skupova kroz sledeće korake:

1. Zastupanje, u obliku pravila proizvodnje, zavisnosti između vrednosti ulaznih i izlaznih promenljivih. Ulazne promenljive su osnovni parametri koji određuju položaj poslovne jedinice u portfolio matrici. U slučaju rast-udeo matrici, ovi parametri su tržišna stopa rasta i relativni udeo na tržištu. Izlazna promenljiva je izbor preporučene strategije.

2. Određivanje lingvističkih termina koji predstavljaju vrednosti ulaznih promenljivih (na primer nizak, srednji, visok, itd.) i određivanje odgovarajućih funkcija pripadnosti za svaki od njih.

3. Formulisanje „baze pravila" ili banke fazi udruženja dovoljni su za rešavanje strategije odabira problema putem analize portfolija.

4. Izračunavanje, kroz paralelno aktiviranje svih pravila, nivoi adekvatnosti za generičke strategije treba da se nastave.

5.1.1 Izražavanje zavisnosti

Izbor strategije pomoću portfolio matrice se zasniva na dva osnovna parametra koji određuju položaj poslovne jedinice u matrici. Za svaki kvadrant u matrici postoje definisani strateški izbori (S_i, i$\in \{1,2,3,4\}$) poslovnih jedinica koji treba da nastave kao najadekvatniji. Za rast-udeo matrice ovaj domen znanja može se izraziti u obliku pravila kao što su:

1. Ako je stopa rasta tržišta visoka i relativna, tržišni udeo je visok, onda je najadekvatniji izbor strategije liderstvo (S_1);

2. Ako je stopa rasta tržišta niska i relativna, tržišni udeo je nizak, onda su najadekvatniji izbori strategija promene vlasništva i strategija likvidacije (S_2);

3. Ako je stopa rasta tržišta visoka i relativna, tržišni udeo je nizak, onda je najadekvatniji izbor strategije, strategija oslobađanja (S_3);

4. Ako je stopa rasta tržišta niska i relativna, tržišni udeo je visok, onda je najadekvatniji izbor strategije, strategija rasta (S_4).

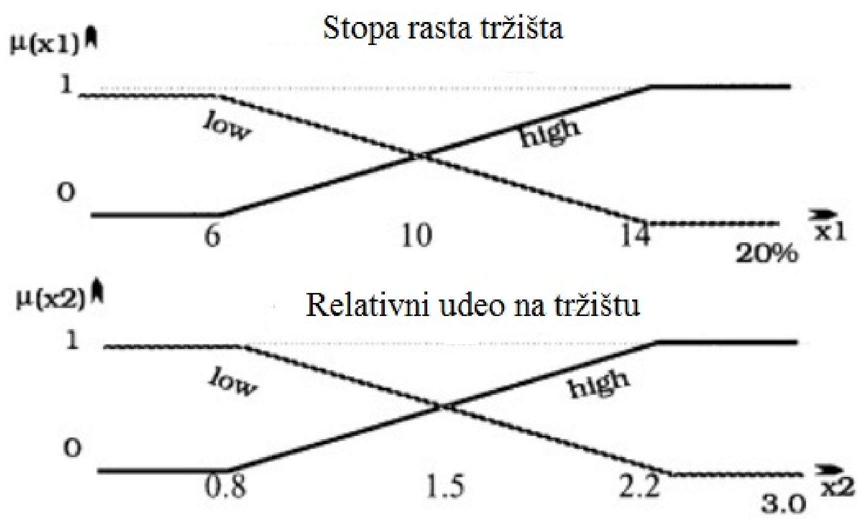
Da izbor strategije za svaku poslovnu jedinicu na osnovu njenog položaja u kompanijskom ukupnom portfoliju prema poznatim i prihvaćenim pravilima, može dovesti do različitih preporuka za poslovne jedinice postavljene vrlo blizu jedan drugoj, na suprotnim stranama graničnika. Da bi se prevazišla takva netačnosti, mi možemo uključiti fazi logiku u interpretaciju portfolija. Svaka poslovna jedinica može da se tretira kao fazi skup O_i sa funkcijama pripadnosti $\mu_{O_i}(x_1)$ i $\mu_{O_i}(x_2)$. Fazi funkcija pripadnosti $\mu_{O_i}(x_k)$ dodeljuje realan broj između 0 i 1 na svaki parametar x_k. Ovaj broj $\mu_{O_i}(x_k)$ ukazuje na stepen do kojeg karakteristika x_k predstavlja „fazi skup" (poslovna jedinica) O_i. ([21])

5.1.2 Fazi funkcija pripadnosti

Fazi funkcije pripadnosti mogu imati različite oblike u zavisnosti od dizajnera preferencija ili iskustva. Naime, u saradnji sa dva eksperta domena, prvo donje i gornje granice od najverovatnije vrednosti za relevantne parametre za portfolio matrica su postavljeni. Parametri relevantni za rast-udeo matricu su stopa rasta tržišta (MGR, ili ulazna promenljiva x_1) sa mogućim vrednostima iz skupa R^+, ali su najčešće vrednosti one manje od 20%, i u odnosu na tržišno učešće (RMS ili ulazna promenljiva x_2) koja uzima vrednosti najčešće iz intervala 1.2 - 3.0.

Vrednosti MGR i RMS koje su postavljene kao graničnici različitih kvadranata u portfolio matrici su 10% i 1.5, respektivno. MGR ispod 10 se smatra, u strategijskom menadžmentu, kao niska i vrednosti iznad 10 kao visoka vrednost. Slično tome, RMS vrednosti manje od 1.5, su niske dok su vrednosti veće od 1.5 visoke. Prema ranije pomenutom paradoksu, tokom procesa sticanja znanja, stručnjaci su se složili da od 6% do 20% vrednosti od MGR se mogu smatrati više ili manje „visoke", odnosno stepen pripadnosti se povećava od 0 do 1.

Funkcija pripadnosti za „niske" vrednosti fazi promenljive se smanjuje od 1 u slučaju kada je MGR manje ili jednako 6%, na 0 za MGR vrednosti 14% ili više. Grafik funkcije pripadnosti u fazi skupovima je „visoko" i „nisko" identifikovan za RMS promenljive i koristiti dve vrednosti prelomne tačke (0.8 i 2.2) koje su postavljene u konsultaciji sa stručnjacima domena. Shodno tome, oblici funkcija pripadnosti su određeni prema mišljenju stručnjaka i dogovoru o predloženim oblicima prikazanim na Slici 5.1.



Slika 5.1 [21] Funkcije pripadnosti koje se koriste u rast-udeo portfolio matrica

5.1.3 Fazi „pravila baze"

Pravila izražavaju znanje domena potrebno za uspešnu selekciju strategije, navedene u podnaslovu 5.1.1, koja se može preformulisati kao formalni prethodno dosledni parovi ili AKO-ONDA izjave. Za rast-udeo matrice pravila proizvodnje su sledeće:

AKO je MGR visok i RMS je visok ONDA je STRATEGIJA = S_1
AKO je MGR nizak i RMS je visok ONDA je STRATEGIJA = S_4
AKO je MGR nizak i RMS je nizak ONDA je STRATEGIJA = S_2
AKO je MGR visok i RMS je nizak ONDA je STRATEGIJA = S_3.

5.1.4 Obračun i analiza fit vrednosti

Postupak zaključka aktivira paralelno sa tim prethodna sva pravila. Pretpostavimo da rast stope tržišta za poslovnu jedinicu A iznosi 12% i relativni tržišni udeo iznosi 1.7. Neka odgovarajuća vrednost za poslovnu jedinicu B iznosi 8% i 1.3, kao što je prikazano na Slici 5.1. Par ulaznih podataka (12, 1.7) prvo aktivira pravilo (visoko, visoko; S_1). Od fazi skupa funkcija pripadnosti prikazana na Slici 5.1 može se videti $\mu_{visoko}^{MGR}(12) = 0.75$ i $\mu_{visoko}^{RMS}(1.7) = 0.642857$.

Prvo, mi kombinujemo prethodne pogodne vrednosti sa min operatorom, jer su raniji fazi skupovi kombinovani sa veznikom I. Ove vrednosti su uzete kao mera svrsishodnosti strategije S_1 za poslovnu jedinicu A. Ako nastavimo proračune, videćemo da su druge strategije manje prikladne za istu poslovnu jedinicu (S_2 - min (0.25, 0.357143) = 0.25; S_3 - min (0.75,0.357143) = 0.357143; S_4 - min (0.25, 0.642857) = 0.25). Primena drugih operatora (T_P, T_λ^{SW}, T_k^H) dovodi do istog zaključka. Za poslovne jedinice C-F, odgovarajuće mere ispravnosti četiri strategije prikazane su u Tabelama 5.1 i 5.2. Tačne vrednosti relevantnih parametarai za te poslovne jedinice su: C(12, 2.7), D(18, 2.7), E(10, 1.5), F(18, 1.7).

Originalna portfolio analiza, bez uključivanja fazi skupova predlaže za poslovne jedinice A, C, D i F isti izbor strategije-liderstvo. Tumačenje istog portfolija na bazi nejasnoća preporučuje lidersku strategiju nekog stepena adekvatnosti i na taj način pravi razliku njihovog položaja u matrici, ističući mogućnost ostvarivanja „susednog" izbora strategija. Izbor strategije koji je najadekvatniji za neku poslovnu jedinicu je da ima najveću vrednost bez obzira koji operator koristi u obračunu. Ovo zapažanje je najočiglednije u vrednosti λ u Sugeno porodici t-norme koji je veći od 10, i za vrednosti parametra k u Hamacherovoj t-normi koji nije veći od 10^3. Da bi se postigle slične vrednosti kao i za min operator, u Sugeno porodici t-norme vrednost od λ treba da bude veća od 10^3 i za Hamacherovu porodicu T_k^H, k ne bi trebalo da prelazi vrednost od 5. T_P-norma daje gotovo jednake rezultate kao i min operator (i tačno iste rezultate kao T_λ^{SW} kada λ = 1).

Adekvatnost strategija za šest poslovnih jedinica - koristeći min operator

min(x, y)	A	B	C	D	E	F
S1	0.642857	0.25	0.75	1	0.5	0.642857
S2	0.25	0.642857	0	0	0.5	0
S3	0.357143	0.25	0	0	0.5	0.357146
S4	0.25	0.357143	0.25	0	0.5	0

Adekvatnost strategija za šest poslovnih jedinica - koristeći Tp operatora

$T_P = T_\lambda^{SW} = T_k^H$, $\lambda = k = 1$	A	B	C	D	E	F
S1	0.482143	0.089286	0.75	1	0.25	0.642857
S2	0.089286	0.482143	0	0	0.25	0
S3	0.267857	0.160714	0	0	0.25	0.357143
S4	0.160714	0.267857	0.25	0	0.25	0

Tabela 5.1 [21] Adekvatnost strategija za šest poslovnih jedinica (min i T_p)

Adekvatnost strategija za šest poslovnih jedinica - koristeći T_λ^{SW}

	A	B	C	D	E	F
T_λ^{SW}, $\lambda = 5$						
S1	0.467262	0.008929	0.75	1	0.208333	0.642857
S2	0.008929	0.467262	0	0	0.208333	0
S3	0.241071	0.116071	0	0	0.208333	0.357143
S4	0.116071	0.241071	0.25	0	0.208333	0
T_λ^{SW}, $\lambda = 1000$						
S1	0.482054	0.088804	0.75	1	0.24975	0.642857
S2	0.088804	0.482054	0	0	0.24975	0
S3	0.267697	0.160447	0	0	0.24975	0.357143
S4	0.160447	0.267697	0.25	0	0.24975	0

Adekvatnost strategija za šest poslovnih jedinica - koristeći T_k^{H}

	A	B	C	D	E	F
T_k^{H}, $\kappa = 0$						
S1	0.355263	0.030488	0.75	1	0.125	0.642857
S2	0.030488	0.355263	0	0	0.125	0
S3	0.163043	0.077586	0	0	0.125	0.357143
S4	0.077586	0.163043	0.25	0	0.125	0
T_k^{H}, $\kappa = 1000$						
S1	0.005345	0.000185	0.75	1	0.000997	0.642857
S2	0.000185	0.005345	0	0	0.000997	0
S3	0.001658	0.000598	0	0	0.000997	0.357143
S4	0.000598	0.001658	0.25	0	0.000997	0

Tabela 5.2 [21] Adekvatnost strategija za šest poslovnih jedinica (T_λ^{SW} i T_k^{H})

5.2 Neke druge poslovne portfolio matrice

Ista situacija nastaje kada se koristi industrijska atraktivnost-poslovna snaga matrica (Tabela 5.3) ili matrica životnog ciklusa (Tabela 5.4) za strategije evaluacije i selekcije. Industrijska atraktivnost, prednost poslovnih jedinica, industrijska zrelost i konkurentska pozicija, promenljive stavljene na osama portfolio matrica (označene kao promenljive x_3, x_4, x_5 i x_6 respektivno), su izražene fazi vrednostima kao što su visoka, srednja, niska, dominantna, jaka, slaba, itd. Strategije koje se traže u poslovnoj jedinici zavise od njene pozicije u kvadrantima portfolio matrice.

Vrednosti fazi skupa parametara relevantnih za matrice su sledeći:

1. industrijska atraktivnost (IA) - visok, srednji ili nizak,
2. jačina poslovne jedinice (BUS) - visok, srednji ili nizak,
3. industrijska zrelost (IM) - embrionski, rast, zreo, starenje,
4. konkurentska pozicija (CP) - dominantan, jak, povoljan, održiv, slab.

Upotreba industrijske atraktivnosti-poslovna snaga matrice prvo zahteva identifikovanje i procenu oba kritično spoljašnja faktora i kritično unutrašnje faktore organizacije. Nakon identifikovanja i procene ovih faktora, glavni menadžment pravi kvalitativnu odluku o tome da li industrija ima nisku, srednju ili visoku atraktivnost i snagu poslovne jedinice.

Međutim, uprkos činjenici da su relevantne promenljive za portfolio matrice kontinuirane u prirodi, one se teško mogu izraziti kao jasne vrednosti, već kao subjektivne procene koje su nejasne i sklone fazifikaciji. Za određivanje fazi funkcije pripadnosti, kvalitativne procene moraju biti kvantifikovane. Može se uraditi spajanjem tačne vrednosti ili neke oznake ili tačke na fiksnoj skali ili intervalu u svakom kriterijumu, a zatim sumirajući poene.

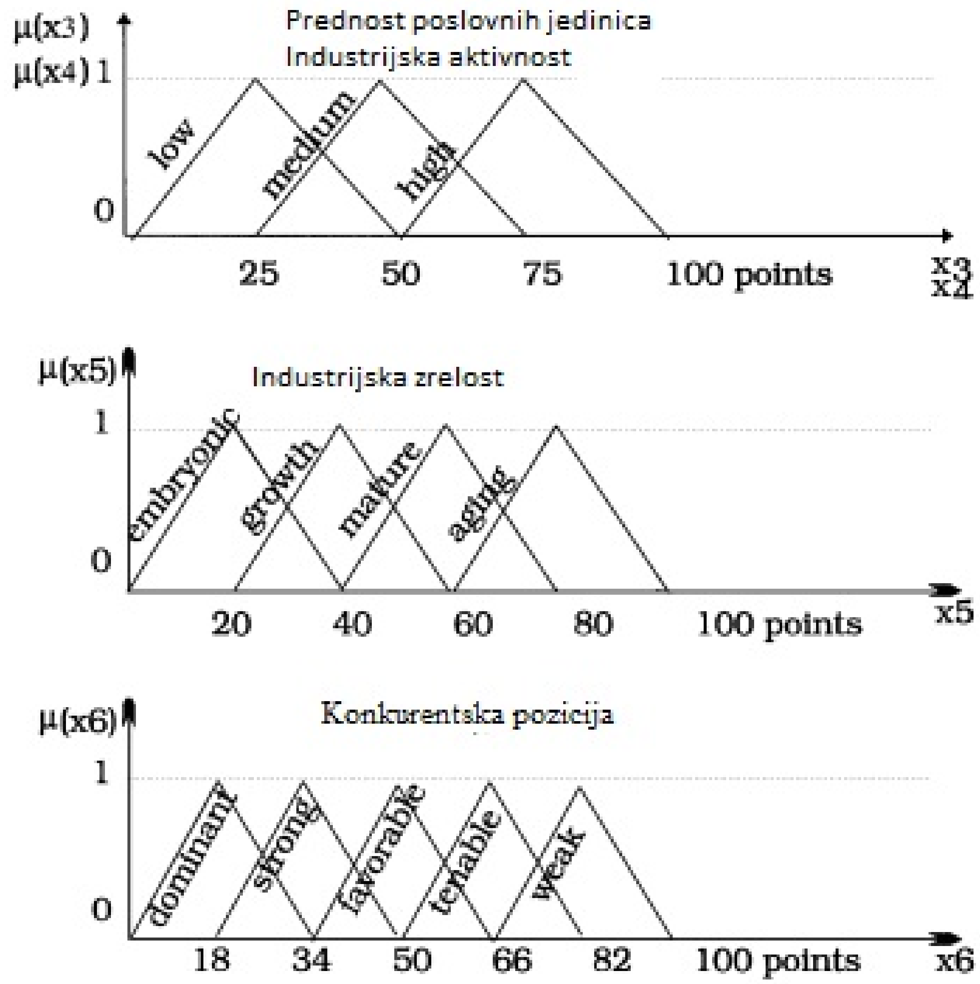
U našem primeru, pretpostavlja se da maksimalan rezultat može biti 100 bodova. Slika 5.2 prikazuje grafik funkcije pripadnosti fazi skupova identifikovan postavljanjem za promenljive u portfolio matricama. Oblici funkcija pripadnosti se utvrđuju prema mišljenju stručnjaka da su predloženi trougaoni oblici zadovoljavajući i smisleni, i karakteristične koordinatne vrednosti su dobro izabrane. Istovremeno, suma vrednosti pripadanja je jednaka 1.

SNAGA POSLOVNE JEDINICE \ Industrijska aktivnost	VISOKO	SREDNJE	NISKO
VISOKO	RAST	RAST	SELEKTIVNA INVESTICIJA
SREDNJE	RAST	SELEKTIVNA INVESTICIJA	PRIHOD ILI RASHOD
NISKO	SELEKTIVNA INVESTICIJA	PRIHOD ILI RASHOD	PRIHOD, RASHOD ILI LIKVIDIRANJE

Tabela 5.3 Industrijska aktivnost - poslovna prednost matrica

Konkurentska pozicija \ Industrijska zrelost	embrionski	rast	zrelost	starenje	
					dominantnost
					snaga
					pogodnost
					održiv
					slab

Tabela 5.4 [21] Matrica životnog ciklusa



Slika 5.2 [21] Funkcije pripadnosti koje se koriste u portfolio matricama

Slično, kao i za rast-udeo matricu, pravila proizvodnje mogu da se fomulišu za druge portfolije. Za industrijsku atraktivnost- poslovnu snagu matrica biće devet pravila, dok će za matrice životnog ciklusa biti 20 pravila. Drugi pristup problemu izbora strategije treba da budu fazifikovane ne samo ulazne promenljive, ali i izlazna promenljiva, preporučuje se strategija ili strateški miks, koji ima diskretne vrednosti.

6 Izbor portfolija koristeći teoriju fazi odlučivanja

6.1 Teorija fazi odlučivanja

Mnogi problemi u procesu odlučivanja u stvarnom svetu se održavaju u okviru gde ciljevi I/ILI su ograničenja neprecizno definisana. Izvor nepreciznosti u takvim problemima jeste odsustvo definisanih kriterijuma klase pripadnosti, a ne prisustvo slučajnih promenljivih. Da bi se kvantitativno bavili nepreciznošću, pojam fazi skupova je uveo Zadeh (1965). Ovaj deo predstavlja koncept fazi skupova, fazi ciljeva i fazi odluke i formuliše fazi multi-kriterijum optimizacije portfolija.

6.2 Fazi multi-kriterijum optimizacije

U svakom okviru odlučivanja, termin optimizacije je povezan sa procesom izbora određenog skupa akcija iz klase mogućih akcija koje su unapred određene korisnošću ili je funkcijom prioriteta donosioca odluka maksimalna. Rešenje ovog problema uključuje naređene skalarne vrednosti koje proističu iz mapiranja skupa mogućih akcija pomoću funkcije korisnosti, i izbor onog koji maksimizira korisnost donosioca odluka. Međutim, jedan broj prilika donosioca odluke možda neće moći oštro da definiše funkciju korisnosti. Takav problem nastaje posebno kada donosioc odluke ima više korisnosti ili ciljeva da maksimizira. Pod pretpostavkom da funkcija korisnosti nije oštro definisana, nije jasno kako skup mogućih akcija može biti mapiran tako da pronađe određeni odnos za skup alternativa. U takvim slučajevima, fazi teorija odluka daje okvir da pronađe određeni odnos za skup mogućih akcija korišćenja fazi funkcija pripadnosti tako da karakteriše stepen zadovoljstva donosioca odluka. Takva funkcija pripadnosti može se tumačiti kao fazi korisnost donosioca odluka (Mathieu - Nicot(1990)).

Osim toga, više ciljeva je jednostavno za rukovanje u tom okviru, jer pronalaženje optimalnog rešenje za takav problem uključuje samo izračunavanje preseka fazi skupova i izbor stanja koji povećavaju fazi funkciju pripadnosti. Opisaćemo multi-cilj linearnog programiranja problema formulacija u kojoj se uzimaju u obzir objektivne funkcije da budu fazi. Transformacija fazi ciljeva pomoću odgovarajuće funkcije pripadnosti u cilju karakterizacije stepena zadovoljstva donosioca odluka u vezi sa datim ciljem se takođe, može opisati.

Generalno, bilo koji problem optimizacije u kojima funkcija cilja i ograničenja u prostoru promenljivih odlučivanja su linearna i kaže se da je to problem linearnog programiranja. Pored toga, ukoliko postoje višestruki ciljevi, onda će se problem optimizacije zvati multi-cilj problema linearnog programiranja. Takav problem optimizacije se može karakterisati:

Maksimiziramo

$$f_k(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{N} c_{ik} x_i,\ k = 1, 2, \ldots, M$$

tako da

$$b_j^{min} \leq \sum_{i=1}^{N} a_{ij} x_i \leq b_j^{max},\ j = 1, 2, \ldots, P.$$

U kontekstu odlučivanja u fazi okruženju, moguće je nekoliko promena na gore u formulaciji problema optimizacije. Na primer, donosioci odluke ne mogu stvarno biti zainteresovani u maksimiziranu ciljnu funkciju u strogom smislu. Umesto toga, donosilac odluka samo može biti zainteresovan u postizanju određenog nivoa težnje za različite ciljne funkcije. Ako, na primer, jedan od ciljnih funkcija predstavlja neto dobit od firme, donosilac odluka može biti zainteresovan za postizanje „dobrog" profita iznad određenog minimalnog nivoa. Druga moguća modifikacija klasičnog problema linearnog programiranja je da se razmotre ograničenja kao meka ograničenja, tako da će možda želeti da prilože različite stepene važnosti za kršenja raznih ograničenja.

Ovde ćemo razmotriti slučaj gde donosilac odluke ima višestruke ciljeve od kojih je svaki formulisan tako da postigne određene ciljeve koji nisu oštro definisani. Da bi se rešili problemi ove prirode, svaki od ciljeva mora biti transformisan korišćenjem funkcija pripadnosti tako da okarakteriše stepen zadovoljstva donosioca odluka u vezi sa posebnim ciljem. Postoji mnogo mogućih izbora za takve funkcije pripadnosti u zavisnosti od prirode cilja donosioca odluke.

Razmotrićemo linearne funkcije pripadnosti koje su odgovarajuće za transformaciju ciljeva izražene u formi „funkcija cilja bila bi znatno veća od date vrednosti". Takve linearne funkcije pripadnosti će takođe da očuvaju linearnost originalnog problema i problema dobijene optimizacije koji se mogu rešiti korišćenjem linearne metode programiranja. Štaviše, kada se crtaju poređenja sa funkcijama korisnosti, linearna funkcija pripadnosti može da se tumači kao fazi korisnost rizik-neutralnog investitora. Po izboru funkcija pripadnosti koji je ili konkavan ili konveksan, jedan od modela je fazi korisnost rizik-averznog ili rizika-tražnje investitora, respektivno.

Razmotrimo sada slučaj donosioca odluka koji ima fazi cilj kao što su „funkcija cilja f_k(x) bi trebalo da bude mnogo veća nego p_k^{min} ". Dalje, pretpostavimo da stepen zadovoljstva donosioca odluka u vezi sa ostvarivanjem cilja se ne menja iznad nivoa p_k^{max}. Tada odgovarajuća linearna funkcija pripadnosti karakteriše fazi cilj donosioca odluka na sledeći način:

$$\mu_k(f_k(x)) = \begin{cases} 0; & \mathrm{f}_k(x) \le p_k^{min} \\ \frac{f_k(x)-p_k^{min}}{p_k^{max}-p_k^{min}}; & \mathrm{p}_k^{min} < f_k(x) \le p_k^{max} \\ 1; & \mathrm{f}_k(x) > p_k^{max} \end{cases} \tag{6.1}$$

S obzirom na funkcije pripadnosti za različite ciljeve donosioca odluka, maksimiziranje odluka može da se izračuna rešavanjem sledećeg problema optimizacije:

Maksimiziramo

$$\min_{k=1,2,\ldots,M} \mu_k(f_k(\mathrm{x}))$$

$$b_j^{min} \le \textstyle\sum_{i=1}^{N} a_{ij} x_i \le b_j^{max},\ j = 1, 2, \ldots, P.$$

Uvodeći pomoćnu promenljivu λ, gornji optimizacioni problem može da se smanji sledećim uobičajenim problemom linearnog programiranja:

Maksimiziramo λ

$$\mu_k(f_k(\mathrm{x})) \ge \lambda\ ,\ k = 1, 2, \ldots, M$$

$$b_j^{min} \le \sum_{i=1}^{N} a_{ij} x_i \le b_j^{max},\ j = 1, 2, \ldots, P.$$

U sledećem odeljku će biti opisano kako fazi teorija odluka može da se koristi da struktuira portfolije koji zadovoljavaju više ciljeva investitora koji proizilaze iz nesigurnosti urođene kvantifikacije budućih tržišnih poteza. Posebno ćemo predstaviti problem optimalnog odabira portfolija sa klase aktive koja se sastoji od obveznice i obične opcije na njih kao multi-cilj problema optimizacije. Svaki od ciljnih funkcija u ovom problemu će odgovarati partikularnoj funkciji pripadnosti fazi skupa koji je dat krivom prinosa scenarija.

6.3 Struktuiran portfolio

U efikasnom tržištu, investitori koji poseduju rizičan portfolio su u proseku nadoknađeni sa povraćajem iznad bezrizične stope. Međutim, tokom kratkog perioda na srednjoročnom horizontu (obično manje od par godina), ne postoji garancija koja drži rizičan portfolio aktive i koja će proizvoditi povraćaj iznad bezrizične stope. Investitori koji imaju obaveze za izmirivanje u kratkom roku (pretpostavlja se da će ovde biti iznad bezrizične stope) su obično zainteresovani za struktuiranje svog rizičnog portfolija aktive tako da loša strana rizika za održavanja portfolija je relativno mala u nepovoljnim tržišnim uslovima. Dalje, pod povoljnijim tržišnim uslovima investitor želi da povratni cilj bude više od obaveze. Jasno, sa pogleda portfolija aktive, potrebno je definisati šta karakteriše takve negativne i pozitivne tržišne uslove. U kontekstu optimalnog portfolija odgovarajućeg problema interesa, takvi negativni i povoljni uslovi na tržištu će dovesti do višestrukih ciljeva. U ovom delu, ilustrovaćemo kako se višestruki scenario portfolio problema optimizacija može formulisati tako da rezultujući struktuirani portfolio zadovoljava višestruke ciljeve investitora.

Razmotrićemo slučaj menadžera u fondu koji treba da izabere strukturiran portfolio investicija iz univerzuma N sredstava sa X_i^{min} i X_i^{max} biti minimalna i maksimalna težina sredstva i-tog u portfolija. Da bi izabrali strukturiran portfolio, menadžer fonda može ispitati potencijalne scenarije M tržišta, kao i za svaki od ovih scenarija on/ ona možda želi da maksimizira prinos portfolija. Da bi se postigao cilj, menadžer fonda može da formuliše sledeći problem optimizacije:

Maksimiziramo

$$R_k(x) = \sum_{i=1}^{N} r_{ik} x_i,\ k = 1, 2, \dots, M \tag{6.2}$$

za

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

$$X_i^{min} \leq X_i \leq X_i^{max}, i = 1, 2, \dots, N$$

U jednačini (6.2), r_{ik} označava prinos i-tog sredstva za k-ti tržišni scenario na kraju investicionog perioda i $R_k(x)$ prinos portfolija za k-ti scenario. Pošto iznad problema optimizacije ima više objektivnih funkcija, mora da se izračuna Pareto optimalno rešenje za problem. Na primer, može se okarakterisati skup Pareto optimalnih rešenja korišćenjem ponderisane min i max metode i izaberimo jedno rešenje iz ovog skupa. Skup Pareto optimalnih rešenja za problem optimizacije definisan iznad karakteriše:

Maksimizirano λ

$$w_k R_k(x) \geq \lambda, k = 1, 2, \dots, M \tag{6.3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

$$X_i^{min} \leq X_i \leq X_i^{max}, i = 1, 2, \dots, N$$

U gornjoj relaciji, λ je pomoćna promenljiva i w_k > 0, k = 1, 2, ..., M, bilo koje proizvoljno odabrane težine. S obzirom na bilo koji odgovarajući težinski vektor, može se odrediti Pareto optimalno rešenje. Pretpostavljamo bez gubitka opštosti da $R_k(x)$ > 0, $X_i^{min} \leq X_i \leq X_i^{max}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Ako to nije slučaj, objektivne funkcije mogu se napisati kao

$$\hat{R}_k(x) = R_k(x) - C, k = 1, 2, \ldots, M$$

gde je C pogodna konstanta koja osigurava $\hat{R}_k(x) > 0\ \forall k$. Uvođenjem ove promene u jednačini (6.3), može se izračunati Pareto optimalno rešenje.

Problem optimizacije formulisan iznad je linearni problem programiranja i može se lako rešiti korišćenjem standardnih algoritama. Međutim, pronalaženje zadovoljavajućeg Pareto optimalnog rešenja zahteva da se definišu apriori verovatnoće različitih scenarija koji uključuju pogled na tržištu. U svetlu neizvesnosti apriori verovatnoće nisu podložni računanju, a samim tim i teško je izračunati i Pareto optimalno rešenje koje se može okarakterisati kao zadovoljavajuće. Osim toga, menadžer fonda može želeti da izgradi portfolio tako da su ciljevi različiti za svaki scenario na tržištu. Transformišući takve ciljeve u odgovarajućoj težini $w_k > 0, k = 1, 2, \ldots, M$ za različite scenarije nije jasno iz perspektive menadžera fonda.

Pojam neizvesnosti i proces odlučivanja u uslovima neizvesnosti su dugogodišnji intelektualni interesi Kejnza (Keynes[1]). U Kejnzovom mišljenju, kada investitori donose odluke pod nesavršenim znanjem da se suočavaju sa promenom preferencija funkcije. Štaviše, relevantni probabilistički predlozi i težina vezana za takve predloge i promene kao odgovor na razvoj događaja.

Na primer, razmotrimo slučaj jednog investitora strukturiranja sa fiksnim prihodom portfolija koji definiše ciljeve nejasne kao što je ciljati „dobru" stopu prinosa bez rizika za „posljednju" krivu prinosa scenarija. U ovom slučaj investitor izražava subjektivni stav da će tržište okupiti i cilja „dobar" prinos koji opisuje njegovu/ njenu omiljenu funkciju ako se ispostavi da je istina. Pošto takav cilj nije odsečno definisan, potrebno je da se reši problem selekcije portfolija u teoriji fazi odlučivanja. Drugim rečima, ovde se pretpostavlja da je motivacija za rešavanje problema optimalnog portfolija u fazi teoriji odlučivanja je nedostatak odsečno definisanih ciljeva kada je znanje investitora u razvoju događaja neizvesno. Takva pretpostavka je sasvim realna s obzirom da investitori obično imaju samo intuitivni osećaj kako će se tržište obavljati i stoga se odsečno definišu ciljevi prinosa za takve tržišne scenarije koji mogu da budu nerealni.

Razmotrićemo da je sada menadžer fonda struktuirao portfolio na osnovu M potencijalnih tržišnih scenarija. Za svaki takav scenario, menadžer fonda može imati mete za očekivani prinos tokom investicionog perioda. Mi ćemo označiti sa p_k^{min} i p_k^{max} minimalni i maksimalni očekujući prinos za k-ti tržišni scenario. Imamo na umu da je sasvim lako menadžeru fonda da pruži informacije o očekivanom ciljanog rasponu prinosa za različite scenarije, a ne da se definišu apriori verovatnoće za različite scenarije. Korišćenje linearne funkcije pripadnosti koja je data u jednačini (5.1) moguće je izračunati stepen zadovoljstva $\mu_k(R_k(x))$ za bilo koji portfolio x za k- ti tržišni scenario. S obzirom da je stepen zadovoljstva menadžera fonda za k-ti tržišni scenario $\mu_k(R_k(x))$, strukturiran portfolio može da se izračuna rešavanjem sledećeg problema optimizacije:

Maksimiziramo

$$\lambda \tag{6.4}$$

za

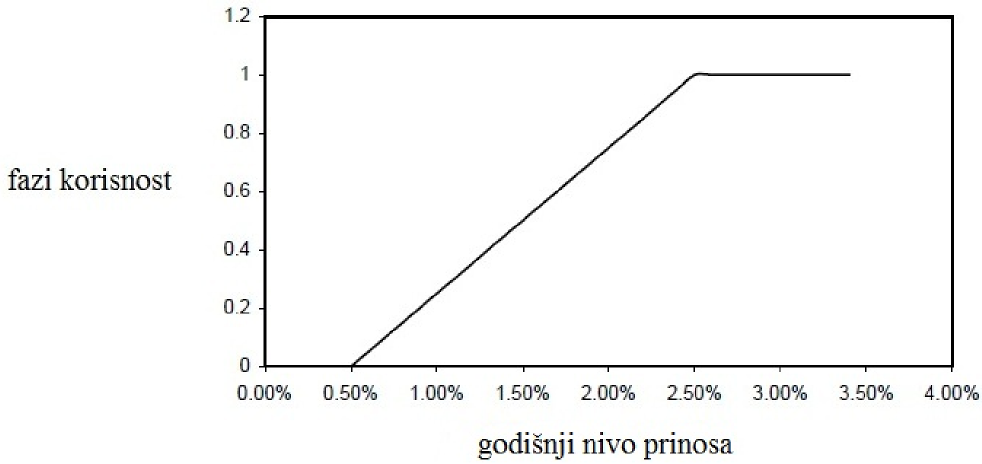
$$\mu_k(R_k(x)) \geq \lambda, k = 1, 2, \ldots, M \tag{6.5}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \tag{6.6}$$

$$X_i^{min} \leq x_i \leq X_i^{max}, i = 1, 2, \ldots, N \tag{6.7}$$

[1] John Mainard Keines, bio je britanski ekonomista čije su ideje suštinski uticale na teoriju i praksu savremenih makroekonomije i ekonomskih politika vlade. Njegove ideje su osnova za školu mišljenja poznatu kao kejnzijanska ekonomija i njenih različitih ogranaka.

Lako je pokazati da će rešenje problema iznad optimizacije (ako postoji) biti Pareto optimalno. To je opet korisno da se podsetimo da se može protumačiti funkcija pripadnosti $\mu_k(R_k(x))$ za k-ti tržišni scenario u (6.5) kao modeliranje fazi korisnosti investitora za dati scenario. U tom slučaju, strukturiran portfolio se izračunava rešavanjem problema optimizacije koji povećava fazi korisnost investitora. Za izbor funkcije pripadnosti kao u jednačini (6.1), Slika 6.1 prikazuje fazi korisnost investitora za k-ti scenario pod pretpostavkom p_k^{min} = 0,5 % i p_k^{max} = 2,5 % . Kao što je istaknuto u poglavlju 5.2, linearna funkcija pripadnosti može se tumačiti kao fazi korisnost rizik- neutralnog investitora. U sledećem odeljku ćemo razmotriti numerički primer za ilustraciju problema selekcije portfolija koristeći fazi teoriju odlučivanja.



Slika 6.1 Fazi korisnost rizik-neutralnog investitora

6.4 Numerički primer

U ovom odeljku ilustrovaćemo korišćenje fazi teorije odlučivanja da struktuira portfolio uzimajući u obzir slučaj menadžera fonda kojem je dozvoljeno da održi samo vladine obveznice i vanila[2] opcije na njima. Dalje ćemo pretpostaviti da zaduživanje na Libor[3] finansijama i poziciju obveznica, i svaka premija plaćena za opciju u datom periodu ulaganja i da ne postoji devizni rizik. Cilj menadžera fonda je da izabere strukturiran portfolio u datoj klasi sredstava koja su, prema različitim scenarijima krive prinosa, veći od datog minimuma. Za krive prinosa scenarija smatramo „pogled" menadžera fonda, portfolio je strukturiran da je ciljani prinos znatno veći nego Libor stopa prinosa.

6.4.1 Scenario krive prinosa

Kriva prinosa je odnos između kamatne stope (ili troškova kredita) i vremena do dospeća duga za datog zajmoprimca u datoj valuti. Po definiciji, ne postoji ni jedna kriva prinosa koja opisuje troškove finansiranja za sve učesnike na tržištu. Najvažniji faktor za određivanje krive prinosa je valuta na koju su denominovane hartije od vrednosti. Unutar iste valute, različite institucije uzimaju novac na zajam po različitim stopama, zavisno od svog kreditnog rejtinga. Mada su detalji metodologije konstruisanja svojstveni za svaku investicionu banke, postoji konvencija koje se pridržavaju svi kada je reč o izboru instrumenata i opštih principa konstruisanja. [12]

[2]Opcije koje odstupaju od klasičnih na bilo koji način nazivaju se egzotične opcije. Svaka opcija koja nije egzoticna takođe se zove i vanila opcija.

[3]Londonska međubankarska stopa, eng. London Interbank Offered Rate

U cilju formulisanja odgovarajućeg problema optimizacije za izbor strukturiranih portfolio obveznica, potrebno je uzeti u obzir potencijalne scenarije tržišta i njihov uticaj na portfolio. Razmotrićemo ponovo slučaj menadžera fonda koji drži portfolio sa obveznicama. U cilju zaštite od potencijalnog gubitka kapitala zbog pomeranja krive prinosa nagore, menadžer fonda može da kupi put opciju na portfolio obveznicu preko vremenskog horizonta. Međutim, premija plaćena za kupovinu ove put opcije će dovesti do gubitka ako se tržište ujedini ili ako je kriva prinosa nepromenjena na kraju investicionog horizonta. Iako u okupljaju tržišta postoji kapital apresijacije portfolija obveznica koje bi nadoknadila izgubljenu premiju na put opciju, to nije slučaj ako kriva prinosa ostaje nepromenjena. Za takav scenario na tržištu, investitor može da finansira deo ili većinu premije na put opcije od prodaje call opcije na obveznice. Jasno, ova jednostavna analiza pokazuje da bi dobro strukturiran portfolio na primer, za koji se smatra da se sastoji od održavanja portfolio obveznica i kupovinom put i prodajom call opcije na istom portfoliju u nekoj pogodnoj proporciji. Pojedinačni tegovi za različite imovine u takvom strukturiranom portfoliju mogu da se izračunaju formulisanjem odgovarajućeg problema optimizacije. U ovom odeljku ćemo ilustrovati formulisanje takvog problema optimizacije koji zadovoljava više ciljeva menadžera fonda.

To će biti pretpostavka za potrebe ilustrucije metodologije strukturnih portfolija na osnovu fazi teorije odlučivanja da menadžer fonda poseduje portfolio američkog trezora koji se sastoji od sadašnjih dve, pet i desetogodišnjih obveznica. Korišćenje trenutnog prinosa do dospeća od 13 obveznica i prinos jednogodišnjeg T- Bill- a[4] je moguće izgraditi linearno interpolovan po krive prinosa. Pod pretpostavkom da kriva prinosa ostaje konstantna tokom investicionog perioda, moguće je izračunati ukupan prinos od držanja portfolio obveznica. Ovaj povraćaj se sastoji od dva dela, jedan koji proizilazi iz spuštajuće duži krive prinosa i drugi od kamate tokom investicionog perioda. U slučaju da se kriva prinosa pomera gore ili dole, ukupni povraćaj će uključiti još jednu komponentu koja je kapitalni gubitak ili dobitak, koji je rezultat krive prinosa u pokretu. Važno je napomenuti da, za bilo koji scenario krive prinosa, moguće je izračunati cenu kupon obveznice, a time i isplatu od opcija na obveznice na dan dospeća. Jasno, ukupni povraćaj u periodu ulaganja iz portfolio obveznica i obične vanila opcije na njih može se izračunati za bilo koji dati prinos krive scenarija.

Razmotrimo sada portfolio sadašnjih dve, pet i desetogodišnjih obveznica i obične vanile opcije sa strajk cenama at the money[5] i out of the money[6] na ovim hartijama od vrednosti.

Označićemo sa x_1, x_2 i x_3 da su težine od dve, pet i desetogodišnje obveznice u portfoliju. Portfolio težine at the money put opcije smo kupili na obveznice će biti označene x_4, x_5 i x_6 , i portfolio težine out of the money kupljene put opcije će biti označene x_7, x_8 i x_9. Slično tome, neka x_{10}, x_{11} i x_{12} i označavaju portfolio težine at the money call opcije koje prodajemo na ove obveznice i x_{13}, x_{14} i x_{15} označavaju portfolio težine out of the money prodate call opcije. Za bilo koje krive prinosa na dan dospeća investicije, moguće je izračunati prinos iz svakog sredstva u portfoliju sa obveznicama koristeći krive prinosa. Mi ćemo označavati na godišnjem nivou prinosa iz i-tog sredstva u portfoliju za k-ti scenario krive prinosa kao r_{ik}. Različiti scenariji krive prinosa će biti opisan kao „optimističan", „neutralan" ili „pesimističan". Za svaki takav scenario, mi ćemo razmotriti tri potencijalne krive prinosa koje opisuju scenario; one su grafički prikazane na Slikama 6.2, 6.3 i 6.4. Za ograničenim funkcijama problema optimizacije datih u (6.5), k = 1, 2, 3 će označavaju optimistične scenarije, k = 4, 5, 6 će označavati neutralne scenarije i k = 7, 8, 9 će označavati pesimistične scenarije. Ovde smo uzeli da imamo M = 9 tržišnih scenarija.

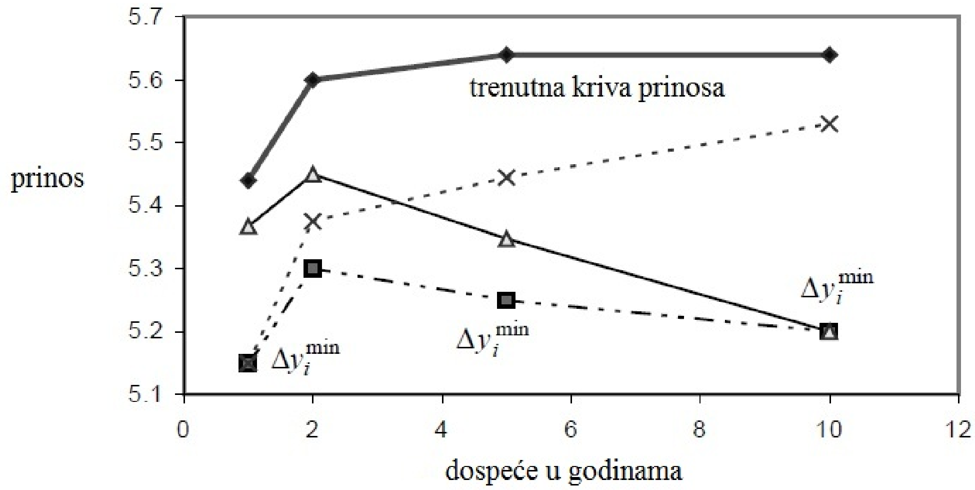
Minimalna i maksimalna kriva prinosa se pomera sa $\triangle y_i^{min}$ i $\triangle y_i^{max}$ odnosno u navede-

[4]blagajnički zapis je kratkoročna hartija od vrednosti kojom se emitent obavezuje da će licu koje poseduje tu hartiju platiti naznačenu nominalnu vrednost u roku dospeća.

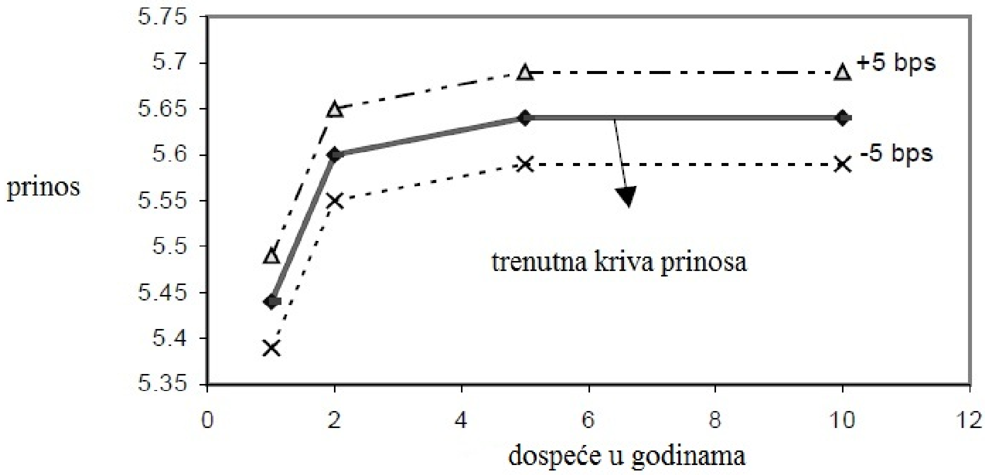
[5]eng. at the money- znači da je vaš izbor akcija vredan novca i možete se okrenuti prodaji.

[6]eng. out of the money - opcija novca nema suštinsku vrednost, ali samo poseduje spoljašnju ili vremensku vrednost. Kao rezultat toga, vrednost izlaza opcije novca narušava brzo sa vremenom, jer se približava istek. Ako i dalje novac na isteku, opcija će biti bezvredna.

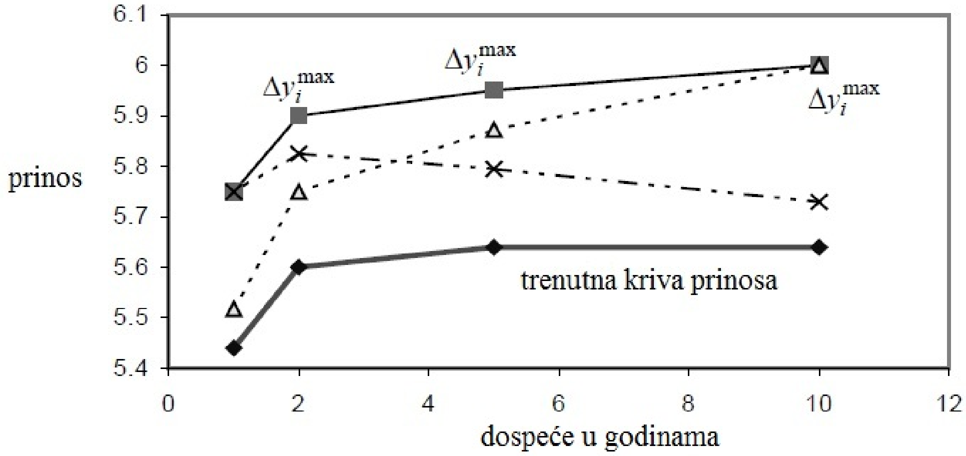
nim brojkama su izračunata stalna dospeća prinosa tokom prethodne dve godine za dati investicioni horizont. Na primer, pod pretpostavkom da je investicioni horizont mesec dana, $\triangle y_2^{max}$ se računa od konstantnog dospeća od dve godine prinosa koristeći jednomesečni talasast prozor, uz korišćenje najgorih mogućih promena apsolutnog prinosa u odnosu na prethodne dve godine. U numeričkoj studiji predstavljenoj ovde, investicioni horizont interesa pretpostavljen je da je mesec dana, a Tabela 6.1 prikazuje vrednosti koje se koriste za $\triangle y_i^{min}$ i $\triangle y_i^{max}$ u ovoj studiji.



Slika 6.2 Optimistična kriva prinosa scenarija



Slika 6.3 Neutralna kriva prinosa scenarija



Slika 6.4 Pesimistična kriva prinosa scenarija

dospeće	Δy_i^{min} **(bps)**	Δy_i^{max} **(bps)**
1- godina	-53.0	53.0
2- godina	-67.0	67.0
5- godina	-72.0	72.0
10- godina	-63.0	63.0

Tabela 6.1 Najgori slučaj promene prinosa

U numeričkoj studiji ćemo predstaviti dva pogleda na tržište, jedan smatramo „optimistični" (eng. bullish) i drugi „pesimistični" (eng. bearish) od strane menadžera fonda, kao i za svaki pogled treba naći strukturiran portfolio koji odgovara ciljevima menadžera fonda. Pretpostavlja se da za uočeno tržišno mišljenje menadžera fonda, strukturiran portfolio treba da obezbedi najmanje 200 bp godišnji višak povraćaja preko Libor-a. Dalje, za menadžera fonda pretpostavlja se da je ravnodušan prema godišnjem povraćaju koji je veći od 500 bp iznad Libor- a. Za sve ostale scenarije tržišta, pretpostavlja se da menadžer fonda očekuje da godišnji nivo viška povraćaja bude samo 100 baznih poena iznad Libor-a i ravnodušni prema povratku viška iznad 400 baznih poena više od Libor-a.

Takva pretpostavka podrazumeva da

$$p_k^{min} = R_L + 2.0 \text{ i } p_k^{max} = R_L + 5.0 \text{ za k = 1, 2, 3}$$

i

$$p_k^{min} = R_L + 1.0 \text{ i } p_k^{max} = R_L + 4.0 \text{ za k = 4,5, \ldots, 9}$$

za izračunavanje strukturiranog portfolija sa optimističnim pogledom na tržište. Za strukturisanje portfolija sa pesimističnim pogledom na tržište, funkcija pripadnosti može se izračunati postavljanjem

$$p_k^{min} = R_L +1.0 \text{ i } p_k^{max} = R_L + 4.0 \text{ za k = 1, 2, \ldots, 6}$$

i

$$p_k^{min} = R_L + 2.0 \text{ i } p_k^{max} = R_L + 5.0 \text{ za k = 7, 8, 9.}$$

R_L označava Libor stopu, koja je bila jednaka 5,60 % kada je izvršena ova studija (14. 9. 1998). Pretpostavlja se da su data ograničenja portfolia sa:

$$0 \leq x_i \leq 0.5, i = 1, 2, 3$$

$$0 \leq x_i \leq 0.5P_i, i = 4, 5, \ldots, 9 \tag{6.8}$$

$$-0.5C_i \leq x_i \leq 0, i = 10, 11, \ldots 15 \tag{6.9}$$

U gore navedenim nejednakostima, P_i i C_i označavaju cene put i call opcije odnosno za vezu sa jedan dolar nominalnom iznosu. Ograničenja data u (6.8) i (6.9) će osigurati da za veličinu portfolija od 100 miliona nominalnog iznosa na koji se put opcije sastavljaju i call opcije se prodaju za datu strajk cenu koja neće premašiti 50 miliona. Negativne vrednosti u nejednakosti (6.9) nastaju jer pretpostavljamo da su call opcije prodate, a samim tim i to će dovesti do priliva kapitala na početku investicionog perioda.

Koristeći fazi ciljeve menadžera fonda datom iznad, lako je izračunati funkciju pripadnosti $\mu_k(R_k)(x)$ za svaku krivu prinosa scenarija. Rezultirani optimizacioni problem je dat (6.4) - (6.7). U poglavlju 6.3 se zatim može koristiti za izračunavanje optimalnog portfolija koji ispunjava ciljeve menadžera fonda. Tabela 6.2 daje detalje obveznica u portfoliju, uključujući jednogodišnji T- bill koji se koristi za izgradnju krive prinosa. Tabela 6.3 pokazuje cene put i call opcije koje dospevaju za mesec dana na ovim obveznicama. Optimalni strukturiran portfolio za „optimistični" pogled na tržište za jedan mesec investicionog perioda dat je u Tabeli 6.4. U ovoj tabeli, svi podaci se odnose na nominalni iznos od obveznica gazdinstavama gde se pretpostavlja da je veličina portfolija 100 miliona. Iznosi prikazani između put i call opcija odnose se na nominalni iznos na kojem se sastavljaju opcije koje treba da budu kupljene i call opcije koje treba da se prodaju, respektivno. Pošto se call opcije prodaju, nominalni iznosi call opcije su date sa negativnim predznakom. Tabela 6.5 prikazuje optimalan strukturiran portfolio menadžera pretpostavljajući da fond ima „pesimistični" pogled na tržište.

instrument	dospeće	kupon rata	ponuđena cena
1-year T-bill	19.08.99	–	95.082
2-year note	31.08.00	5.125	100.813
5-year note	15.08.03	5.250	102.625
10-year note	15.05.08	5.625	106.125

Tabela 6.2 Detalji obveznice i T - bill cene

osnovni	tip opcija	strajk cena	cena opcije
2-year note	Put	100.813	0.15625
2-year note	Put	100.547	0.05468
2-year note	Call	100.813	0.26560
2-year note	Call	101.313	0.07810
2-year note	Put	102.625	0.40625
5-year note	Put	101.938	0.13280
5-year note	Call	102.625	0.55470
5-year note	Call	103.625	0.20310
10-year note	Put	106.125	0.67187
10-year note	Put	105.000	0.22660
10-year note	Call	106.125	1.03125
10-year note	Call	107.969	0.37500

Tabela 6.3 Detalji cena jednomesečnih opcija

emisija obveznica	2- godine	5- godina	10- godina
Držanje nominalne obveznice (mn)	0.28	48.51	46.29
At-the-money put on nominal (mn)	50.0	8.91	50.0
Out-of-money put on nominal (mn)	0.0	6.52	7.61
At-the-money call on nominal (mn)	-50.0	-15.60	-50.0
Out-of-money call on nominal (mn)	0.0	0.0	-7.33

Tabela 6.4 Struktuiran portfolio za optimistični pogled na tržište

emisija obveznica	2- godine	5- godina	10- godina
Držanje nominalne obveznice (mn)	0.24	48.51	46.29
At-the-money put on nominal (mn)	50.0	29.95	50.0
Out-of-money put on nominal (mn)	0.0	0.0	0.0
At-the-money call on nominal (mn)	-50.0	-19.77	-50.0
Out-of-money call on nominal (mn)	0.0	0.0	-5.30

Tabela 6.5 Struktuiran portfolio za pesimistični pogled na tržište

7 Optimizacija portfolija

Ime Markowitz zvuči poznato onima koji rade na selekciji portfolija. Njegov dobro poznati i široko koršćen model je model srednjeg odstupanja koji koristi teoriju verovatnoće da bira između portfolija. U ovom delu ćemo dati kratak uvod o ovom modelu i pretvoriti ga u mogućnost/kredibiliteta modela da odgovara našim potrebama.

7.1 Markowitz-ov model

Osnovni cilj portfolio teorije je da optimalno izdvoji svoje investicije između različitih sredstava. Srednja optimizacija varijacije je kvantitativna alatka koja će nam omogućiti da se odredi raspodela, razmatranjem kompromisa između rizika i prinosa. Prilikom donošenja investicione odluke, investitor će uvek uspostaviti ravnotežu između maksimalnog prinosa i minimiziranja rizika. U originalnom Markowitz-ovom modelu učinci pojedinih hartija su smatrani slučajnim promenljivima. Prinos portfolija je kvantifikovan kao varijansa.

U slučaju maksimalnog prinosa na datom specifičnom nivou rizika, standardna formulacija Markowitz-ovog modela glasi:

$$\begin{cases} max\ E[x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n] \\ Var[x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n] \le \gamma \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

, gde E označava očekivanu vrednost operatora, Var označava varijansu, x_i investicione proporcije,a ξ_i predstavlja rizik *i- te* hartije od vrednosti $i = 1, \ldots, n$ i γ je maksimalni nivo rizika koji investitor može tolerisati.

U ovom scenariju naš portfolio neće uključivati kratku prodaju. Ako je dozvoljena kratka prodaja, moramo da obrišemo ograničenja $x_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots, n.$ Kratka prodaja znači da investitor može da proda akcije bez da ih poseduju. Ovo se može uraditi putem zaduživanja akcija od brokera i to je jedino razumljivo kada cene padaju.

Neka je C varijansa- kovarijansna matrica prinosa koja je data na sledeći način:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Prethodni model se može konvertovati u nastavku, korišćenjem

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ i } \xi = (E[\xi_1], E[\xi_2], \ldots, E[\xi_n]),$$

i C za varijansu- kovarijansnu matricu slučajnog vektora prinosa $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$:

$$\begin{cases} max\ x\xi^T \\ xCx^T \le \gamma \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Stope prinosa nisu nužno slučajne promenljive u stvarnom životu. Ako znamo istorijske podatke za prinos razmatranih sredstava, možemo izračunati prinos u narednom periodu kao sredstvo prethodnih prinosa jednog sredstva.

Prinos aktive možemo dobiti samo ako su na berzi cene date tako da možemo da koristimo sledeću formulu:

$$\xi_i = 100\tfrac{P_i - P_{i-1}}{P_i}$$

gde je P_i cena aktive u i- tom periodu.

Prvi pristup u rešavanju ovog problema ograničenja maksimizacijom je da se eliminiše x_n uz pomoć $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, i da je problem koji uključuje samo n - 1 nepoznatih parametara.

Međutim, za razliku od njenog teorijskog ugleda, Markowitz-ov model srednjeg odstupanje se ne koristi intenzivno za izgradnju velikih portfolija. Jedan od najvažnijih razloga za to je računarska teškoća u vezi sa rešavanjem problema kvadratnog programiranja velikih razmera sa gustom kovarijansnom matricom.

Kao osnovni problem možemo smatrati jednostavniju verziju Markowitz-ovog modela gde se radi samo sa maksimiziranjem prinosa ili minimiziranjem rizika. Ako uključujemo prodaju na kratko, mi ćemo dobiti sledeće probleme:

$$\begin{cases} max\ x\xi^T \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases}$$

ili

$$\begin{cases} min\ xC\xi^T \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases}$$

Nakon eliminacije jednog x_i (na primer x_n) dobijamo „jednostavno" n-sredstvo problema portfolio optimizacije sa n - 1 nepoznatim parametrom. Da bismo uklonili x_n, definišemo n-vektor $\alpha = (0 \ldots 01)$ i

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

koja je $(n-1) \times n$ matrica. Koristeći $y_i = x_i, (i = 1, \ldots, n-1),\ x = \alpha + y\beta$ dobijamo sledeće:

$$\min(\alpha + y\beta)C(\alpha + y\beta)^T$$

ili za problem maksimizacije:

$$\max(\alpha + y\beta)\xi^T$$

Jedan način da se lakše proračuna je da koristimo apsolutnu funkciju odstupanja rizika umesto originala. Ova nova srednja apsolutna devijacija modela optimizacije portfolija održava povoljne osobine Markowitz-ovog modela, ali uklanja većinu teškoća rešavanja, jer se može smanjiti na problem linearnog programiranja.

7.2 Markowitz-ov model srednjeg odstupanja sa fazi prinosom

Da bi koristili model srednjeg odstupanja, neophodno je da se proceni vektor očekivanog prinosa i matrica kovarijanse. U originalnom modelu srednjeg odstupanja neizvesnost prinosa izjednačava se sa slučajnošću, ali se ispostavilo da je fazi aritmetika moćniji alat za opisivanje neizvesnih okolnosti. U važnim slučajevima, možda će biti lakše da se proceni mogućnost ili kredibilitet raspodele stope prinosa na rizične aktive od odgovarajućih distribucija verovatnoća. Na osnovu ovih činjenica, razmatraćemo problem selekcije portfolija pod pretpostavkom da su povratne aktive fazi brojevi.

7.2.1 Uključivanje nejasnoća u model

Kao što je pomenuto ranije, stopa prinosa aktive se izračunava na osnovu istorijskih podataka aktiva sa srednjom vrednošću iz prethodnih perioda. Više informacija mogu da se dodaju našem modelu ako smatramo da ne uključujemo samo srednju vrednost, već i minimalni i maksimalni prinos aktive u posmatranom periodu. To može biti urađeno sa fazi brojevima. Uzmimo trougaone fazi brojeve kao prinose sa srednjom vrednošću $\bar{\xi}$ kao vrhuncom a i $\bar{\xi} - \xi_{min}$ kao α, $\xi_{max} - \bar{\xi}$ kao β.

Poznato je da važe sledeće osobine:
Za očekivanje proste slučajne promenljive X:

1. |E(X)| = E(|X|);
2. E(c) = c;
3. E(cX) = c E(X);
4. Ako slučajne promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_n,\ n \in N$ imaju očekivanja onda je E($\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$) = $\sum\limits_{k=1}^{n} E(X_k)$.

Za disperziju slučajne promenljive X:

1. $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$;
2. $D(X) \geq 0$;
3. D(X) = 0 ako i samo ako je X = c = const, skoro sigurno.;
4. Ako je c konstanta, onda je $D(cX) = c^2 D(X)$ i D(X + c) = D(X);
5. Ako su slučajne promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_n,\ n \in N$, nezavisne i imaju disperziju, onda važi $D(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} D(X_k)$.

Tada dobijamo:

$$E(\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(A_i),$$

$$Var(\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i) = \sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2 Var(A_i) + 2 \sum_{i<j=1}^{n} |\lambda_i \lambda_j| Cov(A_i, A_j).$$

I posibilističke prosečne vrednosti, varijanse i kovarijanse trougaonih fazi broja $A_i = (a_i, \alpha_i, \beta_i)$:

$$E(A) = a + \tfrac{\beta - \alpha}{6}$$

$$Var(A) = \frac{(\alpha+\beta)^2}{72}$$

$$Cov(A_1, A_2) = \frac{(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)}{24}$$

gde su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ fazi brojevi i $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ su realni brojevi.

Dobili smo sledeći problem optimizacije:

$$\max \sum_{i=1}^{n} x_i(a_i + \frac{\beta_i - \alpha_i}{6})$$

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \frac{(\alpha_i+\beta_i)^2}{72} + 2 \sum_{i \neq j=1}^{n} \frac{(\alpha_i+\beta_i)(\alpha_j+\beta_j)|x_i||x_j|}{24} \leq \gamma$$

koji sa prethodno definisanog $a_i, \alpha_i \; i \; \beta_i$ može da se transformiše u

$$\max \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_{i,max}+\xi_{i,min}+4\bar{\xi}}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \frac{(\xi_{i,max}-\xi_{i,min})^2}{72} + 2 \sum_{i \neq j=1}^{n} \frac{(\xi_{i,max}-\xi_{i,min})(\xi_{j,max}-\xi_{j,min})|x_i||x_j|}{24} \leq \gamma$$

7.2.2 Posibilištičko srednje odstupanje sa jednom bezrizičnom aktivom

Neki kažu da nema rizične aktive u stvarnom životu, jer sve aktive nose određeni stepen rizika. Međutim, neke aktive (riznice iz SAD-a ili iz stabilnih zapadnih vlada) imaju nivo rizika toliko mali da se mogu smatrati bezrizičnim ili sa manje rizika.

Prvo ćemo da preuzmemo posibilištički pristup gore navedenog srednje-varijansnog modela. Opšti model sa n rizičnih i jednom manje rizičnom aktivom je sledeći:

$$min \; Var[\xi^T x + \xi_0(1 - F^T x)]$$

$$E[\xi^T x + \xi_0(1 - F^T x)] \geq \mu,$$

$$x \in H$$

gde je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, $F = (1, 1, \ldots, 1)$, H je konveksan skup koji predstavlja dodatna ograničenja u vezi sa izborom x. Stopa prinosa j-te aktive je ξ_j, i procenat ukupne investicije za ovu aktivu je x_j. Mi koristimo prvi izvod po T (^{T}) za označavanje matrice transpozicije.

Posibilistička srednja vrednost prinosa portfolija data je:

$$E[\xi^T x + \xi_0(1 - F^T x)] = E(\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i) + \xi_0(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(\xi_i) x_i + \xi_0(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i + \frac{\beta_i - \alpha_i}{6}) x_i + \xi_0(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i).$$

I odgovarajuća posibilistička varijansa prinosa je:

$$Var[\xi^T x + \xi_0(1 - F^T x)] = Var[\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i] =$$

$$= \frac{1}{72}[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)^2 {x_i}^2] + \frac{1}{12}\sum_{i\neq j=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)(\alpha_j+\beta_j)|x_i||x_j| =$$

$$= \frac{1}{72}[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)|x_i|]^2.$$

Posibilistički model srednjeg odstupanja može se opisati:

$$min \ \frac{1}{72}[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)^2 {x_i}^2] + \frac{1}{12}\sum_{i\neq j=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)(\alpha_j+\beta_j)|x_i||x_j|$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+\frac{\beta_i-\alpha_i}{6})x_i + \xi_0(1-\sum_{i=1}^{n}x_i) \geq \mu,$$

$$x \in H,$$

gde je H konveksan skup koji predstavlja dodatna ograničenja od x. Prethodni model je jednak sledećem:

$$min \ \frac{1}{72}[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)^2 {x_i}^2] + \frac{1}{12}\sum_{i\neq j=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)(\alpha_j+\beta_j)|x_i||x_j|$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-\xi_0+\frac{\beta_i-\alpha_i}{6})x_i \geq \mu-\xi_0,$$

$$x \in H,$$

gde je H konveksan skup koji predstavlja dodatna ograničenja od x.

Ovaj model sadrži samo 3n nepoznatih parametara za razliku od probabilističkog modela srednjeg odstupanja, koji sadrži $(n^2+3n+2)/2$ nepoznatih parametara. Mogli bi da dodatno smanjimo broj nepoznatih parametara pomoću simetričnih trougaonih fazi brojeva $r_i = (a_i, \alpha_i)(\alpha_i = \beta_i)$.

7.2.3 Kredibilističko srednje odstupanje sa jednom bezrizičnom aktivom

Kredibilistički model ne razlikuje se mnogo od posibilističkog. Za kredibilističko odstupanje od trougaonih fazi brojeva imamo tri slučaja. Mi ćemo razmotriti samo jedan simetričan, gde je leva strana jednaka desnoj strani, što znači $\xi_i = (a_i, \alpha_i)$, gde je a_i vrhunac i α_i je leva i desna strana.

Očekivana vrednost i varijansa simetričnog trougaonog fazi broja je

$$E[\xi_i] = a_i$$

$$Var[\xi_i] = \frac{{\alpha_i}^2}{6}.$$

Dodavajući dva (simetrična) trougaona fazi broja takođe rezultira trougaoni fazi broj sa vrhuncem $a_1 + a_2$ i levom/ desnom stranom $\alpha_1 + \alpha_2$, pa imamo:

$$E[\sum_{i=1}^{n}\xi_i] = \sum_{i=1}^{n}a_i$$

i

$$Var[\sum_{i=1}^{n}\xi_i] = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{6}.$$

Sa drugim karakteristikama kredibilističke očekivane vrednosti, prinos portfolija x je

$$E[\xi^T x + \xi_0(1 - F^T x)] = E[\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i] + \xi_0(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} E[\xi_i] x_i + \xi_0(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \xi_0(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i),$$

i odgovarajuća kredibilistička varijansa je:

$$Var[\xi^T x + \xi_0(1 - F^T x)] = Var[\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i] = \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i)^2}{6}$$

Tako je kredibilistički model srednjeg odstupanja portfolija x dat sa

$$min \ \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i)^2}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \xi_0(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i) \geq \mu$$

$$x \in H,$$

gde H predstavlja konveksan skup dodatnih ograničenja *x*.

Ovaj problem je jednak sa

$$min \ \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - \xi_0) x_i \geq \mu - \xi_0$$

$$x \in H,$$

gde H predstavlja konveksan skup dodatnih ograničenja *x*.

8 Zaključak

Tema ovog rada predstavlja aktuelnu oblast matematike baziranu na teoriji fazi skupova, koja je primenljiva u realnim problemima. Kroz rad, pored osnovnih pojmova za trougaone norme i fazi skupove, predstavljeni su različiti postupci pomoću kojih se vrše operacije na fazi skupovima.

Proces donošenja odluka često je povezan sa predviđanjem budućih vrednosti koje zavise od vremena, a pored toga, donošenje odluka se često zasniva na nepreciznim i nekompletnim informacijama. U radu su izloženi osnovni koncepti teorije fazi skupova. Fazi skupovi su uvedeni kao uopštenja klasičnih skupova a fazi brojevi kao numeričke reprezentacije neodređenosti različitog porekla. Rad u fazi okruženju predstavlja jedan od pogodnih načina da se predstavi i modelira neodređenost i nepreciznost, prisutna u svakodnevnom životu.

Pored osnovnih pojmova vezanih za fazi skupove i fazi brojeve, predstavljeni su različiti koncepti u kojima su definisani postupci za izvođenje operacija nad fazi skupovima. Prilikom donošenja odluke u fazi okruženju definisani su: fazi skupovi ciljeva koje treba postići i fazi skupovi ograničenja u kojima treba ostati. Svaki fazi skup ima svoju karakterističnu funkciju, tj. funkciju pripadnosti koja zavisi od elemenata „običnog" skupa alternativa, ali uzima vrednosti iz celog intervala [0, 1]. Odluka, pri ovako definisanim skupovima, jeste fazi skup koji se dobija u preseku fazi skupova ciljeva i fazi skupova ograničenja. Kako je fazi skup teško primenljiv u tom obliku, neophodno je izvršiti defazifikaciju rezultata, odnosno, bira se element alternativnog skupa koji ima najveću funkciju pripadnosti u fazi skupu odluke.

Nedostaci koje je ispoljila klasična matematika u modeliranju pojava koje sadrže elemente neodređenosti, prevaziđeni su pojavom fazi koncepta, gde se neodređenost unosi u samu definiciju modela. Novi pristup rezultirao je pojavom približnog rezonovanja po generalizovanom modus ponensu i fazi sistema kontrole, na koje se donosilac odluka oslanja u promenljivom i dinamičnom okruženju karakterističnom za ekonomske modele. Na taj način značajno se smanjuje mogućnost greške donosioca odluke usled subjektivne pogrešne procene.

Generalno posmatrano, isuviše često preduzeća nastoje da prate poteze konkurenata umesto da preuzmu aktivnost da bi postigli strategijsko vođstvo. Stoga, nove portfolio matrice uzimaju u obzir kupce i tehnologiju čiji je značaj rastući na globalnom kompleksnom tržištu sa brzim promenama, sve većim zahtevima i sa jakom konkurencijom. Portfolio matrica služi za dobijanje uvida o poziciji poštanskih usluga i delatnosti strategijskog menadžmenta. Sam termin „portfolio matrice" pozajmljen je iz finansija hartija od vrednosti gde se one kombinuju po određenim kriterijumima u optimalne portfolije. Samo stvaranje strategijske pozicije preduzeća nemoguće je zamisliti bez upotrebe neke od portfolio matrica, jer omogućavaju uvid u poziciju pojedinih proizvoda, grupa proizvoda ili delatnosti strategijskog poslovanja na portfolio matrici.

Markowitz-ov model optimizacije portfolija se, uprkos svom revolucionarnom uspehu u domenu teorije, pokazao kao loše uslovljen problem čija primena u praksi zahteva neka poboljšanja da bi rezultati bili primenljivi u realnom investiranju. Sa druge strane, ovaj model je dobar jer razmatra konstrukciju optimalnog portfolija u smislu minimizacije rizika, a takođe kombinovanjem aktiva u portfolijima investitori mogu smanjiti ukupan rizik bez ugrožavanja prinosa.

Sama tema rada je zanimljiva i ima veliku primenu u praksi, pre svega u poslovnom okruženju. Predstavljeni materijal je dobar za čitaoca koji želi da stekne osnovna znanja o fazi okruženju i fazi logici, kao i njihovoj primeni u donošenju odluka kada su u pitanju lingvističke promenljive i neodređenost (rasplinutost).

Literatura

[1] Bojadziev G., Bojadziev M.; Fuzzy logic for business,finance and management, World Scie ntific 1999.

[2] Buckley J.J., Eslami E., Feuring T.; Fuzzy mathematics in economics and engineering, Springer, 2002.

[3] Blang M., Economic Theory in Retrospect, Cambridge University Press, (1985)

[4] Brzaković R., Marjanović Z., Radulović Ž., Upravljanje rizikom i portfolio kao metod za ocenu rizika

[5] Dubois D., H. Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York, 1980.

[6] Dubois D., H. Prade, Operations on fuzzy numbers, International Journal of Systems Science, 9 (1978)

[7] Dummett M., Wang's Paradox, „Synthese", (1975)

[8] Filev Dimitar P., Yager Raland R., Essentials of Fuzzy Modeling and Control, Wiley, New York, 1994.

[9] Fuller R.; Fuzzy reasoning and fuzzy optimization, Turku Centre for Computer Science, Abo, 1998.

[10] Fodor J.; Left- continuous t-norms in fuzzy logic: An overview. Hanss M., Applied Fuzzy Arithmetic, 2004.

[11] Haans M.; Applied fuzzy arithmetic- an introduction with engineering applications, Springer, 2005

[12] Hull J., Options, futures and other derivate securities, Pretince-Hall, New Yersey, (1989)

[13] Klement E.P., Mesiar R., Pap E.; Triangular norms, Kluwer Academic Publichers, 2000.

[14] Klir G., (2002) Uncertainty in Economics: The Heritage of G.L.S. Shackle, „Fuzzy Economic Review"

[15] Keropyan Aras, Gil-Lafuente A., African Journal of Business Management, Department of Economics and Business Organization, University of Barcelona. Barcelona, Spain.

[16] Mašić D., Strategijski menadžment, Univerzitet Singidunum, Beograd (2009)

[17] McNeill D., Freiberger P., (1993) Fuzzy Logic, New York etc., Simon & Schuster.

[18] Nasseri H., Radius of gyration method for ranking of fuzzy numbers, The 1st Workshop on Fuzzy Mathematics and its Applications, December 16, 2009, Babolsar, Iran.

[19] Hanns M., On the Implementation of Fuzzy Arithmetical Operations for Engineering Problems, 1999.

[20] Pap E., Fazi mere i njihova primena, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1999. godina

[21] Pap E., Bošnjak Z., Bošnjak S., Application of fuzzy sets with different t-norms in the interpretation of portfolio matrices in strategic management, 1998.

[22] Schweizer B., Skalar A.; Associative functions and abstract semigroups, Publ. Math, Debrecen, 1983.

[23] Zadeh L. A., Fuzzy sets, Information Control, 8 (1965)

[24] Zadeh L. A.; The Concept of Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning, Inform. Sci., 1975.

[25] Qing He, Hong-Xing Li,C.L.O.Chen, E.S. Lee, Extension principles and fuzzy set categories

[26] Webster's New World Finance and Investment Dictionary Copyright Âľ 2010 by Wiley Publishing, Inc., Indianapolis, Indiana

[27] http://www.businessdictionary.com/definition/portfolio-planning-matrix.html

[28] www.ruledit.com

[29] http://www.slideshare.net/vigneshpushparaj/business-portfolio-matrix

[30] www.thinkserbia.wordpress.com

[31] https://www.wikipedia.org/

Daniela Žigmund je rođena u Novom Sadu 26.01.1989. godine. Završila je osnovne studije na Prirodno- matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija sa temom diplomskog rada „Operacije sa fazi brojevima i fazi zaključivanje”.