DRUGI KOLOKVIJUM, GRUPA A — 23.01.2011.

1. Diskutovati sistem jednačina u zavisnosti od parametra a i b.

$$\begin{array}{rrrrl} x & +ay & -az & -(a-1)u = & 1 \\ (a-1)x & +ay & +(a-1)z & -u = & 2 \\ (a-1)x & +ay & -z & +(a-1)u = & b \end{array}$$

Rešenje Množenjem prve sa -1 i dodavanjem drugoj i od trećoj, a zatim mnženjem druge sa-1 i dodavanjem trećoj dobija se ekvivalentan sistem
$$\boxed{\begin{array}{rrrrl} ay + & x & -az & -(a-1)u & = 1 \\ & (a-2)x + & (2a-1)z & (a-2)u & = 1 \\ & & -az + & au & = b-2 \end{array}}$$

1°) Za $a \notin \{0,2\}$ je sistem 1 puta neodređen.
2°) Za $a = 0$ se dobija ekvivalentan sistem
$$\boxed{\begin{array}{rrrl} x & + u & = & 1 \\ -z & & = & 3 \\ & 0 & = & b-2 \end{array}}$$
pa za $a = 0 \land b \neq 2$ je kontradiktoan, a za $a = 0 \land b = 2$ je 2 puta neodređen.

3°) Za $a = 2$ se dobija sistem
$$\boxed{\begin{array}{rrrrl} 2y - & u - & 2z + & x & = 1 \\ & 2u & -2z & & = b-2 \\ & & 3z & & = 1 \end{array}}$$
koji je 1 puta neodređen.

2. Sve linearne zavisnosti skupa vektora $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ date su sa:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} a & + & 2b & + & 3c & + & d & + & 4e & + & 7f & = & 0 \\ 4a & + & 5b & + & 6c & + & 2d & + & 5e & + & 8f & = & 0 \\ 7a & + & 8b & + & 9c & + & 3d & + & 6e & + & 9f & = & 0, \end{array}$$

kao i njihovim linearnim kombinacijama i neka je V prostor generisan sa skupom A. **a)** Odrediti dimenziju prostora V. **b)** Naći bar tri podskupa skupa A koji su baze prostora V koji je generisan skupom vektora A. **(c)** Da li je $\{a, b, e, f\}$ baza prostora V?

Rešenje
a) Dati sistem jednačina je ekvivalentan sa:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} a & + & 2b & + & 3c & + & d & + & 4e & + & 7f & = & 0 \\ & & -3b & - & 6c & - & 2d & - & 11e & - & 20f & = & 0. \end{array}$$

Odavde je očevidno da $\{c, d, e, f\}$ jeste generatoran skup za prostor V i da bilo koja linearna kombinacija datih jednakosti sadrži bar jedan od vektora a, b. Nijedan pravi podskup skupa $\{c, d, e, f\}$ nije generatoran, jer bi, u protivnom dobili jednakost koja je linearna kombinacija datih jednakosti, a ne sadrži ni a ni b, što je nemoguće. Znači $\{c, d, e, f\}$ je minimalni skup generatora, tj. baza prostora V.
b) Na isti način dobijamo da su baze još i: $\{a, b, c, d\}$,$\{a, b, c, e\}$, $\{a, b, c, f\}$, $\{a, b, d, e\}$, $\{a, b, d, f\}$, $\{a, c, d, e\}$, $\{a, c, d, f\}$, $\{a, c, e, f\}$, $\{a, d, e, f\}$, $\{b, c, d, e\}$, $\{b, c, d, f\}$, $\{b, c, e, f\}$, $\{b, d, e, f\}$.
c) Jedini četvoročlani podskup skupa $\{a, b, c, d, e, f\}$ koji nije baza prostora V jeste $\{a, b, e, f\}$.

3. Izraziti vektore položaja temena C, D, E, F pravilnog šestougla $ABCDEF$ u zavisnosti od vektora $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ i $\vec{n}$ ako je ravan šestougla normalna na vektor $\vec{n}$. Izračunati koordinate temena D simetrično temenu A u odnosu na centar šetougla za slučaju kada je $\vec{r}_A = (9, 5, 7)$, $\vec{r}_B = (9, 6, 6)$ i $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

Rešenje Ako je T težište (centar) pravilnog šestougla, tada je $\vec{r}_T = \dfrac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) \pm |\vec{r}_A - \vec{r}_B| \dfrac{\sqrt{3}}{2} \dfrac{(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{n}}{|(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{n}|}$, $\vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_T - \vec{r}_A$, $\vec{r}_D = \vec{r}_C + \vec{r}_T - \vec{r}_B$, $\vec{r}_E = \vec{r}_D + \vec{r}_T - \vec{r}_C$, $\vec{r}_F = \vec{r}_E + \vec{r}_T - \vec{r}_D$. Zadatak ima dva rešenja i to su: $\Big(\vec{r}_C, \vec{r}_D, \vec{r}_E, \vec{r}_F\Big) \in \Big\{\Big((8, 7, 6), (7, 7, 7), (7, 6, 8), (8, 5, 8)\Big), \Big((10, 6, 5), (11, 5, 5), (11, 4, 6), (10, 4, 7)\Big)\Big\}$.