Chapter 3

Višestruki integrali

redOvo je radna verzija materijala sa predavanja. Nije dozvoljeno kopiranje, umnožavanje ili bilo kakva vrrsta distribuiranja.

3.1 Dvostruki integral

3.1.1 Definicija dvostrukog integrala

Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, ograničena nad D, gde je D ograničena i zatvorena oblast i neka je d rastojanje na $\mathbb{R}^2$.

Podela. Izvršimo podelu

$$T = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$$

skupa D na konačan broj skupova D_i, $i = 1, \ldots, n$, tako da važi

(i) $\emptyset \neq D_i \subseteq D$ za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$,

(ii) $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ i

(iii) $i \neq j \Rightarrow D_i^o \cap D_j^o = D$, za sve $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$, skup D_i ima dijametar $d(D_i) = \max\limits_{x,y \in D_i} d(x, y)$ i površinu ΔD_i.

Integralna suma. Izaberimo za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ (proizvoljno) tačku

$$M_i \in D_i.$$

Parametar podele $\lambda(T)$ je najveći od dijametara oblasti D_i, tj.

$$\lambda(T) = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i).$$

Broj

$$s(f,T) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta D_i$$

nazivamo integralnom sumom funkcije f po podeli T i izboru tačaka $M_i \in D_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ako za svaku podelu T i izbor tačaka M_i, $i = 1, \ldots, n$, postoji jedinstvena granična vrednost integralne sume $s(f,T)$ kad $\lambda(T) \to 0$ i $n \to \infty$, onda se ta granična vrednost naziva dvostruki integral funkcije $f(x,y)$ nad D, označava se sa $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ i kaže se da je funkcija $f(x,y)$ integrabilna nad D :

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\lambda(T) \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta D_i}$$

Slično kao kod određenog integrala, može se pokazati da je neprekidna funkcija nad zatvorenom ograničenom oblašću D integrabilna na D.

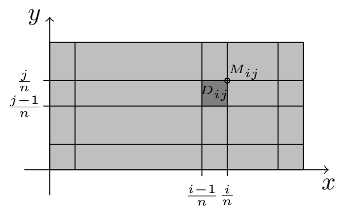
Primer 3.1.1 *Neka je data funkcija $f(x,y) = x^2y^2$ i oblast*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 1\}.$$

Izračunati po definiciji integral $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Rešenje. Data funkcija je neprekidna nad zatvorenom oblašću D, a samim tim je i integrabilna. Granična vrednost integralne sume (kad $\lambda(T) \to 0$ i $n \to \infty$) je onda jedinstvena za svaku podelu oblasti D i izbor tačaka.

Izvršićemo podelu oblasti D na sledeći način:



$$D_{ij} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$$

gde je $i = 1, \ldots, 2n, \ j = 1, \ldots, n$.

Površine posmatranih pravougaonika D_{ij} i parametar podele su

$$\Delta D_{ij} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \qquad \lambda(T) = \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Ako $n \to \infty$, onda $\lambda(T) \to 0$. Izaberimo u svakom kvadratu D_{ij} tačku

$$M_{ij}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \qquad i \in \{1, \ldots, 2n\} \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Traženi dvostruki integral je

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D x^2y^2dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n} f(M_{ij})\Delta D_{ij} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}\tfrac{i^2}{n^2}\tfrac{j^2}{n^2}\tfrac{1}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n^6}\sum_{i=1}^{2n} i^2\sum_{j=1}^{n} j^2 = \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n^6}\tfrac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \tfrac{8}{9}. \end{aligned}$$

Osobine. Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i pretpostavimo da postoje integrali $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, $\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$, $\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$ i $\iint\limits_D g(x,y)dxdy$. Tada važe sledeće osobine:

(1) $\iint\limits_D \big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\big)dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)dxdy$,

(2) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$,
gde je $D = D_1 \cup D_2$ i $D_1^o \cap D_2^o = \emptyset$.

(3) Površina ΔD figure $D \subset \mathbb{R}^2$ data je integralom

$$\boxed{\Delta D = \iint\limits_D dxdy.}$$

(4) Neka je $f(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$. Zapremina ΔV oblasti

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

data je sa

$$\boxed{\Delta V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.}$$

Neka je $f(x,y) \leq 0$, $(x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$. Ako je oblast

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \leq z \leq 0\}$$

onda je zapremina

$$\Delta V = -\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Osobine (1) i (2) slede direktno na osnovu osobina graničnih vrednosti, osobina (3) sledi iz definicije dvostrukog integrala za funkciju $f(x,y) = 1, (x,y) \in D$ i osobina (4) sledi direktno iz definicije dvostrukog integrala.

3.1.2 Računanje dvostrukog integrala

Pravougaona oblast. Ako f integrabilna funkcija i

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, c \le y \le d\}.$$

onda je

$$\boxed{\begin{aligned} \iint_D f(x,y)dxdy &= \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \\ \iint_D f(x,y)dxdy &= \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \end{aligned}}$$

Dokaz. Izvršićemo podelu T oblasti D na podoblasti

$$D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], 1 \le i \le m, 1 \le j \le n,$$

tako da je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ i

$$\lambda(T) = \max_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}.$$

Neka je $\lambda(T_x) = \max\limits_{1\le i\le m} \Delta x_i$ i $\lambda(T_y) = \max\limits_{1\le j\le n} \Delta y_j$. Izaberimo za svako $i \in \{1, \ldots, m\}$ i $j \in \{1, \ldots, n\}$ tačku $M_i(x_i, y_i)$. Prema definiciji dvostrukog integrala,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)dxdy &= \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_j \\ &= \lim_{\substack{\lambda(T_x) \to 0 \\ \lambda(T_y) \to 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_j \\ &= \lim_{\lambda(T_x)\to 0} \sum_{i=1}^m \left(\lim_{\lambda(T_y)\to 0} \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j)\Delta y_j \right) \Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda(T_x)\to 0} \sum_{i=1}^m \left(\int_c^d f(x_i, y)dy \right) \Delta x_i \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \end{aligned}$$

Slčno se izvodi i ako prvo integralimo po x, a zatim po y. $\square$

Primer 3.1.2 *Neka je* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 1\}$. *Izračunati* $I = \iint_D (xy + x^3)dxdy$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 dx \int_0^1 (xy + x^3)dy = \int_1^3 \left(\frac{1}{2}xy^2 + x^3 y\right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_1^3 \frac{1}{2}x + x^3 dx = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_1^3 = 22 \end{aligned}$$

Deo vertikalne trake. Neka su f_1 i f_2 neprekidne funkcije nad $[a, b]$, sa osobinom $f_1(x) \leq f_2(x)$ kada $x \in [a, b]$. Ako je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, neprekidna nad $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$, onda je

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\right) dx.}$$

Dokaz. Izvršićemo podelu T oblasti D na trake D_i koje dobijamo kada izvršimo podelu intervala $[a, b]$ pravim paralelnim y-osi:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

Iz svake trake ćemo izabrati proizvoljno tačku M_i i posmatraćemo integralnu sumu

$$s(f, T) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta D_i.$$

Data integralna suma je jednaka sumi zapremina prizmi čija je osnova D_i, a visina $f(M_i)$. Primetimo da, kada parametar podele teži nuli, istu sumu možemo aproksimirati sumom zapremina prizmi koje dobijamo kada je visina Δx_i, a osnova

$$D_i' = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x_i) \leq y \leq f_2(x_i), 0 \leq z \leq f(x_i, y)\}.$$

Primenom određenog integrala sledi

$$\Delta D_i' = \int_{f_1(x_i)}^{f_2(x_i)} f(x_i, y)dy \quad \text{i} \quad s'(f, T) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \int_{f_1(x_i)}^{f_2(x_i)} f(x_i, y)dy.$$

i odatle je

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x_i, y)dy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\right) dx.$$

Deo horizontalne trake. Neka su ψ_1 i ψ_2 neprekidne funkcije nad $[c,d]$, sa osobinom $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$, $y \in [c,d]$. Ako je funkcija $f : \sigma \to \mathbb{R}$, $\sigma \subset \mathbb{R}^2$, neprekidna nad $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$, gde su ψ_1 i ψ_2 neprekidne funkcije nad $[c,d]$, onda je

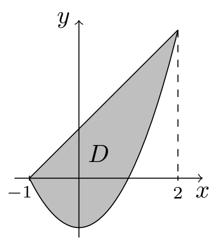
$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.}$$

Primer 3.1.3 *Izračunati* $\iint\limits_D xdxdy$ *ako je*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq x+1\}$$

Rešenje. Da bismo odredili granice dvostrukog integrala, moramo prvo odrediti presek grafika funkcija $y = x+1$ i $y = x^2 - 1$:

$$\begin{aligned} & (y = x+1 \ \wedge \ y = x^2 - 1) \\ \Leftrightarrow \quad & (y = x+1 \ \wedge \ x^2 - x - 2 = 0) \\ \Leftrightarrow \quad & (y = x+1 \ \wedge \ (x = -1 \vee x = 2)). \end{aligned}$$



Odatle zaključujemo da važi

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, x^2 - 1 \leq y \leq x+1\}$$

odakle je

$$\begin{aligned} \iint\limits_D f(x,y)dxdy &= \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2-1}^{x+1} xdy = \int\limits_{-1}^{2} xy\Big|_{y=x^2-1}^{y=x+1} dx \\ &= \int\limits_{-1}^{2} (-x^2 + x^2 + 2x)dx = 3. \end{aligned}$$

3.1.3 Transformacija koordinata

Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}, \sigma \subset \mathbb{R}^2$, neprekidna nad ograničenom zatvorenom oblašću D xy ravni i neka je D_1 ograničena zatvorena oblast uv ravni. Neka je data neprekidno diferencijabilna transformacija T jednačinama

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\ \ (u,v) \in D_1$$

koja preslikava oblast D_1^o bijektivno na D^o.

Posmatraćemo podelu oblasti D (na paralelograme) koju indukuje podela oblasti D_1 pravama paralelnim sa koordinatnim osama u uv-ravni. Neka je

$A(x(u,v),y(u,v),0)$, $B(x(u,v+\Delta v),y(u,v+\Delta v),0)$, i $C(x(u+\Delta u,v),y(u+\Delta u,v),0)$. Tada su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ oblika

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (x(u,v+\Delta v)-x(u,v),y(u,v+\Delta v)-y(u,v),0)\\ \overrightarrow{AC} &= (x(u+\Delta u,v)-x(u,v),y(u+\Delta u,v)-y(u,v),0)\end{aligned}$$

Ako posmatramo $\Delta u \to 0$ i $\Delta \to 0$, onda se dati vektori mogu aproksimirati pomoću parcijalnih izvoda prvog reda:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &\approx (x_v(u,v),y_v(u,v),0)\\ \overrightarrow{AC} &\approx (x_u(u,v),y_u(u,v),0)\end{aligned}$$

odakle je površina paralelograma konstruisanog nad tim vektorima jednaka apsolutnoj vrednosti determinante

$$\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ x_v(u,v) & y_v(u,v) & 0\\ x_u(u,v) & y_u(u,v) & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_v(u,v) & y_v(u,v)\\ x_u(u,v) & y_u(u,v)\end{vmatrix}$$

Prethodna determinanta se naziva Jakobijan transformacije i označava $J(u,v)$ ili $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

Vraćanjem posmatrane podele u integralu sumu, dobijamo

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv.$$

Polarne koordinate Neka je u polarnom koordinatnom sistemu, $\rho \geq 0$ rastojanje posmatrane tačke od pola i neka je $\varphi \in [0,2\pi]$ ugao koji radijus vektor tačke zaklapa sa polarom. Transformacija koordinata se dobija potapanje polarnog koordinatnog sistema u Dekartov, primenom Pitagorine teoreme.

$$\begin{aligned}x &= \rho\cos\varphi\\ y &= \rho\sin\varphi\end{aligned}$$

$$\rho \in [0,\infty), \qquad \varphi \in [0,2\pi].$$

Posmatraćemo podelu oblasti D koju indukuje podela D_1 pomoću krivih za koje ρ i φ imaju konstantne vrednsoti. Tada je element površi u xy-ravni približno jednak pravougaoniku čija je jedna stranica $\Delta\rho$, a druga $\rho\Delta\varphi$ (kao dužina kružnog luka).

Prema definiciji dvostukog integrala, direktno sledi,

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$

3.1.4 Primena u inženjersknim naukama

Neka je $\mu(x,y)$ gustina ploče $D \subset \mathbb{R}^2$ u tački $(x,y) \in D$.
Masa m ploče $D \subset \mathbb{R}^2$ data je sa

$$m = \iint\limits_D \mu(x,y)dxdy.$$

Težište $T(x_t, y_t)$ ploče $D \subset \mathbb{R}^2$ ima koordinate

$$x_t = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy, \quad y_t = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy.$$

Momenti inercije ploče $D \subset \mathbb{R}^2$ u odnosu na ose Ox i Oy su dat je formulom

$$I_x = \iint\limits_V y^2\mu(x,y)dxdy, \quad I_y = \iint\limits_V x^2\mu(x,y)dxdy.$$

Moment inercije ploče $D \subset \mathbb{R}^2$ u odnosu na koordinatni početak dat je formulom

$$I_O = \iiint\limits_D (x^2+y^2)\mu(x,y)dxdy.$$

3.2 Trostruki integral

3.2.1 Definicija trostrukog integrala

Neka je funkcija $f: V \to \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^3$, ograničena nad V, gde je V ograničena i zatvorena oblast. Izvršimo podelu $T = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ skupa V na konačan broj skupova V_i, $i = 1, \ldots, n$, i u svakom skupu V_i izaberimo tačku M_i. Skup V_i ima dijametar $d(V_i)$ i zapreminu ΔV_i. Parametar podele je $\mu(T) = \max\limits_{1\le i\le n} d(V_i)$.
Broj

$$s(f,T) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$$

nazivamo **integralnom sumom funkcije** f po podeli T i izboru tačaka $M_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Ako za svaku podelu T i izbor tačaka M_i, $i = 1, \ldots, n$, postoji jedinstvena granična vrednost integralne sume s kad $\mu(T) \to 0$ i $n \to \infty$ onda se ta granična vrednost naziva **trostruki integral** funkcije $f(x,y,z)$ nad oblašću V i označava sa

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV \ \text{ ili } \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz\,.$$

Kaže se da je funkcija $f(x,y,z)$ **integrabilna** nad V.

3.2.2 Osobine trostrukog integrala

Neprekidna funkcija $f = f(x, y, z)$ nad zatvorenom oblašću V je integrabilna nad V.

Neka su $V, V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^3$ zatvorene oblasti i neka postoje integrali $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$, $\iiint\limits_{V_1} f(x, y, z)dxdydz$, $\iiint\limits_{V_2} f(x, y, z)dxdydz$ i $\iiint\limits_V g(x, y, z)dxdydz$. Tada važe sledeće osobine:

- $\iiint\limits_V \big(\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)\big)dxdydz = \alpha \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz + \beta \iiint\limits_V g(x, y, z)dxdydz$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x, y, z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x, y, z)dxdydz$, gde je $V = V_1 \cup V_2$ i V_1 i V_2 nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka.

Neka su funkcije $z_1, z_2 : \sigma \to \mathbb{R}$, $\sigma \subset \mathbb{R}^2$, neprekidne nad skupom σ i neka je $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in \sigma, \ z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\}$. Tada je

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_\sigma \Big(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz\Big)dxdy.$$

Zapremina ΔV tela $V \subset \mathbb{R}^3$ data je integralom

$$\Delta V = \iiint\limits_V dxdydz.$$

3.2.3 Transformacije koordinata

Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}, \sigma \subset \mathbb{R}^3$, neprekidna nad ograničenom zatvorenom oblašću D i neka je $D_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ ograničena zatvorena oblast.

Neka je data neprekidno diferencijabilna transformacija T jednačinama

$$x = x(u, v, t), \quad y = y(u, v, t), \quad , z = z(u, v, t), \quad (u, v, t) \in D_1$$

koja preslikava oblast D_1^o bijektivno na D^o. Ako je Jakobijan transformacije

$$J(u, v, t) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_t \\ y_u & y_v & y_t \\ z_u & z_v & z_t \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v, t) \in D_1^o,$$

onda je

$$\iiint\limits_{\overline{V}} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{\overline{G}} f(x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t))|J(u, v, t)|dudvdt.$$

Sferne koordinate

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

$$r \geq 0, \quad \theta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0,2\pi]$$

Cilindrične koordinate

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\rho \in [0,\infty), \qquad \varphi \in [0,2\pi], \quad z \in \mathbb{R}.$$

3.2.4 Primena u inženjersknim naukama

Neka je $\mu(x,y,z)$ gustina tela $V \subset \mathbb{R}^3$ u tački $(x,y,z) \in V$.
Masa m tela $V \subset \mathbb{R}^3$ data je sa

$$m = \iiint\limits_V \mu(x,y,z)dxdydz.$$

Težište $T(x_t, y_t, z_t)$ tela $V \subset \mathbb{R}^3$ ima koordinate

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\mu(x,y,z)dxdydz, \\ y_t &= \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\mu(x,y,z)dxdydz, \\ z_t &= \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\mu(x,y,z)dxdydz. \end{aligned}$$

Moment inercije tela $V \subset \mathbb{R}^3$ u odnosu na ravan yOz dat je formulom

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\mu(x,y,z)dxdydz.$$

Moment inercije tela $V \subset \mathbb{R}^3$ u odnosu na osu Oz dat je formulom

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\mu(x,y,z)dxdydz.$$

Moment inercije tela $V \subset \mathbb{R}^3$ u odnosu na koordinatni početak dat je formulom

$$I_O = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz.$$

3.3 Zadaci za vežbu

1. **Izračunati** $I = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y)dxdy$, **ako je**

$$\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x \le 5, \ 1 \le y \le 2\}$$

.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_1^5 dx \int\limits_1^2 (x^2 + y)dy = \int\limits_1^5 (x^2 y + \tfrac{1}{2}y^2)\Big|_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int\limits_1^5 (x^2 + \tfrac{3}{2})dx = (\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x)\Big|_1^5 = \tfrac{142}{3}. \end{aligned}.$$

2. **Izračunati Jakobijan transformacije Dekartovih u polarne koordinate.**

$$J(r, \varphi) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin\varphi = \rho.$$

3. **Izračunati dvostruki integral** $I = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)dxdy$ **ako je**

$$\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2 \le 16, \ 0 < \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x\}.$$

Prelaskom na polarne koordinate dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_1^4 \rho^3 d\rho \\ &= \varphi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \tfrac{1}{4}\rho^4\Big|_1^4 = \tfrac{32\pi}{3}. \end{aligned}$$

4. **Izračunati dvostruki integral** $I = \iint\limits_{\sigma} (x + y)dxdy$ **ako je**

$$\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \le x \le 3y, \ 1 \le x + y \le 3\}.$$

Ako se uvede smena $u = \frac{x}{y}$ i $v = x + y$ onda je $x = \frac{uv}{u+1}$, $y = \frac{v}{u+1}$, onda je

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{v}{(u+1)^2} & \frac{u}{u+1} \\ -\frac{v}{(u+1)^2} & \frac{1}{u+1} \end{vmatrix} = \frac{v}{(u+1)^2}. \ .$$

$$I = \iint\limits_{\sigma} (x + y)dxdy = \int\limits_1^3 \frac{1}{(u+1)^2} du \int\limits_1^3 v^2 dv = (-\frac{1}{u+1})\Big|_1^3 \cdot \frac{1}{3}v^3\Big|_1^3 = \frac{13}{6}.$$

5. **Izračunati površinu figure**

$$\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \le 1, \ 0 \le x \le y\}.$$

Neka je

$$\begin{aligned} x &= 3\rho\cos\varphi \\ y &= 4\rho\sin\varphi \quad (\rho,\varphi) \in [0,1] \times [\tfrac{\pi}{4}, \pi] \end{aligned}$$

onda je

$$J(\rho,\varphi) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} 3\cos\varphi & -3\rho\sin\varphi \\ 4\sin\varphi & 4\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = 12\rho.$$

i

$$\Delta\sigma = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} 12\rho d\rho = \varphi|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cdot \frac{1}{2}\rho^2|_0^1 = \frac{3\pi}{8}.$$

6. **Izračunati površinu figure**

$$\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \le 4\}.$$

Neka je

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos^3\varphi \\ y &= \rho\sin^3\varphi \quad (r,\varphi) \in [0,\infty) \times [0,2\pi] : 1 \le r \le 8. \end{aligned}$$

Jakobijan uvedene transformacije je

$$J(\rho,\varphi) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} \begin{vmatrix} \cos^3\varphi & -3\rho\cos^2\varphi\sin\varphi \\ \sin^3\varphi & 3\rho\sin^2\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 3\rho\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= 3\int\limits_0^{2\pi} sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi \int\limits_1^8 rdr = 378\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi \tfrac{189}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \\ &= \tfrac{189}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\varphi) d\varphi = \tfrac{189}{8}\pi. \end{aligned}.$$

7. **Izračunati zapreminu tela**

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2y \le x^2 + y^2 \le 4y, \ -x^2 - y^2 \le z \le 0\}.$$

Oblast V je simetrična u odnosu na yz ravan, a njena projekcija na xy ravan je

$$\begin{aligned} \sigma &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le x^2 + y^2 \le 2x, y \ge 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_2 + (y-1)^1 \ge 1, x^2 + (y-2)^2 \le 4\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta V &= 2\iint_\sigma (x^2+y^2)dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r^3 dr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^4\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 120\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi d\varphi \\
&= 120\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\tfrac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = 30\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi = \tfrac{7}{4}\pi.
\end{aligned}$$

8. **Izračunati zapreminu oblasti**

$$V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 18,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z\}.$$

Ako posmatramo sistem jednačina

$$\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 &=& 18 \\ \sqrt{x^2+y^2} &=& z \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x^2+y^2 &=& 9 \\ \sqrt{x^2+y^2} &=& z. \end{array} \Leftrightarrow z=3, x^2+y^2=9$$

Projekcija oblasti V na xy ravan je

$$\sigma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 9\}.$$

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \iiint_V dxdydz == \iint_\sigma \left(\sqrt{18-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \Big(\sqrt{18-\rho^2} - \rho)\rho d\rho \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \sqrt{18-\rho^2}\rho d\rho - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^2 d\rho = 54\pi(\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

9. **Odrediti težište homogene ploče oblika pravouglog trougla čije su katete jednake** 2 **i** 3.

$$\begin{aligned}
x_t &= \frac{\iint_D x\rho dD}{\iint_D \rho dD} = \frac{\iint_D x dD}{\iint_D dD} = \frac{1}{\Delta D}\int_0^2 x dx \int_0^{\frac{3}{2}x} dy = \frac{4}{3}, \\
y_t &= \frac{\iint_D y dD}{\iint_D dD} = \frac{1}{3}\int_0^3 y dy \int_{\frac{2}{3}y}^2 dx = 1
\end{aligned}$$

Znači $T(\frac{4}{3}, 1)$.

10. **Izračunati** $I = \iiint_V (2x-y+3z^2)dxdydz$ **ako je** $V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :$ $0\le x\le 2,\ 1\le y\le 4,\ 2\le z\le 3\}$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 dx \int_1^4 dy \int_2^3 (2x - y + 3z^2)dz \\
&= \int_0^2 dx \int_1^4 \left((2x-y)z + z^3\right)\Big|_{z=2}^{z=3} dy \\
&= \int_0^2 dx \int_1^4 (2x - y + 19)dy \\
&= \int_0^2 \left((2x+19)y - \tfrac{1}{2}y^2\right)\Big|_{y=1}^{y=4} dx \\
&= \int_0^2 (4x - \tfrac{99}{2})dx \\
&= \left(x^2 - \tfrac{99}{2}x\right)\Big|_0^2 dx = -95.
\end{aligned}
$$

11. **Izračunati** $I = \iiint\limits_V y dx dy dz$, **ako je**

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2,\ 1 \le z \le 5 - x^2 - y^2\}.$$

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_\sigma dxdy \int_1^{5-x^2-y^2} dz, \\
&= \iint\limits_\sigma yz\Big|_{z=1}^{z=5-x^2-y^2} dxdy \\
&= \iint\limits_\sigma y(4 - x^2 - y^2)dxdy \\
&= \int_0^2 dx \int_1^2 y(4 - x^2 - y^2)dy \\
&= \int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}y^2(4-x^2) - \tfrac{1}{4}y^4\right)\Bigg|_{y=1}^{y=2} dx \\
&= \int_0^2 (\tfrac{3}{2}(4-x^2) - \tfrac{15}{4})dx \\
&= \left(\tfrac{9}{4}x - \tfrac{1}{2}x^3\right)\Bigg|_0^2 = -\tfrac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

12. **Izračunati** $I = \iiint\limits_V (x+y)dxdydz$, **ako je**

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ 1 \le z \le 4 - x - y\}.$$

Projekcija date oblasti na xy-ravan je

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ 1 \le 4 - x - y\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ x + y \le 3\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_\sigma dxdy \int_1^{4-x-y} dz,\\
&= \iint_\sigma (x+y)z\Big|_{z=1}^{z=4-x-y} dxdy\\
&= \frac{1}{2}\iint_\sigma (x+y)y(4-x-y)dxdy\\
&= \int_0^1 dx \int_0^2 (4xy+4y^2-x^2y-2xy^2-y^3)dy + \int_1^2 dx \int_0^{3-x} (4xy+4y^2-x^2y-2xy^2-y^3)dy\\
&= \int_0^1 \Big(2xy^2+\frac{4}{3}y^3-\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{2}{3}xy^3-\frac{1}{4}y^4\Big)_{y=0}^{y=1} dx + \int_1^2 \Big(2xy^2+\frac{4}{3}y^3-\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{2}{3}xy^3-\frac{1}{4}y^4\Big)_{y=0}^{y=3-x} dx\\
&= \int_0^1 (-\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x-\frac{13}{12})dx + \int_1^2 \Big(2x(3-x)^2+\frac{4}{3}(3-x)^3-\frac{1}{2}x^2(3-x)^2-\frac{2}{3}x(3-x)^3-\frac{1}{4}(3-x)^4\Big)dx\\
&= .
\end{aligned}
$$

13. **Izračunati zapreminu oblasti**

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le x\le y,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2\sqrt{x^2+y^2}\}.$$

$$
\begin{aligned}
\Delta V &= \iiint_V dxdydz = \iint_\sigma \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2\sqrt{x^2+y^2}} dz\right)dxdy\\
&= \iint_\sigma \sqrt{x^2+y^2}dxdy\\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \rho^2 d\rho\\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\rho^3\Big|_1^3 d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{26}{3}d\varphi\\
&= \frac{26}{3}\varphi_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{13}{6}\pi.
\end{aligned}
$$

14. **Izračunati Jakobijan transformacije Dekartovih koordinata u sferne koordinate.**

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix}\\
&= r^2\sin\theta(-\cos^2\varphi\sin^2\theta-\sin^2\varphi\cos^2\theta-\cos^2\varphi\cos^2\theta-\sin^2\varphi\sin^2\theta)\\
&= -r^2\sin\theta\big(\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\cos^2\theta(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)\big)\\
&= -r^2\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta) = -r^2\sin\theta.
\end{aligned}
$$

15. **Izračunati zapreminu lopte**

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 25\}$$

pomoću trostrukog integrala.

Uvedimo sferne koordinate

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi\sin\theta \\ y & = & r\sin\varphi\sin\theta \quad (r,\varphi,\theta)\in[0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]. \\ z & = & r\cos\theta \end{array}$$

Tada iz nejednačine $x^2+y^2+z^2\le 25$ dobijamo

$$\begin{array}{l} r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta \le 25 \Leftrightarrow \\ r^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + r^2\cos^2\theta \le 25 \Leftrightarrow \\ r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta \le 25 \Leftrightarrow r^2 \le 25. \end{array}$$

Kako je $r\ge 0$, to je $0\le r\le 5$, dok za φ i θ ne postoje dodatna ograničenja.

$$\Delta V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^5 r^2dr = \varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_0^5 = \frac{500}{3}.$$

16. **Izračunati** $I=\iiint\limits_V (x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4})dxdydz$, **po oblasti**

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}\le 1\}.$$

Predjimo na uopštene sferne koordinate

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi\sin\theta \\ y & = & 2r\sin\varphi\sin\theta \quad (r,\varphi,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi].\ . \\ z & = & 2r\cos\theta \end{array}$$

Jakobijan date transformacije je

$$|J(r,\varphi,\theta)| = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ 2\sin\varphi\sin\theta & 2r\cos\varphi\sin\theta & 2r\sin\varphi\cos\theta \\ 2\cos\theta & 0 & -2r\sin\theta \end{vmatrix} = -4r^2\sin\theta.$$

$$I = 4\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^1 r^4dr = \frac{16}{5}\pi.$$

17. **Izračunati** $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, **ako je**

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\le y\le 2x,\ 1-x\le y\le 2-x,\ 1-x-y\le z\le 2-x-y\}.$$

Neka je $u = \frac{y}{x}$, $v = x+y$ i $t = x+y+z$. Jakobijan uvedene transformacije je

$$\begin{aligned} J(u,v,t) &= \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,t)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v,t)}{\partial(x,y,z)}} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = -\frac{1}{\frac{x+y}{x^2}} \\ &= -\frac{x+y}{\frac{(x+y)^2}{x^2}} = -\frac{x+y}{(1+\frac{y}{x})^2} = -\frac{v}{(u+1)^2}. \end{aligned}$$

Tada je

$$\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz = \int\limits_1^2 \frac{du}{(u+1)^2} \int\limits_1^2 vdv \int\limits_1^2 tdt = \frac{3}{8}.$$

18. **Naći težište homogenog tela gustine $\mu(x,y,z) = 1$ koje zauzima oblast**

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \geq z^2, \ x^2+y^2+z^2 \leq 4, \ z \geq 0\}.$$

Ako se uvedu sferne koordinate, onda je

$$(r,\varphi,\theta) \in [0,2] \times [0,2\pi] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Masa tela je

$$m = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^2 r^2 dr = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos\theta) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^2 = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Koordinate težišta su

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{1}{m} \iiint\limits_V x dxdydz = \frac{1}{m} \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \int\limits_0^2 r^3 dr = 0, \\ y_t &= \frac{1}{m} \iiint\limits_V y dxdydz = \frac{1}{m} \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \int\limits_0^2 r^3 dr = 0, \\ z_t &= \frac{1}{m} \iiint\limits_V z dxdydz = \frac{1}{m} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^2 r^3 dr = \frac{3}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

19. **Naći moment inercije homogenog tela gustine $\mu(x,y,z) = 1$ koje zauzima oblast**

$$V = \{(x,y,z) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \times [0,\infty) :; \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 2\}$$

u odnosu na z osu.

Neka je

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos^4\varphi\sin^4\theta \\ y & = & r\sin^4\varphi\sin^4\theta \quad (r,\varphi,\theta)\in[0,4]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]. \ . \\ z & = & r\cos^4\theta \end{array}$$

Jakobijan date transformacije je $J(r,\varphi,\theta) = -16r^2\sin^3\varphi\cos^3\varphi\sin^7\theta\cos^3\theta$.

Tada je,

$$\begin{array}{rcl} I_z & = & \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz \\ & = & 16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos^3\varphi(\cos^8\varphi+\sin^8\varphi)d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin^{15}\theta d\theta\int\limits_0^4 r^4dr \ \cdot \\ & = & 16\cdot\frac{1}{42}\cdot\frac{1}{144}\cdot\frac{1024}{5} = \frac{512}{945}. \end{array}$$

Chapter 4

Krivolinijski integrali

4.1 Krivolinijski integral

4.1.1 Glatke krive i njihove parametrizacije

Svakoj tački u prostoru $\mathbb{R}^2$ ili $\mathbb{R}^3$ možemo pridružiti njen vektor položaja $\vec{r}$. U prostoru $\mathbb{R}^2$ vektor položaja tačke (x, y) je

$$\vec{r} = (x, y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

dok je vektor položaja tačke (x, y, z) u prostoru $\mathbb{R}^3$ oblika

$$\vec{r} = (x, y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Brzina. Neka je data neprekidno diferencijabilna vektorska funkcija $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ i neka je $\vec{r} = \vec{r}(t)$ za $t \in [a, b]$. Posmatrajmo promenu položaja radijus vektora $\vec{r}(t)$ koju dobijamo za promenu parametra Δt. Na osnovu definicije sabiranja vektora imamo da je

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{r}(t) &= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \\
&= (x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)) - (x(t), y(t), z(t)) \\
&= (x(t + \Delta t) - x(t), y(t + \Delta t) - y(t), z(t + \Delta t) - z(t)).
\end{aligned}$$

Ako posmatramo količnik priraštaja vektorske funkcije $\vec{r}(t)$ i piraštaja argumenta t, kada $t \to 0$, onda je

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} &= \lim_{t\to 0} \frac{(x(t + \Delta t) - x(t), y(t + \Delta t) - y(t), z(t + \Delta t) - z(t))}{\Delta t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right)
\end{aligned}$$

Posmatrana granična vrednost postoji, zato što su $x = x(t), y = y(t)$ i $z = z(t)$ neprekidno diferencijabilne funkcije na $[a, b]$ i označavaćemo je sa $(\vec{r}(t))'$. Znači,

$$(\vec{r}(t))' = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

i dalje je

$$d\vec{r}(t) = (\vec{r}(t))' dt = (\dot{x}(t)dt, \dot{y}(t)dt, \dot{z}(t)dt) = (dx(t), dy(t), dz(t)).$$

Geometrijski, vektor $(\vec{r}(t))'$ je tangentni vektor na grafik vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ u tački t. Ako parametar t interpretiramo kao vreme, onda nam taj vektor daje promenu položaja tačke (pređeni put) u vremenu, tj. on predstavlja vektor brzine datog kretanja:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \tfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)).}$$

Slično, ubrzanje u nekoj tački predstavlja promenu brzine u vremenu, i imamo

$$\boxed{\vec{a}(t) = \tfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = \tfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)).}$$

Glatke krive. Vektorske funkcije koje zavise od jednog parametra u ravni ili u prostoru opisuju krive. U nastavku dajemo preciznu definiciju krivih koje su nam od interesa za uvođenje krivolinijskih integrala. To su krive za koje u svakoj tački postoji jedinstvena tangenta.

Definicija 4.1.1 *Neka je $i \in \{2, 3\}$. Za skup $L \subset \mathbb{R}^i$ kažemo da je prosta glatka kriva (ili gladak Žordanov luk) ako postoji interval $[a, b]$ i vektorska funkcija $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^i$ za koje važi*

(i) $L = \{\vec{r}(t) : t \in [a, b]\}$;

(ii) $\vec{r}$ *bijektivno preslikava skupa* (a, b) *na* $L \setminus \{\vec{r}(a), \vec{r}(b)\}$;

(iii) $\vec{r}$ *je neprekidno diferencijabilna funkcija na* (a, b);

(iv) $(\vec{r}(t))' \neq \vec{0}$ *za svako* $t \in (a, b)$.

Ako je $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ kažemo da je kriva L zatvorena.

Kažemo da je tada sa

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad t \in [a, b]$$

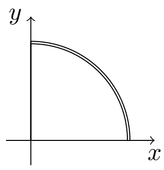
data glatka parametrizacija krive L.

Radi lakšeg razumevanja uslova navedenih u prethodnoj definiciji, dajemo nekoliko primera parametrizacija koje nisu glatke. U prvom primeru, parametrizacija nije glatka, zato što postoji više vrednosti parametra t koje određuju jednu istu tačku krive.

Primer 4.1.1 *Neka je dat skup tačaka*

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cos t, y = |\sin t|, t \in [0, \pi]\}.$$

Možemo primetiti da dati skup tačaka zadovoljava jednačinu $x^2 + y^2 = 1$ *i da važi* $x, y \geq 0$. *To znači da* L *predstavlja deo polukružnice poluprečnika* 1 *koji leži u prvom kvadrantu.*



Međutim, preslikavanje $\vec{r} : [0, \pi] \to L$ *koje je definisano sa* $\vec{r}(t) = (\cos t, |\sin t|)$ *nije injektivno. Na primer*

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \vec{r}\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

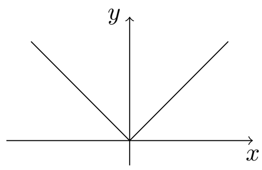
Takvu parametrizaciju nećemo smatrati glatkom.

Drugi primer ilustruje parametrizaciju krive u kojoj izvod $\vec{r}(t)$ nije neprekidno diferencijalbilna funkcija.

Primer 4.1.2 *Neka je dat skup tačaka*

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, y = |t|, t \in [-2, 2]\}.$$

U ovom slučaju prvi izvod funkcije $y = y(t)$ *nje definisan u tački* $t = 0$.



Treći primer ilustruje parametrizaciju krive u kojoj $\vec{r}(t)$ jeste neprekidno diferencijabilna na $[a, b]$ ali nije zadovoljen uslov $(\vec{r}(t))' \neq \vec{0}$.

Primer 4.1.3 *Neka je dat skup tačaka*

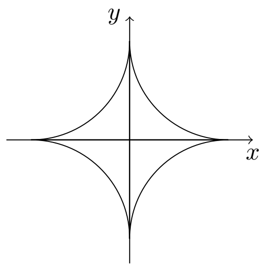
$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in [0, 2\pi]\}.$$

Ako primetimo da su prvi izvodi funkcija $x = x(t)$ *i* $y = y(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -3\cos^2 t \sin t \\ \dot{y}(t) &= 3\sin^2 t \cos t, \end{aligned}$$

lako se zaključuje da je

$$(\vec{r}(0))' = (\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (0, 0).$$



Definicija 4.1.2 *Skup $L \subset \mathbb{R}^3$ je po delovima glatka kriva ako je*

$$L = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n,$$

gde su $L_1, L_2, \ldots, L_n$ glatke krive i svaki par L_i, L_j za $i \neq j$ može imati najviše konačno mnogo zajedničkih tačaka.

Putanja (ili prosta po delovima glatka kriva) je po delovima glatka kriva koja ne preseca samu sebe, osim eventualno u početnoj i kranjoj tački.

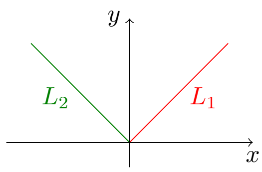
Primeri 4.1.4-4.1.5 opisuju po delovima glatke krive. U nastavku ćemo opisati iste krive pomoću njihovih (po delovima) glatkih parametrizacija.

Primer 4.1.4 *Skup tačaka*

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, y = |t|, t \in [-2, 2]\}.$$

jednak je uniji skupova L_1 i L_2 gde je

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, y = t, t \in [0, 2]\} \\ L_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, y = -t, t \in [-2, 0]\} \end{aligned}$$

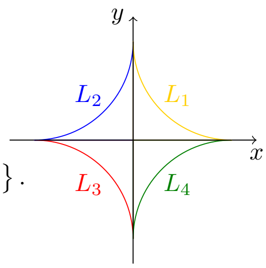


Primer 4.1.5 *Za skup tačaka*

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in [0, 2\pi]\}.$$

važi $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$, gde je

$$\begin{aligned} L_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]\right\} \\ L_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in \left[\tfrac{\pi}{2}, \pi\right]\right\} \\ L_3 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in \left[\pi, \tfrac{3\pi}{2}\right]\right\} \\ L_4 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in \left[\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]\right\}. \end{aligned}$$



4.1.2 Primeri glatkih krivih u $\mathbb{R}^2$

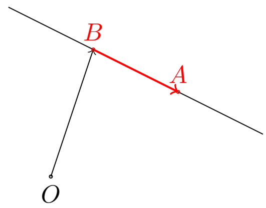
Za svaku glatku krivu postoji beskonačno mnogo glatkih parametrizacija. U ovom delu navodimo neke parametarske reprezentacije, koje smatramo da mogu biti od koristi čitaocu.

Duž $\overline{AB}$, gde je$A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$. Jednačina prave kroz dve tačke je oblika

$$\vec{r} = \vec{r}_B + t\overrightarrow{BA}, t \in \mathbb{R}$$

odnosno

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x_B, y_B) + t(x_A - x_B, y_A - y_B) \\ (x, y) &= (tx_A + (1-t)x_B, ty_A + (1-t)y_B). \end{aligned}$$

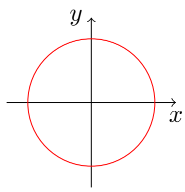


Tačku A dobijamo za vrednost parametra $t = 1$, a tačku B za vrednost parametra $t = 0$. Tačke između A i B dobijamo za $t \in (0, 1)$.
Odatle je jedna glatka parametrizacija duži AB:

$$\overline{AB} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = tx_A + (1-t)x_B, y = ty_A + (1-t)y_B, t \in [0, 1]\}.$$

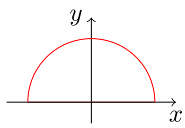
Centralna kružnica Neka je r proizvoljan realan broj.

$$\begin{aligned} L &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos t, y = r\sin t, t \in [0, 2\pi]\}. \end{aligned}$$

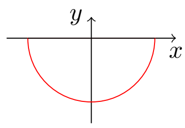


Deo centralne kružnice Neka je r proizvoljan realan broj.

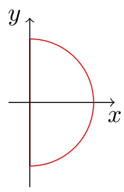
$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2, y \geq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos t, y = r\sin t, t \in [0, \pi]\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, y = \sqrt{r^2 - t^2}, t \in [-r, r]\}. \end{aligned}$$



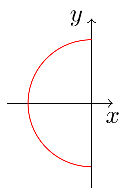
$$\begin{aligned} L_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2, y \leq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos t, y = r\sin t, t \in [\pi, 2\pi]\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, y = -\sqrt{r^2 - t^2}, t \in [-r, r]\}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} L_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2, x \geq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos t, y = r\sin t, t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \sqrt{r^2 - t^2}, x = t, t \in [-r, r]\}. \end{aligned}$$

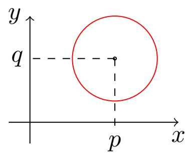


$$\begin{aligned} L_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : & x^2 + y^2 = r^2, x \leq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : & x = r\cos t, \\ & & y = r\sin t, \\ & & t \in [\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}]\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : & x = -\sqrt{r^2 - t^2}, \\ & & x = t, \\ & & t \in [-r, r]\}. \end{aligned}$$



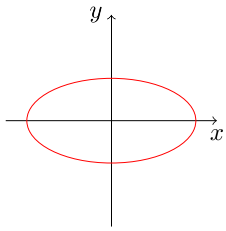
Kružnica

$$\begin{aligned} L &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: && (x-p)^2+(y-q)^2=r^2\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: && x-p=r\cos t, \\ & && y-q=r\sin t, \\ & && t\in[0,2\pi]\}. \end{aligned}$$



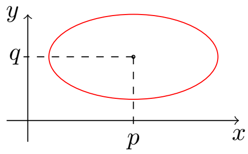
Centralna elipsa

$$\begin{aligned} L &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: && \tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2}=1\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: && \tfrac{x}{a}=\cos t, \\ & && \tfrac{y}{b}=\sin t, \\ & && t\in[0,2\pi]\}. \end{aligned}$$



Elipsa

$$\begin{aligned} L &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: && \tfrac{(x-p)^2}{a^2}+\tfrac{(y-q)^2}{b^2}=1\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: && \tfrac{x-p}{a}=\cos t, \\ & && \tfrac{y-q}{b}=\sin t, \\ & && t\in[0,2\pi]\}. \end{aligned}$$



4.1.3 Primeri glatkih krivih u $\mathbb{R}^3$

U ovom delu navodimo neke glatke krive u prostoru $\mathbb{R}^3$.

Duž $\overline{AB}$, gde je $A(x_A,y_A,z_A)$ i $B(x_B,y_B,z_B)$. Vektorski oblik jednačine prave kroz dve tačke je istog oblika kao u ravni:

$$\vec{r}=\vec{r}_B+t\overrightarrow{BA}, t\in\mathbb{R}$$

Sada su vektori iz prostora $\mathbb{R}^3$ i dobijamo

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= (x_B,y_B,z_B)+t(x_A-x_B,y_A-y_B,z_A-z_B) \\ (x,y,z) &= (tx_A+(1-t)x_B,ty_A+(1-t)y_B,tz_A+(1-t)z_B). \end{aligned}$$

Znači,

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: && x=tx_A+(1-t)x_B \\ & && y=ty_A+(1-t)y_B \\ & && z=tz_A+(1-t)z_B \\ & && t\in[0,1]\}. \end{aligned}$$

Kružnica Neka su r i z_1 proizvoljni realni brojevi. Jednačina jedne kružnice koja leži ravni $z = z_1$ je oblika:

$$\begin{aligned} L &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 = r^2, z = z_1\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : \quad x = r\cos t, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y = r\sin t, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad z = z_1, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad t \in [0, 2\pi]\}. \end{aligned}$$

Presek ravni i kružnog cilindra U nastavku je primer jedne krive koja se nalazi u preseku kružnog cilindra i ravni.

$$\begin{aligned} L &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 = 9, x + y + z = 5\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : \quad x = 3\cos t, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y = 3\sin t, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad z = 5 - 3\cos t - 3\sin t, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad t \in [0, 2\pi]\}. \end{aligned}$$

Cilindrična zavojnica Još jedan primer krive koja leži na kružnom cilindru jeste cilindrična zavojnica. U ovom slučaju koordinata z raste sa porastom parametra t.

$$\begin{aligned} L &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : \quad x = 3\cos t, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y = 3\sin t, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad z = t, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad t \in [0, 2\pi]\}. \end{aligned}$$

4.1.4 Definicija krivolinijskog integrala skalarne funkcije

Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ i neka je $L \subset D$ glatka kriva data parametrizacijom

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad t \in [a, b],$$

odnosno u skalarnom obliku

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b]. \tag{4.1}$$

Definicija 4.1.3 *Ako je funkcija* $h(t) = (f(\vec{r}(t)))|(\vec{r}(t))'|$ *integrabilna na intervalu* $[a, b]$ *onda je krivolinijski integral skalarne funkcije* $f = f(\vec{r})$ *duž krive* L, *u oznaci* $\int\limits_L f(\vec{r})dr$, *definisan sa*

$$\int\limits_L f(\vec{r})dr = \int\limits_a^b (f(\vec{r}(t))) \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| dt = \int\limits_a^b (f(\vec{r}(t)))\,|(\vec{r}(t))'|\,dt$$

Za parametrizaciju (4.1) imamo

$$|(\vec{r}(t))'| = |(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}$$

i dalje u skalarnom obliku dobijamo

$$\int\limits_L f(\vec{r})dr = \int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}dt.$$

Definicija 4.1.4 *Ako je $L = L_1 \cup \ldots \cup L_n$ po delovima glatka kriva, onda je*

$$\int\limits_L f(\vec{r})dR = \int\limits_{L_1} f(\vec{r})dr + \ldots + \int\limits_{L_n} f(\vec{r})dr.$$

4.1.5 Osobine

1. Neka za funkcije $f, g : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^3$ i putanju $L \subset D$ postoje integrali $\int\limits_L f(\vec{r})dr$ i $\int\limits_L g(\vec{r})dr$. Tada važi:

$$\int\limits_L (\alpha f(\vec{r}) + \beta g(\vec{r}))dr = \alpha \int\limits_L f(\vec{r})dr + \beta \int\limits_L g(\vec{r})dr, \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

2. Krivolinijski integral prve vrste ne zavisi od orijentacije krive.

3. Neka je $f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^3$, nenegativna neprekidna funkcija na putanji $L \subset D$. Površina cilindrične površi

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in L,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

jednaka je

$$\Delta S = \int\limits_L f(x, y)dr.$$

4. Dužina Δl putanje $L \subset \mathbb{R}^3$ je

$$\Delta l = \int\limits_L dr.$$

5. Ako je $L \subset \mathbb{R}^3$ komad žice i ako je linearna gustina $\mu = \mu(\vec{r})$ žice L poznata u svakoj tački $\vec{r}$ te krive, onda je

$$m = \int_L \mu(\vec{r})dr$$

masa žice L.

6. Težište

Definicija pomoću integralne sume Krivolinijcki integral skalarne funkcije smo definisali pomoću određenog integrala, što znači da se ista definicija može uvesti pomoću integralnih suma.

Neka je interval $[\alpha, \beta]$ podeljen na n podintervala

$$[\alpha, \beta] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \ldots \cup [t_{n-2}, t_{n-1}] \cup [t_{n-1}, t_n],$$

gde je $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = \beta$. Svakoj vrednosti t_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, odgovara na putanji L tačka $T_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$. Označimo sa Δl_i dužinu luka $T_{i-1}T_i$ putanje L. Na svakom intervalu $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, izaberimo vrednost τ_i parametra t kojoj odgovara tačka $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, gde je $\xi_i = x(\tau_i), \eta_i = y(\tau_i), \zeta_i = z(\tau_i)$. Sastavimo integralnu sumu

$$s(f, L) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta l_i.$$

Ako za svaku podelu intervala $[\alpha, \beta]$ i izbor tačaka M_i, $i = 1, \ldots, n$, postoji jedinstvena granična vrednost integralne sume $s(f, L)$ kad $n \to \infty$ i $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i \to 0$ onda se ta granična vrednost naziva krivolinijski integral prve vrste ili krivolinijski integral po dužini krive funkcije f duž krive L i označava sa $\int\limits_L f(x, y)dl$. Ako je $A = T_0$ i $B = T_n$ onda se koristi i oznaka $\int\limits_{L(AB)} f(x, y, z)dl$ ili $\int\limits_{(AB)} f(x, y, z)dl$.

Primer 4.1.6 *Izračunati dužinu dela cikloide*

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 2(t - \sin t), \ y = 2(1 - \cos t), \ t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}]\}.$$

Kako je $\dot{x}(t) = 2(1 - \cos t)$, $\dot{y}(t) = a \sin t$ to je

$$\begin{aligned} \Delta l &= \int\limits_L dl = \int\limits_{frac\pi 4}^{\frac{5\pi}{3}} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t dt} \\ &= 2\sqrt{2} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \sqrt{1 - \cos t dt} = 4 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} |\sin \tfrac{t}{2}| \\ &= 8 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \sin u du = -8 \cos u|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} = 4(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Primer 4.1.7 *Izračunati dužinu dela cilindrične zavojnice*
$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 3\cos t, \ y = 3\sin t, \ z = 2t, \ 0 \le t \le 4\pi\}$.

Iz $\dot{x}(t) = -3\sin t$, $\dot{y}(t) = 3\cos t$ i $\dot{z}(t) = 2$ sledi $\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}$ i

$$\Delta l = \int\limits_L dl = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4}dt = \sqrt{13}\int\limits_0^{4\pi} dt = 4\pi\sqrt{13}.$$

Primer 4.1.8 *Izračunati* $I = \int\limits_L (x^2y - 2y)dl$*, gde je* L *duž* $\overline{AB}$*, gde je* $A(2,5)$ *i* $B(1,-1)$.

Glatka parametirzacija duži $\overline{AB}$ data je sa

$$x = t + 1, \ y = 6t - 1, \ 0 \le t \le 1,$$

odakle je

$$\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}.$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\overline{AB}} (x^2y - 2y)dl &= \int\limits_0^1 \Big((t+1)^2(6t-1) - 2(6t-1)\Big)dt \\
&= \int\limits_0^1 (6t^3 + 11t^2 - 8t + 1)dt \\
&= \sqrt{37}\Big(\tfrac{3}{2}t^4 + \tfrac{11}{3}t^3 - 4t^2 + t\Big)\Big|_0^1 = \tfrac{13\sqrt{37}}{6}.
\end{aligned}$$

Primer 4.1.9 *Izračunati* $I = \int\limits_L (x - y)dl$*, po dužini polukružnice*

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = 4, \ x \ge 0\}.$$

Jedna glatka parametirzacija kružnice je

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\cos t, \ y = 2\sin t + 1, 0 \le t \le\}.$$

Za datu parametrizaciju je

$$\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2.$$

$$\int\limits_L (x-y)dl = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t - 2\sin t - 1)2dt = 2\Big(-2\sin t - 2\cos t\Big)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -8.$$

Primer 4.1.10 *Izračunati površinu površi*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 4, \ y \ge 0, \ 0 \le z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}.$$

Projekcija date površi u xy ravan je kriva

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ 0 \le t \le \pi\}.$$

Onda je $\dot{x}(t) = -2\sin t$, $\dot{y}(t) = 2\cos t$ i $\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} = 2$.

$$\Delta S = \int\limits_L \sqrt{9 - x^2 - y^2}dl = 2\int\limits_0^\pi \sqrt{9-4}dt = 2\sqrt{13}\pi.$$

Primer 4.1.11 *Naći masu žice*

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = e^t\cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t,\ 0 \le t \le 5\},$$

ako je $\rho(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ *gustina žice u tački* $M(x,y,z)$.

Za datu parametrizaciju je $\dot{x}(t) = e^t(\cos t - \sin t)$, $\dot{y}(t) = e^t(\sin t + \cos t)$, $\dot{z}(t) = e^t$ i $\rho(t) = \frac{1}{2e^{2t}}$.

$$\begin{aligned} m &= \int\limits_L \rho dl = \frac{1}{2}\int\limits_0^5 e^{-2t}\sqrt{e^{2t}\big((\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1\big)}dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_0^5 e^{-t}dt = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - e^{-5}). \end{aligned}$$

4.1.6 Krivolinijski integral vektorskog polja

Orijentacija glatke krive Moguće su dve orijentacije glatka krive L u odnosu na datu parametrizaciju:u smeru rasta parametra t i u smeru opadanja parametra t. Orijentacija krive u smeru rasta parametra može za neku drugu parametrizaciju biti smer opadanja parametra. Po delovima glatka kriva se orijentiše tako da glatki delovi budu saglasno orijentisani, što znači da se kraj jednog glatkog dela nadovezuje na početak sledećeg. Ako je L kriva u ravni, onda kažemo da je negativna orijentacija u smjeru kretanja kazaljke na satu, a pozitivna suprotno od kretanja kazaljke na satu.

Definicija 4.1.5 *Neka je* $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, $\vec{r} \subseteq D$, *vektorska funkcija i* $L \subseteq D$ *orijentisana glatka kriva data sa* $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a,b]$. *Ako je funkcija*

$$h(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{r}(t))'$$

integrabilna na intervalu $[a,b]$, *tada odredjeni integral*

$$\int\limits_L \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int\limits_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}dt = \int\limits_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{r}(t))'dt$$

zovemo **krivolinijski integral vektorskog polja $\vec{F}$ (druge vrste)** *po L od tačke $A = \vec{r}(a)$ do tačke $B = \vec{r}(b)$.*

Ako je $L = L_1 \cup \ldots \cup L_n$ po delovima glatka kriva, onda je

$$\int\limits_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{L_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \ldots + \int\limits_{L_n} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

gde su glatke krive $L_1, \ldots, L_n$ saglasno orijentisane.

U ravni. Ako je $\vec{F} = (P, Q)$ vektorsko polje i $L \subseteq D$ orijentisana glatka kriva data sa $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, onda je

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \Big(P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t) \Big) dt.$$

4.1.7 Osobine krivolinijskog integrala

Neka je $L \subseteq D$ orijentisana glatka kriva, $\vec{F}$ i $\vec{G}$ su vektorska polja definisane na D i postoje integrali $\int\limits_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$ i $\int\limits_L \vec{G} \cdot d\vec{r}$. Tada važi

$$\int\limits_L \Big(\alpha\vec{F} \cdot d\vec{r} + \beta\vec{G} \cdot d\vec{r} \Big) = \alpha \int\limits_L \vec{F} \cdot d\vec{r} + \beta \int\limits_L \vec{G} \cdot d\vec{r}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Krivolinijeski integral druge vrste zavisi od orijentacije krive, tj.

$$\int\limits_{L(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int\limits_{L(BA)} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Rad polja $\vec{F}$ duž luka L je krivolinijski integral $\int\limits_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Rad polja $\vec{F}$ duž zatvorene krive L naziva se **cirkulacija** vektorskog polja $\vec{F}$.

4.1.8 Nezavisnost od putanje integracije

Ako je glatka parametrizacija neke krive L data jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, i hoćemo da naglasimo da je početna tačka te krive označena sa A, krajnja sa B i da je orijentisana u smeru rasta parametra t, pisaćemo $L(AB)$.

Definicija 4.1.6 *Krivolinijski integral vektorske funkcije ne zavisi od putanje integracije ako je njegova vrednost ista za sve putanje koje povezuju početnu i krajnju tačku.*

Definicija 4.1.7 *Za vektorsko polje $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, $\vec{r} \subseteq D$, kažemo da je konzervativno u oblasti D ako je za svaku zatvorenu krivu $L \subseteq D$ integral jednak nuli,*

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

U konzervatinom polju nije važan izbor krive integracije, već samo njena početna i krajnja tačka. Sledeće teorema dokazuje da je vrednost integrala jednaka za sve po delovima glatke krive koje imaju istu početnu i krajnju tačku.

Teorema 4.1.1 *Ako je $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ konzervativno vektorsko polje u oblasti D, onda za sve krive $L_1, L_2 \subseteq D$ važi*

$$\int\limits_{L_1(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{L_2(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Dokaz. Ako je $\vec{F}$ konzervativno vektorsko polje u oblasti D, onda je integral tog vektorskog polja jednak nuli duž svake zatvorene krive u toj oblasti. Posmatrajmo sa proizvoljne dve tačke $A, B \in D$ i proizvoljne po delovima glatke krive $L_1(AB), L_2(AB) \subseteq D$. Kako je kriva

$$L = L_1(AB) \cup L_2(BA)$$

zatvorena, a $\vec{F}$ konzervativno, sledi

$$\begin{aligned}
\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{L_1(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{L_2(BA)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int_{L_1(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{L_2(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int_{L_1(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L_2(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r}.
\end{aligned}$$

□

4.1.9 Potencijalna polja

Definicija 4.1.8 *Vektorsko polje* $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, $\vec{r} \in D$, *je potencijalno ako postoji skalarno polje* $f : D \to \mathbb{R}$ *sa osobinom*

$$\vec{F} = \nabla f.$$

U tom slučaju je f *potencijal polja* $\vec{F}$.

Primer 4.1.12 *Gravitaciono polje tačke* $M(x, y, z)$ *mase* m

$$\vec{G} = g \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \vec{r}_0$$

gde je g *gravitaciona konstanta,* $r = |\vec{r}|$ *i* $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$, *je potencijalno polje sa potencijalom* $f = -g\frac{m}{r}$.

Dokaz. Primetimo prvo da za $\vec{r} = (x, y, z)$ imamo

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Neka je $f(\vec{r}) = -gm \cdot \frac{1}{\vec{r}}$, tj.

$$f(x, y, z) = -gm\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Gradijent funkcije f je

$$\begin{aligned} \nabla f &= gm \cdot \frac{(2x, 2y, 2z)}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = gm \cdot \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= g \cdot \frac{m}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2} \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = g \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \vec{r}_0. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.2 *Vektorsko polje je potencijalno ako i samo je konzervativno.*

Dokaz. (⇒) Pretpostavimo da je $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ potencijalno polje nad D sa potencijalom $f = f(\vec{r})$,

$$\vec{F} = \nabla f.$$

Izaberimo proizvoljno po delovima glatku krivu $L(AB) \subseteq D$. Tada važi

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{r}(t))' dt = \int_a^b h'(t) dt = h(b) - h(a) \\ &= f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) = f(B) - F(A). \end{aligned}$$

gde je $h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ ($h = f(x, y, z)$, gde je $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$). Primetimo da je ove korišćen izvod složene funkcije tj. lančani izvod:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{dh(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{y}(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{z}(t) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}(t)), \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}(t)) \right) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \\ &= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{r}(t))' \end{aligned}$$

□

Sada možemo sumirati nekoliko ekvivalentnih tvr?enja u jedno koje karakterie potencijalna i konzervativna vektorska polja.

Teorema 4.1.3 *Neka je D jednostruko povezana oblast i neka je $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, $\vec{r} \subseteq D$ neprekidno diferencijalno vektorsko polje na D.*

(a) Važi jednakost $\int\limits_{L_1(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{L_2(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ za svaku po delovima glatku krivu $L_1(AB)$ i $L_2(AB)$.

(b) Postoji skalarno polje f sa osobinom da je $\vec{F} = \nabla f$.

(c) $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ za svaku zatvorenu krivu $L \subset D$.

(d) (d_1) Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^2$, onda je $P_y = Q_x$.

(d_2) Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^2$, onda je $P_y = Q_x$ i $P_z = R_x$ i $Q_z = R_y$ tj. $\nabla \times \vec{F} = 0$.

4.1.10 Divergencija i rotor

Definicija 4.1.9 *Neka je $\vec{F} = (P(\vec{r}), Q(\vec{r}), R(\vec{r}))$, $\vec{r} = (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$. Divergencija vektorskog polja $\vec{F}$, u oznaci* `div` $\vec{F}$ *ili $\nabla \cdot \vec{F}$, je skalarno polje $D \to \mathbb{R}$ definisano sa*

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \vec{F})(x, y, z) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z). \end{aligned}$$

Definicija 4.1.10 *Neka je $\vec{F} = (P(\vec{r}), Q(\vec{r}), R(\vec{r}))$, $\vec{r} = (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$. Rotor vektorskog polja $\vec{F}$, u oznaci* `rot` $\vec{F}$ *ili $\nabla \times \vec{F}$, je vektorsko polje $D \to \mathbb{R}^3$ definisano sa*

$$(\nabla \times \vec{F})(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(\vec{r}) & Q(\vec{r}) & R(\vec{r}) \end{vmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial z}(\vec{r}) - \frac{\partial R}{\partial x}(\vec{r}), \frac{\partial Q}{\partial z}(\vec{r}) - \frac{\partial R}{\partial y}(\vec{r}), \ \frac{\partial P}{\partial z}(\vec{r}) - \frac{\partial R}{\partial x}(\vec{r}) \right).$$

Vektorsko polje $\vec{F}$ je bezvrtložno ako je $\nabla \times \vec{F} = 0$.

Primer 4.1.13 *Ako se materijalna tačka rotira oko ose brzinom $\vec{F}$, onda je $\frac{1}{2}\left(\nabla \times \vec{F}\right)$ ugaona brzina kretanja te tačke. To znači da u slučaju kada je $\nabla \times \vec{F} \neq 0$ postoji vrtložno kretanje.*

Vektorsko polje $\vec{F}$ je solenoidalno ako je $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.

Reč solenoidalno vodi poreklo od grčke reči za solenoid, a ima značenje "u obliku cevi". Jedan primer solenoidalnog polja je magnetno polje.

4.1.11 Formula Grina

Prosta (jednostruko) povezana oblast $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je povezana oblast u $\mathbb{R}^2$ sa osobinom da za svaku zatvorenu, prostu (bez tačaka samopresecanja) krivu L iz D važi da je oblast koju ograničava L takođe u D.

Teorema 4.1.4 *Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena oblast ograničena zatvorenom po delovima glatkom prostom krivom L. Ako su funkcije P, Q, P_y i Q_x neprekidne nad D i ako je kriva L orijentisana tako da tačke oblasti D ostaju sa leve strane kada se L obilazi u zadatom smeru, tada važi*

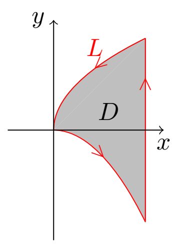
$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_\sigma (Q_x - P_y)dxdy.$$

Primer 4.1.14 *Izračunati $\int_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$, ako je L pozitivno orijentisan rub oblasti*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x, y \geq -x^2, x \leq 1\}.$$

Rešenje.

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D (1-2x)dxdy = \int_0^1 dx \int_{-x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)dy \\
&= \int_0^1 (1-2x)y\Big|_{y=-x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (1-2x)(\sqrt{x}+x^2)dx \\
&= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{30}.
\end{aligned}$$



□

Sledeća teorema pokazuje da formula Grina važi i u slučaju kada je D višestruko povezana oblast.

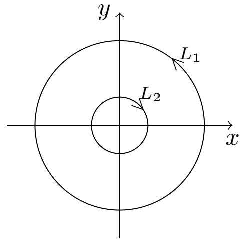
Teorema 4.1.5 *Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena višestruko povezana oblast ograničena unijom zatvorenih po delovima glatkih prostih $L_1 \cup \ldots \cup L_n$. Ako su funkcije*

P, Q, P_y i Q_x neprekidne na D i ako je kriva L orijentisana tako da tačke oblasti D ostaju sa leve strane kada se L obilazi u datom smeru, tada važi jednakost

$$\sum_{i=1}^{n} \oint_{L_i} Pdx + Qdy = \iint_{\sigma} (Q_x - P_y)dxdy.$$

Primer 4.1.15 *Izračunati $I = \int_{L_1} (y^3dx - x^3dy) + \int_{L_2} (y^3dx - x^3dy)$, ako je*

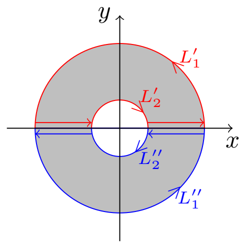
$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\ L_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\} \end{aligned}$$



i L_1 je orijentisana pozitivno, a L_2 je orijentisana negativno.

Rešenje. Neka je$A(1,0)$, $B(3,0)$, $C(-1,0)$ i $D(-3,0)$ i podelimo krive L_1 i L_2 na sledeći način:

$$\begin{aligned} L_1' &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\} \\ L_1'' &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \leq 0\} \\ L_2' &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3, y \geq 0\} \\ L_2'' &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3, y \leq 0\} \end{aligned}$$



Primetimo da su oblasti

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\} \\ D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \leq 0\} \end{aligned}$$

redom ograničene pozitivno orijentisanim zatvorenim krivim

$$\begin{aligned} C_1 &= L_1' \cup \overrightarrow{DC} \cup L_2' \cup \overrightarrow{AB} \\ C_2 &= L_2' \cup \overrightarrow{BA} \cup L_2'' \cup \overrightarrow{BA}. \end{aligned}$$

Primenom formule Grina, za $Q_x = -3x^2$ i $P_y = 3y^2$, dobijamo

$$I = -3 \iint_{D_1} (x^2 + y^2)dxdy - 3 \iint_{D_2} (x^2 + y^2)dxdy = -3 \iint_{D} (x^2 + y^2)dxdy.$$

Prelaskom na polarne koordinate,

$$I = -3 \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_1^3 \rho^3 d\rho = -3\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{4}\rho^4\Big|_1^3 = -3 \cdot 2\varphi \cdot \frac{1}{4}(81 - 1) = -120.$$