Chapter 6

Laplasove transformacije

Definicija 6.0.1 *Neka je $s \in \mathbb{C}$ i neka je $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$. Laplasova transformacija funkcije f jeste funkcija (kompleksne promenljive) F definisana na sledeći način:*

$$\boxed{F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,} \tag{6.1}$$

Pišemo,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s).$$

Podsećamo čitaoca da je (6.1) nesvojstveni integral, definisan sa

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

Kažemo da Laplasova transformacija postoji ako postoji $s \in \mathbb{C}$ za koji integral (6.1) konvergira.
Ako je $F = F(s)$ Laplasova transformacija funkcije $f = f(t)$, tj. $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, onda se kaže da je f inverzna Laplasova transformacija funkcije F i piše se

$$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}}$$

i kaže se da je $\mathcal{L}^{-1}$ operator inverzne Laplasove transformacije.

Tablica Laplasovih transformacija Izvešćemo, po definiciji, Laplasove transformacije nekih elementarnih funkcija.

1. $f(t) = c$, $c \in \mathbb{C}$

Prema (6.1),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c\} &= \int_0^\infty c\cdot e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T c\cdot e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\left(-\tfrac{c}{s}e^{-st}\right)\Big|_{t=0}^{t=T}\\ &= \tfrac{c}{s}\left(1-\lim_{T\to\infty}e^{-sT}\right).\end{aligned}$$

Za $s=\alpha+i\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, važi

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}e^{-sT} &= \lim_{T\to\infty}e^{-(\alpha+i\beta)T} = \lim_{T\to\infty}e^{-\alpha T}e^{-i\beta T}\\ &= \lim_{T\to\infty}e^{-\alpha T}(\cos\beta T - i\sin\beta T)\\ &= \lim_{T\to\infty}e^{-\alpha T}\cos\beta T - i\lim_{T\to\infty}e^{-\alpha T}\sin\beta T.\end{aligned}$$

Granične vrednosti $\lim\limits_{T\to\infty}e^{-\alpha T}\cos\beta T$ i $\lim\limits_{T\to\infty}e^{-\alpha T}\sin\beta T$ postoje za $\alpha>0$ i tada važi

$$\lim_{T\to\infty}e^{-\alpha T}\cos\beta T = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{T\to\infty}e^{-\alpha T}\sin\beta T = 0.$$

Znači, Laplasova transformacija funkcije $f(t)=c$ jeste funkcija

$$F(s)=\frac{c}{s}, \qquad Re(s)>0.$$

2. $f(t)=t^n$, $n\geq 1$

Dokazaćemo indukcijom da je $F(s)=\frac{n!}{s^{n+1}}$.

$n=1:$

Prema (6.1),

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty te^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T te^{-st}dt.$$

Primenom parcijalne integracije, uvodeći smenu

$$\begin{array}{ll} u=t & dv=e^{-st}dt\\ du=dt & v=-\frac{1}{s}e^{-st}\end{array}$$

dobijamo

$$\mathcal{L}\{t\} = \lim_{T\to\infty}\left(-\tfrac{1}{s}te^{-st}-\tfrac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big|_{t=0}^{t=T} = \tfrac{1}{s^2}-\lim_{T\to\infty}\left(\tfrac{1}{s}Te^{-sT}+\tfrac{1}{s^2}e^{-sT}\right).$$

Za $Re(s)>0$ postoji granična vrednost $\lim\limits_{T\to\infty}Te^{-sT}$ i važi

$$\lim_{T\to\infty}Te^{-sT}=0.$$

Znači, Laplasova transformacija funkcije $f(t)=t$ jeste funkcija

$$F(s)=\frac{1}{s^2}, \qquad Re(s)>0.$$

$T_{n-1} \Rightarrow T_n$:

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \int\limits_0^\infty t^n e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T t^n e^{-st}dt$$

Primenom parcijalne integracije, uvodeći smenu

$$\begin{array}{ll} u = t^n & dv = e^{-st}dt \\ du = nt^{n-1}dt & v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{array}$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{t^n\right\} &= \lim_{T\to\infty} \left(-\tfrac{1}{s} t^n e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=T} + \tfrac{n}{s} \int\limits_0^T t^{n-1}e^{-st}dt \right) \\ &= \tfrac{n}{s} \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T t^{n-1}e^{-st}dt = \tfrac{n}{s} \int\limits_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt == \tfrac{n}{s}\mathcal{L}\left\{t^{n-1}\right\}. \end{aligned}$$

Prema induktivnoj pretpostavci,

$$F(s) = \frac{n}{s} \cdot \frac{(n-1)!}{s^n} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

3. $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{C}$

   Prema (6.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} &= \int\limits_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int\limits_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = -\tfrac{1}{s-a} \lim_{T\to\infty} e^{-(s-a)t}\Big|_{t=0}^{t=T} \\ &= \tfrac{1}{s-a}\left(1 - \lim_{T\to\infty} e^{-(s-a)T}\right). \end{aligned}$$

   Ako je $Re(s-a) > 0$, onda je $\lim\limits_{T\to\infty} e^{-(s-a)T} = 0$. Odatle sledi da je

$$F(s) = \frac{1}{s-a}, \quad Re(s) > Re(a).$$

Egzistencija

Definicija 6.0.2 *Neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija f eksponencijalnog reda γ kada $t \to \infty$ ako postoje realni brojevi $M > 0$ i γ takvi da za svako $t > a$ važi nejednakost*

$$|f(t)| < Me^{\gamma t}$$

Teorema 6.0.1 *Ako je funkcija f po delovima neprekidna na svakom zatvorenom intervalu $[0,T]$ i eksponencijalnog reda γ za $t \to \infty$, onda postoji Laplasova transformacija funkcije f.*

Dokaz. Primetimo prvo da važi

$$\int\limits_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int\limits_0^a e^{-st}f(t)dt + \int\limits_a^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Kako je po pretpostavci funkcija f po delovima neprekidna na intervalu $[0,T]$, prvi integral sa desne strane jednakosti postoji. Za drugi integral sa desne strane jednakosti važi:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^\infty e^{-st}f(t)dt\right| &\leq \int_a^\infty |e^{-st}f(t)|dt = \int_a^\infty e^{-st}|f(t)|dt \\
&\leq \int_a^\infty e^{-st}Me^{\gamma t}dt = M\lim_{T\to\infty}\int_a^T e^{(\gamma-s)t}dt \\
&= \frac{M}{\gamma-s}\lim_{T\to\infty} e^{(\gamma-s)t}\Big|_{t=0}^{t=T} = \frac{M}{s-\gamma}
\end{aligned}$$

Odatle direktno sledi da za svako $Re(s) > \gamma$ dati integral konvergira, čime smo dokazali da postoji Laplasova transformacija funkcije f. □

6.1 Osobine Laplasove transformacije

U ovom delu ćemo dokazati neke osnovne osobine Laplasovih transformacija i uz pomoć njih ćemo proširiti dobijenu tablicu.

Linearnost Laplasova transofrmacija je linearna transformacija, što je formulisano sledećim tvrđenjem.

Teorema 6.1.1 *Neka je $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ i $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$. Za sve kompleksne brojeve a i b važi*

$$\boxed{\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}}.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}(af(t)+bg(t))dt \\
&= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt \\
&= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.
\end{aligned}$$

□

Primer 6.1.1 *Izračunati* $\mathcal{L}\left\{5+4t+3e^{2t}\right\}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{5+4t+3e^{2t}\right\} &= 5\mathcal{L}\left\{1\right\}+4\mathcal{L}\left\{t\right\}+3\mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\}\\ &= \frac{5}{s}+\frac{4}{s^2}+\frac{3}{s-2}\end{aligned}$$

□

Primer 6.1.2 *Izračunati* $\mathcal{L}\left\{\operatorname{ch} t\right\}$ *i* $\mathcal{L}\left\{\operatorname{sh} at\right\}$.

Rešenje. Koristeći Ojlerove formule $\operatorname{ch} at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$ i $\operatorname{sh} at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$, dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\operatorname{sh} at\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\}=\frac{\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}-\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right)=\frac{a}{s^2+a^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\operatorname{ch} at\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\}=\frac{\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}+\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right)=\frac{s}{s^2+a^2}.\end{aligned}$$

□

Primer 6.1.3 *Izračunati* $\mathcal{L}\left\{\cos t\right\}$ *i* $\mathcal{L}\left\{\sin t\right\}$.

Rešenje. Koristeći Ojlerovu formulu

$$e^{ati}=\cos(at)+i\sin(at).$$

na osnovu osobine linearnosti, sledi

$$\mathcal{L}\left\{e^{ati}\right\}=\mathcal{L}\left\{\cos(at)\right\}+i\mathcal{L}\left\{\sin(at)\right\}.$$

Imajući u vidu da smo po definiciji izveli da je $\mathcal{L}\left\{e^{ti}\right\}=\frac{1}{s-i}$, dobijamo

$$\mathcal{L}\left\{e^{ti}\right\}=\frac{1}{s-i}\frac{s+i}{s+i}=\frac{s+i}{s^2-1}=\frac{s}{s^2+1}+i\frac{1}{s^2+1}.$$

odakle je

$$\mathcal{L}\left\{\cos(at)\right\}+i\mathcal{L}\left\{\sin(at)\right\}=\frac{s}{s^2+1}+i\frac{1}{s^2+1}.$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova, dobijamo

$$\mathcal{L}\left\{\cos(at)\right\}=\frac{s}{s^2+1}\quad \text{i}\quad \mathcal{L}\left\{\sin(at)\right\}=\frac{1}{s^2+1}.$$

□

Sličnost

Teorema 6.1.2 *Neka je* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *i* $a \in \mathbb{R}^+$. *Tada je*

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(at\} = \tfrac{1}{a}F\left(\tfrac{s}{a}\right).}$$

Dokaz. Uvodjenjem smene $u = at$ dobijamo $du = adt$ i važi

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u)du = \frac{1}{a}F\Big(\frac{s}{a}\Big)$$

Primer 6.1.4 *Naći Laplasovu transformaciju funkcije* $\mathcal{L}\{\sin(at)\}$.

Rešenje. Neka je $F(s) = \mathcal{L}\{\sin t\}$, tj. $F(s) = \frac{1}{1+s^2}$. Tada je

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{1}{1+(\frac{s}{a})^2} = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

□

Translacija

Teorema 6.1.3 *Neka je* $h(t) = \begin{cases} f(t-a) & , t \geq a \\ 0 & , 0 \leq t < a. \end{cases}$ *jde je* f *funkcija sa osobinom* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. *Tada je*

$$\boxed{\mathcal{L}\{h(t)\} = e^{-as}F(s).}$$

Dokaz. Uvodjenjem smene $u = t - a$, dobijamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{h(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}h(t)dt = \int_0^a e^{-st}h(t)dt + \int_a^\infty e^{-st}h(t)dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-s(u+a)}f(u)du \\ &= e^{-sa}\int_a^\infty e^{-su}f(u)du = e^{-sa}F(s). \end{aligned}$$

Primer 6.1.5 *Odrediti Laplasovu transformaciju funkcije* $f(t) = (t-3)^2$.

Rešenje.

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{(t-3)^2\right\} = e^{-3s}\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = e^{-3s}\frac{2}{s^3}$$

□

Prigušenje

Teorema 6.1.4 *Neka je $\mathcal{L}\{F(t)\} = F(s)$. Tada je*

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad a \in \mathbb{C}} \tag{6.2}$$

Dokaz.

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = \int\limits_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int\limits_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a)$$

□

Primer 6.1.6 *Odrediti Laplasovu transformaciju funkcije $f(t) = e^{-2t}\sin 3t$.*

Rešenje. Kako za $f(t) = \sin 3t$ važi

$$F(s) = \mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2+9},$$

dobijamo

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{e^{-2t}\sin 3t\right\} = \frac{3}{(s+2)^2+9} = \frac{3}{s^2+4s+13}$$

□

Diferenciranje originala

Teorema 6.1.5 *Neka je $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.*

(*a*) $\boxed{\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)}$

(*b*) $\boxed{\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)}$

(*c*) $\boxed{\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), n \geq 1.}$

Dokaz.

(a) Koristeći parcijalnu integraciju, sa $u = e^{-st}$, $dv = f'(t)dt$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int\limits_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T e^{-st}f'(t)dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\left(e^{-st}f(t)\Big|_{t=0}^{t=T} + s\int\limits_0^T e^{-st}f(t)dt\right) \\
&= \lim_{T\to\infty}(e^{-sT}f(T) - f(0) + s\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T e^{-st}f(t)dt \\
&= sF(s) - f(0).
\end{aligned}$$

(b) Primenom dva puta rezultata pod (a),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

(c) Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom po n. Baza indukcije je urađena pod (a). Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n-1$. Koristeći rezultat pod (a) i induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} &= s\mathcal{L}\left\{f^{(n-1)}(t)\right\} - f^{(n-1)}(0) \\ &= s\left(s^{n-1}F(s) - s^{n-2}f(0) - \ldots - f^{n-2}(0)\right) - f^{(n-1)}(0) \\ &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{n-2}(0) - f^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

□

Primer 6.1.7 *Odrediti Laplasovu transformaciju funkcije* $f(t) = \cos at$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}F(s) = \mathcal{L}\{\cos at\} &= \mathcal{L}\left\{\left(\frac{1}{a}\sin at\right)'\right\} = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{(\sin at)'\} \\ &= \frac{1}{a}\left(s\frac{a}{s^2+a^2} - 0\right) = \frac{s}{s^2+a^2}.\end{aligned}$$

□

Diferenciranje slike

Teorema 6.1.6 *Neka je* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. *Tada je*

$$(a) \quad \boxed{\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s),}$$

$$(b) \quad \boxed{\mathcal{L}\{t^nf(t)\} = (-1)^nF^{(n)}(s),\ n \geq 1.}$$

Dokaz.

(a) Ako posmatramo izvod slike,

$$\begin{aligned}F'(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}f(t)dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt = -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}.\end{aligned}$$

(b) Dokaz ćemo izvesti primenom matematičke indukcije po n. Baza indukcije je rezultat pod (a). Pretpostavimo da je $\mathcal{L}\left\{t^{n-1}f(t)\right\} = (-1)^{n-1}F^{(n-1)}(s)$. Koristeći rezultat pod (a) i induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} &= -\frac{\partial}{\partial s}\left(\mathcal{L}\left\{t^{n-1}f(t)\right\}\right)\\ &= -\frac{\partial}{\partial s}\left((-1)^{n-1}F^{(n-1)}(s)\right) = (-1)^n F^{(n)}(s).\end{aligned}$$

Primer 6.1.8 *Odrediti Laplasovu transformaciju funkcije $f(t) = te^t$.*

Rešenje.

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{te^t\right\} = -(\mathcal{L}\left\{e^t\right\})' = -\left(\frac{1}{s-1}\right) = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Integracija originala

Teorema 6.1.7 *Neka je $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$.*

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^t f(x)dx\right\} = \tfrac{1}{s}F(s)}$$

Dokaz.

Neka je $h(t) = \int\limits_0^t f(x)dx$. Tada je $h'(t) = f(t)$ i $h(0) = 0$. Primenjujući Laplasovu transformaciju, dobijamo

$$\mathcal{L}\left\{h'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{h(t)\right\} - h(0) = s\mathcal{L}\left\{h(t)\right\} = F(s).$$

Odatle je

$$\mathcal{L}\left\{h(t)\right\} = \frac{F(s)}{s},$$

odnosno

$$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^t f(x)dx\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

Primer 6.1.9 *Odrediti Laplasovu transformaciju funkcije $f(t) = \int\limits_0^t \sin u du$.*

Rešenje.

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{\int\limits_0^t \sin u du\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\sin t\right\} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

Konvolucija Lako se pokazuje da Laplasova transformacija proizvoda funkcija nije jednaka proizvodu Laplasovih transformacija.

Primer 6.1.10

Međutim, postoji binarna operacija koju kada primenimo na neke funkcije Laplasova transformacija daje proizvod njihovih Laplasovih transformacija. Tu operaciju nazivamo jednostranom konvolucijom u intervalu $(0, t)$.

Konvolucija funkcija $f(t)$ i $g(t)$ je funkcija definisana sa

$$\boxed{(f * g)(t) = \int_0^t f(u) \cdot g(t-u)du} \tag{6.3}$$

Teorema 6.1.8 *Neka je $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ i $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$. Tada je*

$$\boxed{\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}}$$

Dokaz. Vidi Zadatak 6. □

Primer 6.1.11 *Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju funkcije $F(s) = \frac{1}{(s^2+a^2)^2}$.*

Rešenje. Kako je $\frac{1}{(s^2+a^2))^2} = \frac{1}{s^2+a^2} \cdot \frac{1}{s^2+a^2}$ i $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{1}{a}\sin(at)$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right\} \\
&= \frac{1}{a^2}\int\limits_0^t \sin(au)\sin(a(t-u))du \\
&= \frac{1}{a^2}\int\limits_0^T \sin(au)(\sin(at)\cos(au)-\cos(at)\sin(au))du \\
&= \frac{1}{a^2}\sin(at)\int\limits_0^T \sin(au)\cos(au)du - \frac{1}{a^2}\cos(at)\int\limits_0^T \sin^2(au)du \\
&= \frac{1}{a^2}\sin(at)\int\limits_0^T \frac{\sin(2au)}{2}du - \frac{1}{a^2}\cos(at)\int\limits_0^T \frac{1-\cos(2au)}{2}du \\
&= \frac{1}{a^2}\sin(at)\frac{\sin^2(at)}{2a} - \frac{1}{a^2}\cos(at)(\frac{1}{2}t - \frac{\sin(at)\cos(at)}{2a}) \\
&= \frac{1}{2a^3}(\sin^3(at) - at\cos(at) + \sin(at)\cos^2(at)) \\
&= \frac{1}{2a^3}(\sin(at) - at\cos(at))
\end{aligned}
$$

□

6.2 Heavisideov razvoj

Teorema 6.2.1 *Neka su $P = P(s)$ i $Q = Q(s)$ polinomi stepena m i n, respektivno, za koje važi da je $m < n$ i Q ima n medjusobno različitih korena $s_1, \ldots, s_n$. Tada je*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)}e^{s_1 t} + \frac{P(s_2)}{Q'(s_2)}e^{s_2 t} + \ldots + \frac{P(s_n)}{Q'(s_n)}e^{s_n t}.$$

Dokaz. Vidi Zadatak 7. □

Primer 6.2.1 *Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju funkcije* $F(s) = \frac{2s+1}{s^3-6s^2+11s-6}$.

Rešenje.
Zadata funkcija se može zapisati u obliku

$$F(s) = \frac{2s+1}{(s-1)(s-2)(s-3)}.$$

Neka je $P(s) = 2s+1$ i $Q(s) = s^3-6s^2+11s-6$. Tada je $Q'(s) = 3s^2-12s+11$, odakle je $Q'(1) = 2$, $Q'(2) = -1$ i $Q'(3) = 2$.

Heavisideov razvoj date funkcije je

$$F(s) = \frac{3}{2}\frac{1}{s-1} - 5\frac{1}{s-2} + \frac{7}{2}\frac{1}{s-3},$$

odakle je

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{3}{2}e^t - 5e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}.$$

□

6.3 Neke specijalne funkcije

6.3.1 Heavisideova funkcija

Funkcija definisana sa $\boxed{h_a(t) = \begin{cases} 0 & ,t < a \\ 1 & ,t \geq a \end{cases}}$ se naziva **Heavisideova funkcija.**

Primer 6.3.1 *Izračunati Laplasovu transformaciju Heavisideove funkcije.*

Rešenje.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{h_a(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}h_a(t)dt = \int_0^a e^{-st}h_a(t)dt + \int_a^\infty e^{-st}h_a(t)dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\int_a^T e^{-st}dt = -\frac{1}{s}\lim_{T\to\infty}(e^{-sT} - e^{-sa}) = \frac{1}{s}e^{-sa} \end{aligned}$$

□

6.3.2 Gama funkcija

Funkcija Γ definisana sa

$$\boxed{\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{t-1}du}$$

za sve vrednosti $t > 0$, se naziva **gama funkcija.**

Teorema 6.3.1 *Gama funckija zadovoljava sledeće osobine:*

- $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$;
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$;
- $\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi t}t^t e^{-t}$ **Stirlingova formula**;
- $\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}, \ \ 0 < t < 1.$

Dokaz. Vidi Zadatak 8. □

Primer 6.3.2 *Odrediti Laplasovu transformaciju funkcije $f(t) = t^a$, ako je $a > -1$.*

Rešenje. Ako uvedemo smenu $p = st$, onda je $dt = \frac{1}{s}dp$ i

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^a\} &= \int_0^\infty e^{-st}t^a dt = \int_0^\infty e^{-p}\left(\frac{p}{s}\right)^a \frac{1}{s}dp \\ &= \frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-p}p^a dp = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}.\end{aligned}$$

□

Primer 6.3.3 *Ako je $n \in \mathbb{N}$, onda je $\Gamma(n+1) = n!$. Dokazati.*

Rešenje. Tvrdjenje ćemo dokazati matematičkom indukcijom.
Ako je $n = 1$, onda je

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-u}du = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T e^{-u}du = \lim_{T\to\infty}(-e^{-T}+1) = 1$$

Pretpostavimo da tvrdjenje važi za $n = k-1$, tj. da važi

$$\Gamma(k-1) = (k-2)!.$$

Pokazaćemo da onda tvrdjenje važi i za $n = k$. Kako za Γ funkciju važi da je $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$, koristeći pretpostavku, dobijamo

$$\Gamma(k) = (k-1)\Gamma(k-2) = (k-1)\cdot(k-2)! = (k-1)!.$$

□

6.3.3 Beta funkcija

Funkcija β definisana sa

$$\boxed{\beta(p,q) = \int\limits_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du}$$

za sve $p, q > 0$ se naziva **beta funkcija.**

Teorema 6.3.2 *Za beta i gama funckije važi:*

- $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
- $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\beta(p,q)$.

Dokaz. Vidi Zadatak 9. □

Primer 6.3.4 *Pokazati da je* $\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Rešenje. Ako uvedemo smenu $t = \sqrt{u}$, onda je $u = t^2$, $dt = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$, i

$$\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

□

6.4 Rešavanje običnih diferencijalnih jednačina

6.4.1 sa konstantnim koeficijentima

Diferencijalna jednačina prvog reda

$$\boxed{y'(t) + ay(t) = f(t), \;\; y(0+) = y_0, \;\; a \in \mathbb{R}}$$

Primenom Laplasove transformacije na datu diferencijalnu jednačinu, dobija se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t) + ay(t)\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \\ \mathcal{L}\{y'(t)\} + a\mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \\ sY(s) - y(0+) + aY(s) &= F(s) \\ (s+a)Y(s) &= F(s) + y_0 \\ Y(s) &= \frac{F(s) + y_0}{s+a}. \end{aligned}$$

Diferencijalna jednačina drugog reda

$$y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t), \;\; y(0+) = y_0, \;\; y'(0+) = y_1, \;\; a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

Ako se primeni Laplasova transformacija, onda je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t)\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \\ s^2Y(s) - sy'(0+) - y(0+) + a_1(sY(s) - y(0+)) + a_0Y(s) &= F(s) \\ (s^2 + +a_1s + a_0)Y(s) - sy_1 - y_0 - a_1y_0 &= F(s) \\ Y(s) &= \frac{F(s) + sy_1 + (1+a_1)y_0}{s^2 + +a_1s + a_0}, \end{aligned}$$

Primer 6.4.1 *Rešiti početni problem* $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1.$

Rešenje. Primenimo Laplasovu transformaciju na datu diferencijalnu jednačinu.

$$\mathcal{L}\left\{y'' - 3y' + 2y\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{2x}\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{y''\right\} - 3\mathcal{L}\left\{y'\right\} + 2\mathcal{L}\left\{y\right\} = \frac{1}{s-2}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3sY(s) + 3y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = \frac{1}{s-2} + 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}.$$

Ako je $f(t) = t$, onda je $F(s) = \frac{1}{s^2}$, odakle je $F(s-2) = \frac{1}{(s-2)^2}$. Na osnovu (6.1.4) je onda

$$y(t) = xe^{2x}$$

□

6.4.2 sa promenljivim koeficijentima

Za primenu Laplasove transformacije na običnu diferencijalnu jednačinu sa promenljivim koeficijentima koriste se osobine (6.1.6) i (**??**).

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{t^m y^{(n)}(t)\right\} = (-1)^m \left(\mathcal{L}\left\{y^{(n)}(t)\right\}\right)^{(m)}}$$

Primer 6.4.2 *Naći rešenje diferencijalne jednačine*

$$xy'' + (1-2x)y' - 2y = 0$$

za koje je $y(0) = 1$.

Rešenje. Ako primenimo Laplasovu transformaciju i njene osobine na zadatu jednačinu, onda je

$$-(\mathcal{L}\left\{y''\right\})' + \mathcal{L}\left\{y'\right\} + 2(\mathcal{L}\left\{y'\right\})' - 2\mathcal{L}\left\{y\right\} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-(s^2Y - sy(0) - y'(0))' + sY - y(0) + 2(sY - y(0))' - 2Y = 0 \Leftrightarrow$$

$$-(2sY + s^2Y' - 1) + sY - 1 + 2Y + 2sY' - 2Y = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2s - s^2)Y' - sY = 0,$$

a to je jednačina sa razdvojenim promenljivim, odakle je

$$\frac{dY}{Y} = -\frac{ds}{s-2}$$

$$Y = \frac{C}{s-2}$$

$$y(x) = Ce^{2x} \text{ i } y(0) = 1$$

$$y(x) = e^{2x}.$$

□

6.5 Primena Laplasovih transformacija

6.5.1 Mehanika

6.5.2 Električna kola

6.6 Zadaci za vežbu

1. Odrediti Laplasovu transformaciju funkcije

   (a) $f(t) = \text{ch}(at), \quad a \geq 0,$

   (b) $f(t) = \cos(at), \quad a \geq 0,$

   (c) $f(t) = e^{bt}\cos(at), \quad a \geq 0, \; b \geq 0.$

   Rešenje.

   (a) Kako je $\mathtt{ch}(at) = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$, to je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\mathtt{ch}(at)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}\end{aligned}$$

   (b) Koristeći

$$\cos(at) = \frac{e^{ati}+e^{-ati}}{2},$$

   za $s > 0$ dobijamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\cos(at)\right\} &= \mathcal{L}\frac{e^{ati}+e^{-ati}}{2} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{ati}\right\} + \frac{2}{1}\mathcal{L}\left\{e^{-ati}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-ai} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+ai} = \frac{s}{s^2+a^2}.\end{aligned}$$