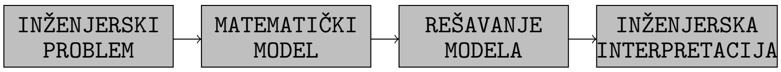
Chapter 5

Diferencijalne jednačine

Mnoge pojave i zakoni koji vladaju u prirodi mogu se opisati koristeći matematičke modele u obliku diferencijalnih jednačina. Matematičko modelovanje predstavlja neizostavan deo postavljanja i rešavanja problema u fizici, inženjerstvu, biologiji, medicini, ekonomiji i drugim oblastima.



Zato ćemo se u ovoj glavi baviti:

(i) postavljanjem matematičkih modela,

(ii) klasifikacijom diferencijalnih jednačina:

- na obične i parcijalne,
- na diferencijalne jednačine prvog i višeg reda,
- na razne tipove diferencijalnih jednačina prvog reda: sa razdvojenim promenljivim, homogene, linearne, Bernulijeve i sl.
- na linearne homogene ili nehomogene diferencijalnih jednačina višeg reda sa konstantnim koeficijentima.

(iii) rešavanjem nekih klasa običnih diferencijalnih jednačina.

5.1 Osnovni pojmovi i definicije

Jednačina koja sadrži bar jedan izvod nepoznate funkcije koja zavisi od jedne ili više promenljivih se naziva diferencijalna jednačina. Diferencijalne jednačine se dele na:

1. obične - kod kojih nepoznata funkcija zavisi samo od jedne promenljive i

2. parcijalne - kod kojih nepoznata funkcija zavisi od više promenljivih. (c)).

Red jednačine je red najvišeg izvoda koji se pojavljuje u toj jednačini.

Primer 5.1.1 *Sledeće jednačine su diferencijalne:*

(a) $y'(x) = \frac{y}{x}$ *(obična prvog reda)*

(b) $y''(x) - xy'(x) + 2py(x) = 0$ *(obična drugog reda)*

(c) $\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2} = 0$ *(parcijalna drugog reda)*

(d) $\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0,\ \ \omega - const.$ *(obična drugog reda)*

(e) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\ a - const.$ *(obična drugog reda)*

Konjukcija dve ili više diferencijalnih jednačina se naziva sistem diferencijalnih jednačina.

Primer 5.1.2 *Primer sistema dve diferencijalne jednačine sa dve nepoznate funkcije:*

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) &= x(t) + 5y(t) \end{aligned}$$

Implicitni (ili opšti) oblik obične diferencijalne jednačine n-tog reda je

$$\boxed{G(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0,} \tag{5.1}$$

Eksplicitni (ili normalni) oblik je

$$\boxed{F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) = 0.} \tag{5.2}$$

Funkcija $y = \varphi(x)$ je rešenje diferencijalne jednačine (5.1) na (a, b) ako važi:

- φ je definisana na (a,b),
- n puta je diferencijabilna na (a, b) i
- φ identički zadovoljava jednačinu 5.1 tj. za svako $x \in (a, b)$ važi

$$\varphi^{(n)}(x) = F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

5.2 Diferencijalne jednačine prvog reda

Implicitni oblik diferencijalne jednačine prvog reda je

$$\boxed{G(x, y, y') = 0}$$

a eksplicitno oblik je

$$\boxed{y' = F(x, y).}$$

Geometrijska interpretacija. Neka je $y = \varphi(x)$ rešenje obične diferencijalne jednačine prvog reda u intervalu (a, b). Linijski segment je uredjena trojka (x, y, y'), gde je y' u svakoj tački (x, y) odredjen tom diferencijalnom jednačinom. Skup svih linijskih segmenata se naziva polje pravaca. Koeficijent pravca tangente na grafik rešenja $y = f(x)$ u tački (x, y) je dat sa $y' = F(x, y)$. Kaže se da je kriva saglasna sa poljem pravaca. Skup svih krivih saglasnih sa poljem pravaca se naziva opšte rešenje diferencijalne jednačine. Kriva koja prolazi kroz tačku (x_0, y_0), tj. zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$, je partikularno rešenje.

Kaže se da je sa

$$y' = F(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{5.3}$$

zadat početni (Cauchyev) problem.

Postavlja se pitanje pod kojim uslovima postoji jedinstveno rešenje početnog problema. Odgovor na to pitanje nam daje sledeća teorema.

Teorema 5.2.1 *Neka je funkcija $F(x, y)$ neprekidna u zatvorenoj oblasti $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \ \ c \leq y \leq d\}$ i zadovoljava Lipschitzov uslov po y, tj. postoji $K > 0$ takvo da je u D*

$$|F(x, y_2) - F(x, y_1)| \leq K|y_2 - y_1|.$$

Postoji jedno i samo jedno rešenje početnog problema (5.3) koje je definisano u intervalu (a', b'), gde je

$$\begin{aligned} a' &= \max\left\{a, x_0 - \frac{d - y_0}{M}, x_0 - \frac{y_0 - c}{M}\right\} \\ b' &= \min\left\{b, x_0 + \frac{d - y_0}{M}, x_0 + \frac{y_0 - c}{M}\right\} \\ M &= \sup_D |F(x, y)| \end{aligned}$$

U dokazu teoreme se koristi metod uzastopnih aproksimacija. Rešenje je dato sa

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x),$$

gde je

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \\ y_n(x) &= y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} F(t, y_{n-1}(t))dt, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Primer 5.2.1 *Rešiti početni problem* $y' = x + y$, $y(0) = 1$.

Rešenje.
Ekvivalentna integralna jednačina je

$$y(x) = 1 + \int\limits_{0}^{x} (t + y(t))dt,$$

a niz uzastopnih aproksimacija

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1 \\ y_1(x) &= 1 + \int\limits_{0}^{x} (t+1)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Može se dokazati matematičkom indukcijom da je

$$y_n(x) = 1 + x + 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^k}{k!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ako posmatramo $n \to \infty$ onda je

$$y(x) = 2e^x - x - 1.$$

□

Metod prikazan u prethodnom primeru ima veliki teoretski značaj, ali nije pogodan za praktično rešavanje jer su retki primeri u kojima se niz $\{y_n\}$ može efektivno naći.

5.2.1 Jednačina sa razdvojenim promenljivim

Jednačina oblika

$$\boxed{g(y) \cdot y' = f(x)} \tag{5.4}$$

ili

$$\boxed{y' = f(x)\, g(y),} \tag{5.5}$$

u kojoj promenljive x i y mogu da se "razdvoje" jedna od druge, se kaže da je diferencijalna jednačina sa razdvojenim promenljivim.

Ako integralimo levu i desnu stranu po x, dobijamo

$$\int g(y) \cdot y' dx = \int f(x) dx + C \text{ odakle je} \int g(y) dy = \int f(x) dx + C.$$

Primer 5.2.2 *Rešiti početni problem* $y' = 2y$, $y(0) = 3$.

Rešenje. Ako, za $y \neq 0$, razdvojimo promenljive i integralimo dobijamo

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = 2y \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \\ \Leftrightarrow \quad & \ln |y| = 2x + C' \Leftrightarrow y = \pm e^{2x+C'} \Leftrightarrow y = Ce^{2x}. \end{aligned}$$

Iz početnog uslova sledi

$$y(0) = 3 \Rightarrow Ce^{2 \cdot 0} = 3 \Rightarrow C = 3,$$

odakle je rešenje početnog problema $y(x) = 3e^{2x}$.

Neka je

$$\boxed{y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \quad \text{i} \quad (a_2, b_2) = k(a_1, b_1).} \tag{5.6}$$

Jednačina koja se svodi na jedančinu sa razdvojenim promenljivim Uvodjenjem smene $t = a_1x+b_1y$ dobijamo jednačinu koja razdvaja promenljive.

5.2.2 Homogena jednačina

Neka je f neprekidna funkcija nad (a, b). Za jednačinu oblika

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{5.7}$$

kažemo da je homogena diferencijalna jednačina prvog reda.

Ako je $f(\frac{y}{x}) = \frac{y}{x}$, onda posmatrana diferencijalna jednačina razdvaja promenljive. Uvedimo smenu

$$t(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Tada je

$$y(x) = x \cdot t(x), \qquad y'(x) = t(x) + xt'(x).$$

Jednačina (**??**) se svodi na jednačinu

$$\frac{1}{f(t)-t}t' = \frac{1}{x}$$

koja razdvaja promenljive.

Primer 5.2.3 *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine* $xyy' = x^2 + y^2$.

Rešenje. Ako jednačinu podelim sa xy, dobijamo

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Uvodjenjem smene $t = \frac{y}{x}$

$$\begin{aligned} & t'x + t = \frac{1}{t} + t \\ \Leftrightarrow \quad & t'x = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \int t dt = \int \frac{dx}{x} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}t^2 = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y^2 = 2x^2 \ln|Cx|. \end{aligned}$$

Neka je

$$\boxed{y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.} \tag{5.8}$$

Jednačina koja se svodi na homogenu U ovom slučaju uvodimo smenu $x = X + \alpha, y = Y + \beta$. Polazna jednačina postaje

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2X + b_2Y + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right),$$

i ako je (α, β) rešenje sistema jednačina

$$\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{aligned}$$

dobijamo homogenu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right), \text{ tj. } \frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right).$$

Rešenje date diferencijalne jednačine je oblika $\varphi(X, Y) = 0$, a rešenje polazne diferencijalne jednačine $\varphi(x - \alpha, y - \beta) = 0$.

Primer 5.2.4 *Rešiti diferencijalnu jednačinu* $\frac{dy}{dx} = \frac{4x-4y}{-4x+y+3}$.

Rešenje. Kako sistem jednačina

$$\begin{aligned} 4\alpha - 4\beta &= 0 \\ -4\alpha + \beta &= -3 \end{aligned}$$

ima jedinstveno rešenje $\alpha = 1$, $\beta = 1$, uvodjenjem smene $x = X + 1$, $y = Y + 1$, zadata diferencijalna jednačina se svodi na homogenu

$$\frac{dY}{dX} = \frac{4X - 4Y}{-4X + Y},$$

koja se rešava uvodjenjem smene $t = \frac{Y}{X}$.

$$\begin{aligned} & t'X + t = \frac{4-4t}{-4+t} \\ \Leftrightarrow \quad & t'X = \frac{4-t^2}{t-4} \\ \Leftrightarrow \quad & \int \frac{t-4}{4-t^2} = \int \frac{dX}{X} \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{2}\Big(\int \frac{dt}{2-t} + 3\int \frac{dt}{2+t}\Big) = \ln|X| + \ln C \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(2+t)^3}{t-2}\right| = \ln|CX| \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{\left|\frac{\frac{Y}{X} - 2}{(2+\frac{Y}{X})^3}\right|} = CX \\ \Leftrightarrow \quad & Y - 2X = C^2(2X+Y)^3. \end{aligned}$$

Vraćanjem smene $X = x - 1$, $Y = y - 1$ dobijamo

$$-2x + y + 1 = C^2(2x + y - 3)^2.$$

5.2.3 Linearna jednačina

Diferencijalna jednačina oblika

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x),} \tag{5.9}$$

u kojoj su y i y' prvog stepena, se kaže da je **linearna** diferencijalna jednačina prvog reda.

Teorema 5.2.2 *Neka su f i g neprekidne nad intervalom (a, b). Tada postoji jedinstveno rešenje jednačine (5.9) koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = x_0$ i definisano je u (a, b). Rešenje je dato sa*

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt}\Big(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} g(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} f(u)du}\,dt\Big) \tag{5.10}$$

Dokaz. Lako je proveriti da funkcija (5.10) zadovoljava jednačinu (5.9).

Obratno, ako uvedemo smenu $y(x) = u(x)v(x)$, $y'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$, jednačina postaje

$$\begin{aligned}
&u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + f(x)u(x)v(x) = g(x)\\
&u'(x)v(x) + u(x)(v'(x) + f(x)v(x)) = g(x)\\
&v'(x) + f(x)v(x) = 0 \qquad \wedge \qquad u'(x)v(x) = g(x)\\
&\frac{dv(x)}{v(x)} = -f(x)dx \qquad \wedge \qquad u'(x)v(x) = g(x)\\
&\ln|v(x)| = -\int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad \wedge \qquad u'(x)v(x) = g(x)\\
&v(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt} \qquad \wedge \qquad u'(x) = g(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}\\
&v(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt} \qquad \wedge \qquad u(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(u)du} dt + C\\
&y(x) = u(x)v(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt} \int_{x_0}^{x} g(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(u)du} dt + C
\end{aligned}$$

Iz početnog uslova $y(x_0) = y_0$ sledi da je $C = y_0$. Dakle,

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt}\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(u)du} dt\Big).$$

□

Primer 5.2.5 *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y' + \frac{3}{x}y = 9x^3$.

Rešenje.

$$u'v + uv' + \frac{3}{x}uv = 9x^3$$

$$u'v + u\Big(v' + \frac{3}{x}v\Big) = 9x^3$$

$$\begin{aligned}
&v' + \tfrac{3}{x}v = 0 && u'v = 9x^3\\
&\tfrac{dv}{dx} + \tfrac{3}{x}v = 0 && u'\tfrac{1}{x^3} = 9x^3\\
&\tfrac{dv}{dx} = -\tfrac{3}{x}v && u' = 9x^6\\
&\tfrac{dv}{v} = -3\tfrac{dx}{x} && u = \tfrac{9}{7}x^7 + C\\
&\ln|v| = -3\ln|x| &&\\
&v = \tfrac{1}{x^3} &&
\end{aligned}$$

$$y = uv = \frac{1}{x^3}(\frac{9}{7}x^7 + C) = \frac{9}{7}x^4 + \frac{C}{x^3}.$$

□

5.2.4 Bernoullijeva jednačina

To je diferencijalna jednačina oblika

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.} \tag{5.11}$$

Ako je $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$, jednačina je linearna. Inače, uvođenjem smene

$$z(x) = (y(x))^{1-\alpha}, \qquad z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x),$$

jednačina 5.11 se svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu oblika

$$z'(x) + (1-\alpha)f(x)z(x) = (1-\alpha)g(x).$$

Primer 5.2.6 *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y' + \frac{1}{x}y = xy^2$.

Rešenje.
Ako jednačinu podelimo sa y^2, dobijamo

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} = x.$$

Neka je $z = \frac{1}{y}$. Tada je $z' = -\frac{1}{y^2}y'$ i zadata jednačina se svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu

$$z' - \frac{1}{x}z = -x,$$

koja se rešava uvodjenjem smene $z = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = -x$$

$$u'v + u(v' - \frac{1}{x}v) = -x$$

$$\begin{array}{cc} v' - \frac{1}{x}v = 0 & u'v = -x \\ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} & u'x = -x \\ \ln|v| = \ln|x| & u' = -1 \\ v = x & u = -x + C \end{array}$$

$$z = uv = x(-x + C) = -x^2 + Cx$$

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{-x^2 + Cx}.$$

□

5.2.5 Jednačina totalnog diferencijala

Jednačina

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0} \tag{5.12}$$

je **jednačina totalnog diferencijala** ako postoji funkcija $F = F(x,y)$ čiji je totalni diferencijal jednak levoj strani te jednačine, tj. za koju u nekoj oblasti važi

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

tj.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y).$$

Ako postoji takva funkcija, onda iz $dF(x,y) = 0$ sledi da je rešenje jednačine (5.12)

$$F(x,y) = C.$$

Teorema 5.2.3 *Neka su $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ neprekidne u jednostruko povezanoj oblasti G.*

Jednačina (5.12) je jednačina totalnog diferencijala ako i samo ako za svako $(x,y) \in G$ važi

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \tag{5.13}$$

Funkcija $F(x,y)$ data je sa

$$F(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$$

gde je (x_0,y_0) proizvoljna tačka oblasti G.

Primer 5.2.7 *Pokazati da je*

$$(3x^2y - 6x)dx + (x^3 + 2y)dy = 0$$

jednačina totalnog diferencijala i rešiti je.

Rešenje. Ako uvedemo oznake $P = 3x^2y - 6x$ i $Q = x^3 + 2y$, onda je $P_y = 3x^2 = Q_x$, odakle sledi da je zadata jednačina totalnog diferencijala i postoji funkcija $F = F(x,y)$ za koju je

$$\begin{array}{ll}
F_x(x,y) = 3x^2y - 6x & \qquad F_y(x,y) = x^3 + 2y \\
F(x,y) = x^3y - 3x^2 + \varphi(y) & \\
F_y(x,y) = x^3 + \varphi'(y) &
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
x^3 + \varphi'(y) &= x^3 + 2y \\
\varphi'(y) &= 2y \\
\varphi(y) &= y^2 + C \\
F(x,y) &= x^3y - 3x^2 + y^2 + C.
\end{aligned}
$$

□

5.2.6 Integracioni množitelj

Ako nije ispunjen uslov 5.13 postavlja se pitanje da li postoji funkcija $f = f(x,y)$ za koju je

$$f(x,y)P(x,y)dx + f(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

jednačina totalnog diferencijala. Ako postoji takva funkcija f, onda se kaže da je f **integracioni množitelj.**

Primer 5.2.8 *Rešiti diferencijalnu jednačinu*

$$(2x + x^2y + y^3)dx + (2y + x^3 + xy^2)dy = 0,$$

ako ona ima integracioni množitelj oblika $f = f(t)$ *gde je* $t = xy$.

Rešenje. Neka je $P_1 = f(xy)(2x + x^2y + y^3)$, $Q_1 = f(xy)(2y + x^3 + xy^2)$ i $t = xy$. Tada je $t_x = y$, $t_y = x$, i važi

$$f_x(x,y) = \frac{df}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{f}(t) \cdot y \text{ i } f_y(x,y) = \frac{df}{dt}\frac{dt}{dy} = \dot{f}(t) \cdot x.$$

$$
\begin{aligned}
P_y = Q_x \quad &\Leftrightarrow \quad \dot{f}(t)x(2x + x^2y + y^3) + f(x^2 + 3y^2) = \dot{f}(t)y(2y + x^3 + xy^2) + f(3x^2 + y^2) \\
&\Leftrightarrow \quad \dot{f}(t)(2x^2 - 2y^2) = f(t)(2x^2 - 2y^2) \\
&\Leftrightarrow \quad \dot{f}(t) = f(t) \Leftrightarrow \frac{df(t)}{f(t)} = dt \\
&\Leftrightarrow \quad \ln f(t) = t \\
&\Leftrightarrow \quad f(t) = e^t
\end{aligned}
$$

Znači, integracioni množitelj je $f(x,y) = e^{xy}$ i zadata diferencijalna jednačina je ekvivalentna jednačini

$$(2x + x^2y + y^3)e^{xy}dx + (2y + x^3 + xy^2)e^{xy}dy = 0.$$

$$
\begin{array}{ll}
F_x = (2x + x^2y + y^3)e^{xy} & F_y = (2y + x^3 + xy^2)e^{xy} \\
F = 2\int xe^{xy}dx + y\int(x^2 + y^2)e^{xy}dx + \varphi(y) & F_y = 2ye^{xy} + (x^3 + xy^2)e^{xy} \\
F = 2\int xe^{xy}dx + y\Big(\frac{1}{y}(x^2 + y^2)e^{xy} - \frac{2}{y}\int xe^{xy}dx\Big) + \varphi(y) & F_y = 2ye^{xy} + (x^3 + xy^2)e^{xy} \\
F = (x^2 + y^2)e^{xy} + \varphi(y) & \\
F_y = 2ye^{xy} + (x^3 + xy^2)e^{xy} + \varphi'(y) &
\end{array}
$$

$$2ye^{xy} + (x^3 + xy^2)e^{xy} + \varphi'(y) = 2ye^{xy} + (x^3 + xy^2)e^{xy}$$

$$\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C$$
$$F(x, y) = (x^2 + y^2)e^{xy} + C$$

Rešenje zadate diferencijalne jednačine je

$$(x^2 + y^2)e^{xy} + C = 0.$$

□

5.2.7 Clairautova jednačina

Clairautova diferencijalna jednačina je jednačina oblika

$$\boxed{y = xy' + f(y').} \tag{5.14}$$

Teorema 5.2.4 *Neka funkcija f ima drugi izvod različit od nule u intervalu (α, β). Tada su rešenja jednačine (5.14) sledeća*

(a) singularno rešenje: funkcija $y = \varphi(x)$ čije su parametarske jednačine

$$x = -f'(t)$$
$$y = -tf'(t) + f(t)$$

$t \in (\alpha, \beta)$, koja je definisana i intervalu (a, b) gde je $a = \inf\limits_{\alpha<t<\beta}\{-f'(t)\}$, $b = \sup\limits_{\alpha<t<\beta}\{-f'(t)\}$, (Ovo rešenje ne možemo dobiti iz opšteg rešenja),

(b) opšte rešenje:

$$y = Cx + f(C), \quad C \in (\alpha, \beta).$$

Ako diferenciramo jednačinu (5.14), dobijamo

$$y' = xy'' + y' + f'(y')y''$$
$$y''(x + f'(y')) = 0$$

Znači, $y'' = 0$ ili je $x + f'(y') = 0$.

Ako je $y'' = 0$, onda je $y' = C$, i uvrštavanjem u polaznu diferencijalnu jednačinu dobijamo opšte rešenje

$$y = xC + f(C).$$

Kako je po pretpostavci $f''(t) \neq 0$, sledi da u intervalu (a, b) postoji inverzna funkcija $t = g(x)$ funkcije $x = -f'(t)$, tako da jednačine

$$x = -f'(t)$$
$$y = -tf'(t) + f(t)$$

definišu u tom intervalu funkciju $y = \varphi(x)$.

Kako je $\dot{x} = -f''(t)$, $\dot{y} = -tf''(t)$, gde je $f''(t) \neq 0$, to je $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = t$, odakle sledi da je $y = \varphi(x)$ rešenje polazne diferencijalne jednačine.

Primer 5.2.9 *Rešiti Clairautovu diferencijalnu jednačinu* $y = xy' + \frac{1}{2}y'^2$.

Rešenje. Diferenciraćemo polaznu diferencijalnu jednačinu:

$$y' = xy'' + y' + y'y'',$$

$$y''(x + y') = 0.$$

Jednačina $y'' = 0$ daje opšte rešenje

$$Cx + \frac{C^2}{2},$$

a jednačina $x + y' = 0$, singularno rešenje

$$y' = -x \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -\frac{x^2}{2}.$$

□

5.2.8 Lagrangeova jednačina

Lagrangeova diferencijalna jednačina je jednačina oblika

$$\boxed{y = xf(y') + g(y').} \tag{5.15}$$

Ako je $f(y') \equiv y'$, onda je to Clairautova diferencijalna jednačina.

Inače, za $f(y') \not\equiv y'$, ova jednačina se rešava uvodjenjem parametra $p = y'$. Tada je $dy = pdx$ i polazna jednačina je oblika

$$y = xf(p) + g(p).$$

Diferenciranjem dobijamo

$$\begin{aligned}
&dy = f(p)dx + (xf'(p) + g'(p))dp,\\
&pdx = f(p)dx + (xf'(p) + g'(p))dp,\\
&(f(p) - p)dx + (xf'(p) + g'(p))dp = 0,
\end{aligned}$$

a to je za $f(p) - p \neq 0$ linearna diferencijalna jednačina oblika

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x + \frac{g'(p)}{f(p) - p} = 0,$$

odakle dobijamo rešenje u parametarskom obliku.

Ako postoji $p = a$ za koje je $f(p) = p$, tada je i $y = ax + g(a)$ singularno rešenje Lagrangeove diferencijalne jednačine.

Primer 5.2.10 *Rešiti Lagrangeovu diferencijalnu jednačinu* $y = xy'^2 + y'^2$.

Neka je $p = y'$. *Tada je* $y = xp^2 + p^2$. *Diferenciranjem dobijamo*

$$\begin{aligned}
&pdx = p^2dx + (2px + 2p)dp,\\
&p(p - 1)dx + 2p(1 + x)dp = 0.
\end{aligned}$$

Ako je $p \neq 0$ i $p \neq 1$, onda je zadata linearna diferencijalna jednačina

$$\frac{dx}{dp} + 2\frac{1}{p-1}x = -\frac{2}{p-1}.$$

Uvedimo smenu $x(p) = u(p)v(p)$, za koju je $x(p) = u'(p)v(p) + u(p)v'(p)$. Dobijamo

$$u'v + u\Big(v' + \frac{2}{p-1}v\Big) = -\frac{2}{p-1}.$$

$$\begin{array}{ll} v' + \frac{2}{p-1}v = 0 & u'v = -\frac{2}{p-1} \\ \frac{dv}{dp} = -\frac{2}{p-1}v & u'\frac{1}{(p-1)^2} = -\frac{2}{p-1} \\ \frac{dv}{v} = -\frac{2}{p-1}dp & u' = -2(p-1) \\ \ln|v| = -2\ln|p-1| & u = -2\frac{(p-1)^2}{2} + C \\ v = \frac{1}{(p-1)^2} & \end{array}$$

$$x(p) = (-(p-1)^2 + C)\frac{1}{(p-1)^2} = -1 + \frac{C}{(p-1)^2},$$

$$y(p) = xp^2 + p^2.$$

Kako je $(p-1)^2 = \frac{C}{x+1}$, to je $p = 1 + \frac{C}{x+1}$, što zamenom u $y = y(p)$ daje opšte rešenje

$$y = x + 1 + \frac{C^2}{x+1} + 2C.$$

u eksplicitnom obliku.

Singularna rešenje adobijamo za $p = 0$ i $p = 1$. Ako je $p = 0$, onda je singularno rešenje $y = 0$. Ako je $p = 1$, dobijamo $y = x + 1$.

5.3 Diferencijalne jednačine višeg reda

5.3.1 Snižavanje reda diferencijalne jednačine

Rešenja nekih diferencijalnih jednačina se mogu odrediti rešavanjem odredjenih diferencijalnih jednačina nižeg reda.

- $\boxed{y^{(n)} = f(x).}$

  Neka je f neprekidna u (a, b). Tada je

  $$\begin{array}{l} y^{(n-1)} = \int f(x)dx = f_1(x) + C_1 \\ y^{(n-2)} = \int (f_1(x) + C_1) = f_2(x) + C_1x + C_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y(x) = f_n(x) + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}x + C_n. \end{array}$$

- $\boxed{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0}$

  Uvodjenjem smene $z = y^{(k)}$ data jednačina se svodi na diferencijalnu jednačinu
$$F(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-k)}) = 0,$$
  koja je reda $n - k$.

- $\boxed{F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0}$

  Data diferencijalna jednačina ne sadrži x. Smenom $y' = z$,ako pretpostavimo da je y nezavisna promenljiva, dobijamo
$$\begin{aligned} y'' &= \tfrac{dz}{dx} = \tfrac{dz}{dy}\tfrac{dy}{dx} = z\tfrac{dz}{dy}, \\ y''' &= \tfrac{d}{dx}(z\tfrac{dz}{dy}) = z(\tfrac{dz}{dy})^2 + z^2\tfrac{d^2z}{dy^2}, \\ &\ldots \end{aligned}$$
  Zamenom u polaznu jednačinu dobijamo
$$G(y, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0$$
  koja je reda $n - 1$.

5.3.2 Linearne diferencijalne jednačine reda n

Opšti oblik linearne diferencijalne jednačine reda n je
$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = f(x),} \tag{5.16}$$
gde su f i $a_1, \ldots, a_n$ neprekidne funkcije na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Teorema 5.3.1 *Neka su $a_1, \ldots, a_n$ i f neprekidne funkcije nad I, $x_0 \in I$ i $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Tada postoji jedinstveno rešenje y, definisano nad I, diferencijalne jednačine (5.16), koje zadovoljava početne uslove*
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

5.3.3 Homogene linearne diferencijalne jednačine reda n

Opšti oblik homogene linearne diferencijalne jednačine reda n je
$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = 0,} \tag{5.17}$$
gde su f i $a_1, \ldots, a_n$ neprekidne funkcije na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Ako uvedemo operator

$$L_n[y] = y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x)$$

onda je prethodna diferencijalna jednačina oblika $L[y] = 0$. Na osnovu osobina izvoda možemo zaključiti da je operator L linearan, što je formulisano sledećom lemom.

Lema 5.3.1 *Neka su y_1 i y_2 n puta neprekidno diferencijalbilne funkcije na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada važi*

$$L_n\left[C_1y_1 + C_2y_2\right] = C_1L_n\left[y_1\right] + C_2L_n\left[y_2\right].$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
&L_n\left[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\right] \\
&= (C_1y_1(x) + C_2y_2(x))^{(n)} + a_1(x)(C_1y_1(x) + C_2y_2(x))^{(n-1)} + \ldots \\
&\quad + a_n(x)(C_1y_1(x) + C_2y_2(x)) \\
&= C_1\left(y_1^n(x) + a_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y_1(x)\right) + \\
&\quad C_2\left(y_2^n(x) + a_1(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y_2(x)\right).
\end{aligned}$$

□

Direktna posledica prethodne leme jeste da je linearna kombinacija rešenja posmatrane jednačine ponovo rešenje te jednačine.

Teorema 5.3.2 *Neka su $y_1, y_2, \ldots, y_k$ rešenja diferencijalne jednačine* 5.17 *na nekom intervalu I. Tada je je za sve $C_1, C_2, \ldots, C_k \in \mathbb{R}$ funkcija*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ky_k(x)$$

rešenje jednačine 5.17 *na I.*

Dokaz. Ako su y_1 i y_2 rešenja jednačine 5.17, onda je

$$L_n[y_1] = 0 \quad \text{i} \quad L_n[y_2] = 0 \ldots \text{ i } \qquad L_n[y_k] = 0.$$

Sada za funkciju $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ky_k$ važi sledeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
L_n[y(x)] &= L_n[C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ky_k(x)] \\
&= C_1L_n[y_1] + C_2L_n[y_2] + \ldots + C_kL_n[y_k] = 0.
\end{aligned}$$

□

Definicija 5.3.1 *Neka je $n \geq 2$ i neka su $y_1, \ldots, y_n$ rešenja jednačine 5.17. Determinanta Wronskog (ili Wronskijeva determinanta) rešenja $y_1, \ldots, y_n$ u tački x je*

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & & \ldots & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Teorema 5.3.3 *Neka su $y_1, \ldots, y_n$ rešenja jednačine (5.17). Multiskup rešenja $\{\{y_1, \ldots, y_n\}\}$ je linearno nezavisan ako i samo ako za svako $x \in I$ važi*

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0.$$

Dokaz.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $\{\{y_1, \ldots, y_n\}\}$ linearno nezavisan multiskup rešenja 5.17 i da postoji $x_0 \in I$ sa osobinom $W(y_1, \ldots, y_n)\ (x_0) = 0$. Posmatrajmo homogen sistem jednačina (sa nepoznatim $C_1, \ldots, C_n$):

$$\begin{array}{rcrcccrcl} y_1(x_0)C_1 & + & y_2(x_0)C_2 & + & \ldots & + & y_n(x_0)C_n & = & 0 \\ y_1'(x_0)C_1 & + & y_2'(x_0)C_2 & + & \ldots & + & y_n'(x_0)C_n & = & 0 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \\ y_1^{(n-1)}(x_0)C_1 & + & y_2^{(n-1)}(x_0)C_2 & + & \ldots & + & y_n^{(n-1)}(x_0)C_n & = & 0. \end{array}$$

Determinanta posmatranog sistema je

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) = 0.$$

Ako je determinanta homogenog sistema jednaka nuli, onda sistema ima bar još jedno rešenje $(C_1, \ldots, C_n)$ osim trivijalnog rešenja, tj. za to rešenje važi $(C_1, \ldots, C_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Neka je sada

$$\varphi(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Iz posmatranog sistema jednačina sledi da je

$$\varphi(x_0) = 0, \varphi'(x_0) = 0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Kako iste uslove zadovoljava i funkcija $\phi(x) = 0$, $x \in I$, na osnovu jedinstvenosti rešenja početnog problema sledi da je $\varphi = \phi$, tj. da je

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) = 0, \text{ za svako } x \in I.$$

što je u suprotnosti sa pretpostvakom da je $\{\{y_1, \ldots, y_n\}\}$ linearno nezavisan. Zaključujemo da polazna pretpostavka nije tačna i da važi $W(x) \neq 0$ za svako $x \in I$.
($\Leftarrow$) Neka je $W(x) \neq 0$ za svako $x \in I$. Pretpostavimo da je $\{\{y_1, \ldots, y_n\}\}$ linearno zavisan. Tada postoje konstante $C_1, \ldots, C_n$ za koje važi $(C_1, \ldots, C_n) \neq (0, \ldots, 0)$ i za svako $x \in I$ važi

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1(x)C_1 & + & y_2(x)C_2 & + & \ldots & + & y_n(x)C_n & = & 0 \\ y_1'(x)C_1 & + & y_2'(x)C_2 & + & \ldots & + & y_n'(x)C_n & = & 0 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \\ y_1^{(n-1)}(x)C_1 & + & y_2^{(n-1)}(x)C_2 & + & \ldots & + & y_n^{(n-1)}(x)C_n & = & 0. \end{array}$$

Međutim, za svako $x \in I$ prethodni sistem linearnih jednačina ima determinantu $W(x) \neq 0$, što znači da sistem ima jedinstveno rešenje $(C_1, \ldots, C_n) = (0, \ldots, 0)$, što dovodi do kontradikcije. Dakle, naša pretpostavka da je multiskup rešenja linearno zavisan nije tačna. □

Definicija 5.3.2 *Fundamentalni skup rešenja je linearno nezavisan skup od n rešenja jednačine (5.17), tj. baza vektorskog prostora rešenja jednačine (5.17).*

Lema 5.3.2 (Formula Liouvillea, (Abela)) *Ako je $x_0 \in I$, tada je*

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)dt}, \quad x \in I.$$

Teorema 5.3.4 *Neka je $\{y_1, \ldots, y_n\}$ fundamentalni skup rešenja jednačine (5.17). Tada je opšte rešenje y jednačine (5.17) dato sa*

$$\boxed{y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.}$$

Dokaz. Pretpostavimo je $y(x)$ rešenje diferencijalne jednačine 5.17 koje zadovoljava početni problem

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)} = y_{n-1}.$$

Posmatrajmo sada sistem

$$\begin{array}{ccccccccc} C_1 y_1(x_0) & + & C_2 y_2(x_0) & + & \ldots & + & C_n y_n(x_0) & = & y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) & + & C_2 y_2'(x_0) & + & \ldots & + & C_n y_n'(x_0) & = & y_1 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \ldots & & & \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & + & \ldots & + & C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1} \end{array}.$$

Determinanta prethodnog sistema je $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0)$. Kako je $\{\{y_1, \ldots, y_n\}\}$ linearno nezavisan, i važi $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$. U tom slučaju je posmatrani sistem određen i za tako dobijene konstante funkcija

$$g(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots, C_n y_n(x)$$

zadovoljava zadate početne uslove. Zbog jedinstvenosti rešenjea zaključujemo da je $y = g$. □

5.3.4 Homogene linearne diferencijalne jednačine reda n sa konstantnim koeficijentima

U ovom delu razmtramo diferencijalne jednačine kod koji su koeficijenti $a_1, \ldots, a_n$ realne konstante.

Opšti oblik homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = 0, \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.} \tag{5.18}$$

Jednačinu rešavamo uvođenjem smene $y = e^{kx}$. Tada je

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \ \ldots y^{(n)}(x) = k^n e^{kx} \tag{5.19}$$

i zamenom u jednačinu (5.19) dobijamo

$$k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + \ldots + a_n k e^{kx} = 0.$$

Kako za svako $x \in \mathbb{R}$ važi $e^{kx} \neq 0$, rešenje dobijamo za

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \tag{5.20}$$

Kažemo da je

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

karakteristična jednačina diferencijalne jednačine (5.19).

Neka su $k_1, \ldots, k_n$ rešenja karakteristične jednačine. Fundamentalni skup rešenja $\{y_1, \ldots, y_n\}$ jednačine 5.19 ćemo formirati u zavisnosti od korena karakteristične jednačine na sledeći način:

(1) Ako je k_i realan koren karakteristične jednačine višestrukosti m, $m \geq 1$, onda su funkcije $y_{i_1}, \ldots, y_{i_m}$, definisane sa

$$\begin{array}{lll} y_{i_1} & := & e^{k_i x}, \\ y_{i_2} & := & x e^{k_i x}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{i_m} & := & x^{m-1} e^{k_i x}, \end{array}$$

rešenja jednačine (5.19).

(2) Ako je $k_i = a + ib$ kompleksni koren karakteristične jednačine višestrukosti m, $m \geq 1$, onda su funkcije $y_{i_1}, \ldots, y_{i_m}, y_{i_{m+1}}, \ldots, y_{2m}$, definisane sa

$$\begin{array}{lllclll} y_{i_1} & := & e^{ax} \cos bx & \quad & y_{i_{m+1}} & := & e^{ax} \sin bx \\ y_{i_2} & := & x e^{ax} \cos bx & & y_{i_{m+2}} & := & x e^{ax} \sin bx \\ \ldots & & \ldots & & & & \\ y_{i_m} & := & x^{m-1} e^{ax} \cos bx & & y_{i_{2m}} & := & x^{m-1} e^{ax} \sin bx \end{array}$$

rešenja jednačine (5.19).

Primer 5.3.1 *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine*

(a) $y'' - y = 0$

(b) $y''' + y = 0$

(c) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$

Rešenje.

(a) Karakteristična jednačina:

$$k^2 - k = 0 \Leftrightarrow k(k-1) = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0, k_2 = 1.$$

Opšte rešenje:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^x.$$

(b) Karakteristična jednačina:

$$k^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (k+1)(k^2 - k + 1) = 0 \Leftrightarrow k_1 = -1, k_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Opšte rešenje:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

(c) Karakteristična jednačina:

$$k^4 + 8k^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow (k^2+4)^2 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = 2i, k_{3,4} = -2i.$$

Opšte rešenje:

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 x \sin 2x.$$

□

5.3.5 Linearne diferencijalne jednačine reda n sa konstantnim koeficijanetima

Opšti oblik linearne diferencijalne jednačine sa kostantnim koeficijentima je

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.} \tag{5.21}$$

Teorema 5.3.5 *Neka je $y_p(x)$ jedno partikularno rešenje jednačine (5.21) i $y_h(x)$ rešenje odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$. Tada je opšte rešenje jednačine (5.21)*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Metod varijacije konstanti.

Neka je $\{y_1, \dots, y_n\}$ fundamentalni skup rešenja odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine. Tada je

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

opšte rešenje jednačine (5.21), gde je $(c_1(x), \dots, c_n(x))$ rešenje sistema jednačina

$$\begin{array}{ccccccccc}
y_1(x)c_1'(x) & + & y_2(x)c_2'(x) & + & \dots & + & y_n(x)c_n'(x) & = & 0 \\
y_1'(x)c_1'(x) & + & y_2'(x)c_2'(x) & + & \dots & + & y_n'(x)c_n'(x) & = & 0 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \\
y_1^{(n-1)}(x)c_1'(x) & + & y_2^{(n-1)}(x)c_2'(x) & + & \dots & + & y_n^{(n-1)}(x)c_n'(x) & = & f(x)
\end{array}$$

Primer 5.3.2 *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y'' - y = \frac{1}{1+e^x}.$$

Rešenje.
Odgovarajuća homogena diferencijalna jednačina je

$$y'' - y = 0,$$

a njena karakteristična jednačina je

$$k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (k+1)(k-1) = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1, k_2 = -1,$$

odakle je njeno rešenje

$$y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Opšte rešenje ćemo odrediti metodom varijacije konstanti.

$$\begin{array}{ccccc}
e^xC_1' & + & e^{-x}C_2' & = & 0 \\
e^xC_1' & - & e^{-x}C_2' & = & \frac{1}{1+e^{-x}}
\end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccc}
e^xC_1' & + & e^{-x}C_2' & = & 0 \\
2e^xC_1' & & & = & \frac{1}{1+e^{-x}}
\end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccc}
e^xC_1' & + & e^{-x}C_2' & = & 0 \\
C_1' & & & = & \frac{e^{-x}}{2(1+e^{-x})}
\end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccc}
e^x\frac{e^{-x}}{2(1+e^{-x})} & + & e^{-x}C_2' & = & 0 \\
C_1 & & & = & \int \frac{e^{-x}}{2(1+e^{-x})}dx
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
C_1(x) = \int \frac{e^{-x}}{2(1+e^{-x})}dx = -\frac{1}{2}\ln|1+e^{-x}| + C_1 \\
C_2(x) = -\int \frac{e^{2x}}{2(1+e^x)}dx = -\frac{1}{2}(e^x+1) + \frac{1}{2}\ln|e^x+1| + C_2.
\end{array}$$

Opšte rešenje zadate diferencijalne jednačine je

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} = \Big(-\frac{1}{2}\ln|1+e^{-x}| + C_1\Big)e^x + \Big(-\frac{1}{2}(e^x+1) + \frac{1}{2}\ln|e^x+1| + C_2\Big)e^{-x} \\ &= C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}e^x\ln|1+e^{-x}| - \frac{1}{2}(e^{-x}+1) + \frac{1}{2}e^{-x}\ln|e^x+1|. \end{aligned}$$

□.

Metod jednakih koeficijenata.

Neka je P polinom stepena k, Q polinom stepena m i f oblika

$$f(x) = e^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx).$$

Tada je partikularno rešenje je oblika

$$y_p(x) = x^l e^{ax}(T(x)\cos bx + R(x)\sin bx),$$

gde su T i R polinomi stepena $max\{m, k\}$ sa neodred–enim koeficijentima, a l je višestrukost korena $a + bi$ karakteristične jednačine (ako $a + bi$ nije koren karakteristične jednačine, uzimamo $l = 0$).

Diferenciranjem funkcije $y_p(x)$ n puta i uvrštavanjem u polaznu jednačinu dobijamo koeficijente nepoznatih polinoma T i R, a samim tim i partikularno rešenje polazne diferencijalne jednačine.

Teorema 5.3.6 *Neka je y_1 partikularno rešenje jednačine $L_n[y] = f_1(x)$ i y_2 partikularno rešenje jednačine $L_n[y] = f_2(x)$. Tada je $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ partikularno rešenje jednačine $L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$.*

Primer 5.3.3

Rešenje. □

5.3.6 Ojlerova diferencijalna jednačina

Ojlerova diferencijalna jednačina je nehomogena linearna diferencijalna jednačina oblika

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x),$$

$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Uvod–enjem smene $ax + b = e^t$, (onda je $t = \ln|ax+b|$ i $\frac{dt}{dx} = \frac{a}{ax+b} = ae^{-t}$) Ojlerova diferencijalna jednačina se svodi na diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima. Uvešćemo oznaku $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ i $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$.

$$\begin{array}{lcll} \frac{dy}{dx} &=& \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{a}{ax+b} & \Rightarrow \; y' = ae^{-t}\frac{dy}{dt} = ae^{-t}\dot{y} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &=& \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = (-ae^{-t}\dot{y} + ae^{-t}y)\ddot{a}e^{-t} & \Rightarrow \; y'' = a^2e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) \\ \cdots & & \cdots & \end{array}$$

Primer 5.3.4 *Rešiti Ojlerovu diferencijalnu jednačinu drugog reda*

$$x^2y'' + xy' + y = x$$

za $x > 0$.

Rešenje:
Odgovarajuća smena je $x = e^t$, odakle je $y' = e^{-t}\dot{y}$ i $y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$. Kada to zamenimo u polaznu diferencijalnu jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned}
&e^{2t}e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) + e^t e^{-t}\dot{y} + y = e^t \\
&\ddot{y} + y = e^t
\end{aligned}$$

Odgovarajuća homogena diferencijalna jednačina je $\ddot{y} + y = 0$ i rešenja njene karakteristične jednačine $k^2 + 1 = 0$ su $k_1 = i$ i $k_2 = -i$, odakle je $y_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.

Partikularno rešenje tražimo u obliku $y_p = Ae^t$. Kako je $y_p' = y_p'' = Ae^t$, sledi da je $A = \frac{1}{2}$, tj. $y_p = \frac{1}{2}e^t$.

Tako je

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2}e^t$$

i vraćanjem smene $x = e^t$ je

$$y(x) = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + \frac{1}{2}x.$$

□

5.4 Primena diferencijalnih jednačina

5.4.1 Harmonijsko oscilovanje.

Pretpostavimo da se materijalna tačka mase m kreće pod delovanjem elastične sile $F = -rx$, gde je k konstanta i $r > 0$. Označimo sa $\varphi = \varphi(t)$ udaljenost materijalne tačke u trenutku t od položaja u kojem miruje. Prema drugom Njutnovom zakonu je

$$m\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -r\varphi, \quad \text{tj.} \quad m\varphi'' + r\varphi = 0 \quad \text{odnosno}$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \qquad \text{gde je } \omega^2 = \frac{r}{m}.$$

Dobili smo homogenu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima. Odgovarajuća karakteristična jednačina je

$$k^2 + \omega^2 = 0$$

i njeni koreni su $k_1 = \omega i$ i $k_2 = -\omega i$. Rešenje date jednačine je

$$\varphi(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Rešenje početnog problema $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi'(0) = 0$ je

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega t.$$

5.4.2 Prigušeno oscilovanje.

Pretpostavimo da na materijalnu tačku deluje dodatno i sila $F = -\beta\varphi'$, $\beta > 0$ koja koči njeno kretanje. Tada je

$$m\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -r\varphi - \beta\frac{d\varphi}{dt}, \quad \text{tj. } m\varphi'' + \beta\varphi' + r\varphi = 0, \quad \text{odnosno}$$

$$\varphi'' + 2\gamma\varphi' + \omega^2\varphi = 0, \qquad 2\gamma = \frac{\beta}{m} \quad , \omega^2 = \frac{r}{m}.$$

Opet smo dobili homogenu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima čija karakteristična jednačina je

$$k^2 + 2\gamma k + \omega = 0.$$

5.4.3 Prinudno oscilovanje

Dalju modifikaciju dobijamo ako pretpostavimo da na materijalnu tačku deluje još i spoljašnja sila g koja se menja u zavisnosti od vremena t. Tada je

$$m\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -r\varphi - \beta\frac{d\varphi}{dt} + g(t), \quad \text{tj. } m\varphi'' + \beta\varphi' + r\varphi = g(t), \quad \text{odnosno}$$

$$\varphi'' + 2\gamma\varphi' + \omega^2\varphi = f(t), \qquad 2\gamma = \frac{\beta}{m} \quad , \omega^2 = \frac{r}{m} \quad \text{i } f(t) = \frac{g(t)}{m}.$$

Ovim smo dobili nehomogenu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima.