DRUGI KOLOKVIJUM, GRUPA B 23.01.2011.

1. U zavisnosti od realnih parametara a, b i c diskutovati i rešiti sistem jednačina:

$$\begin{array}{rrrrl} -x & +(a-2)y & +az & +(a+1)u = & 1 \\ ax & +(a-2)y & +az & -u = & b \\ ax & +(a-2)y & -z & +au = & c \end{array}$$

Rešenje Dati sistem se može transformisati naprimer sledećim ekvivalentnim transformacijama: Kolona u kojoj su nepoznate x zameni mesta sa kolonom u kojoj su nepoznate y, prvu jednačinu množimo sa -1 i dodajemo drugoj i trećoj jednačini i na kraju drugu jednačinu množimo sa -1 i dodajemo trećoj jednačini. Tako smo došli do ekvivalentnog sistema polaznom sistemu:

$$\begin{array}{rrrrl} (a-2)y & -x & +az & +(a+1)u = & 1 \\ & (a+1)x & & -(a+2)u = & b-1 \\ & & -(a+1)z & +(a+1)u = & c-b \end{array}$$

Ako je $a \neq -1$ i $a \neq 2$ sistem je jednostruko neodređen. Za $a = -1$ i $c \neq b$ sistem je protivurečan. Za $a = -1$ i $c = b$ sistem je dvostruko neodređen. Za $a = 2$ sistem je jednostruko neodređen.

2. Neka je $A = \{a, b, c, d, f\}$ skup nenula vektora vektorskog prostora V i neka su sve linearne kombinacije skupa A date sa:

$a - b - c + d - f = 0 \qquad a + b - c - d + 2f = 0 \qquad 2a - 2b - c + 3d + f = 0,$

kao i njihovim linearnim kombinacijama. Nekaje W podprostor generisan vektorima iz skupa A.

a) Naći dimenziju vektorskog prostora W. **b)** Naći bar tri podskupa skupa A koji su baze prostora W.
c) Da li postoji dvočlani podskup skupa A koji nije baza prostora W?

Rešenje
a) Dati sistem je ekvivalentan sa

$$\mathcal{S}: \quad \begin{array}{rrrrl} a & -b & -c & +d & -f = 0 \\ & 2b & & -2d & +3f = 0 \\ & & c & +d & +3f = 0 \end{array}$$

Iz ovog sistema je očevidno da skup vektora $\{d, f\}$ generiše vektorski prostor koji generišu i vektori skupa $\{a, b, c, d, f\}$. Skup vektora $\{d, f\}$ je i linearno nezavisan, jer bi u protivnom postojala još neka veza među vektorima skupa $\{a, b, c, d, f\}$ koja se ne može dobiti kao linearna kombinacija sistema $\mathcal{S}$. Znači $\{d, f\}$ jeste baza prostora W. Na isti način proverava se da i svi ostali dvočlani podskupovi skupa $\{a, b, c, d, f\}$ jesu baze prostora koji generišu vektori skupa $\{a, b, c, d, f\}$, što u opštem slučaju ne mora uvek da se desi. Kraći način za proveru da li na primer $\{b, f\}$ jeste baza, sastoji u tome da izbrišemo u sitemu $\mathcal{S}$ kolone u kojima se nalaze b i f, pa zatim ako determinanta preostalog sistema bude različita od nule, to će značiti da $\{b, f\}$ jeste baza, dok bi u protivnom značilo da nije baza. **b)** Svi dvočlani podskupovi skupa A su baze prostora W. **c)** Ne postoji.

3. Izraziti vektore položaja temena B, D, E, F, G, H bar jednog pravilnog osmougla $ABCDEFGH$ u zavisnosti od vektora $\vec{r}_A$, $\vec{r}_C$ i $\vec{n}$ ako je ravan osmougla normalna na vektor $\vec{n}$ i AC najmanja dijagonala tog osmougla. Izračunati koordinate temena E simetrično temenu A u odnosu na težište (centar) T osmougla za slučaju kada je $\vec{r}_A = (-3, 4, 3)$, $\vec{r}_C = (5, 5, 7)$ i $\vec{n} = (-4, 4, 7)$.
Rešenje Ako je T težište (centar) pravilnog osmougla i S sredina od AC, tada je

$$\vec{r}_T = \vec{r}_S + \frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}|\frac{\overrightarrow{CA} \times \vec{n}}{|\overrightarrow{CA} \times \vec{n}|} = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C)\boxed{+}\frac{1}{2}|\vec{r}_A - \vec{r}_C|\frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_C) \times \vec{n}}{|(\vec{r}_A - \vec{r}_C) \times \vec{n}|} = (\frac{3}{2}, \frac{17}{2}, 3) \quad i \quad \vec{r}_E = 2\vec{r}_T - \vec{r}_A = (6, 13, 3)$$

$$\vec{r}_B = \vec{r}_S + \overrightarrow{SB} = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C)\boxed{-}(|\overrightarrow{TA}| - \frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}|)\frac{\overrightarrow{CA} \times \vec{n}}{|\overrightarrow{CA} \times \vec{n}|}$$

Ako na uokvirenim mestima promenimo znake, doija se drugo rešenje. Primeti da na uokvirenim mestima moraju da su suprotni znaci!

Kako je tačka B dobijena pomoću vektora $\vec{r}_A, \vec{r}_C, \vec{r}_T$ i $\vec{n}$, analogno se dobija i tačka D pomoću vektora $\vec{r}_E, \vec{r}_C, \vec{r}_T$ i $\vec{n}$. Preostali traženi vektori su $\vec{r}_F = 2\vec{r}_T - \vec{r}_B$, $\vec{r}_G = 2\vec{r}_T - \vec{r}_C$ i $\vec{r}_H = 2\vec{r}_T - \vec{r}_D$