ALGEBRA, KOLOKVIJUM 2 **19.01.2021.**

1. Prava p sadrži tačku P i paralelna je sa vektorom $\vec{p}$. Tačka A ne pripada pravoj p. Preko $\vec{r}_A$, $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja temena B, C i D kvadrata $ABCD$ čija je ravan normalna na pravu p, i centar (presek dijagonala) kvadrata pripada pravoj p.

2. Neka je S skup svih rešenja sistema linearnih jednačina
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & 4z & = & 0 \end{array}$$
nad $\mathbb{R}$ po nepoznatim $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   (a) Dokazati da je S potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ i odrediti jednu bazu potprostora S.

   (b) Neka je $V = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \forall s \in S,\ v \cdot s = 0\}$. Dokazati da je V potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ i odrediti jednu bazu potprostora V.

3. Neka je $a_1 = (2, -1)$, $a_2 = (-3, 2)$, $b_1 = (0, -1, 1)$ i $b_2 = (2, 2, -1)$. Za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ važi $f(a_1) = b_1$ i $f(a_2) = b_2$.

   (a) Odrediti matricu linearne transformacije f i njen rang.

   (b) Ispitati injektivnost i sirjektivnost linearne transformacije f.

   (c) Odrediti skup $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0, 0)\}$.

REŠENJA:

1. Centar T kvadrata $ABCD$ je projekcija tačke A na pravu p te je $\vec{r}_T = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_P)\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p}$. Vektor položaja temena C dobijamo iz $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{TC}$, dakle $\vec{r}_C = 2\vec{r}_T - \vec{r}_A$. Dijagonala BD je ortogonalna i na p i na dijagonalu AC, te je $BD \parallel \vec{p} \times \overrightarrow{AC}$. Pri tome je $TB = TD = AT$, te tako dobijamo $\vec{r}_{B,D} = \vec{r}_T \pm |\overrightarrow{AT}| \frac{\vec{p} \times \overrightarrow{AC}}{|\vec{p} \times \overrightarrow{AC}|}$.

2. (a) Iz trougaonog oblika $\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}$ polaznog sistema jednačina dobijamo da je njegov skup reešenja $S = \{(z, -z, z) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{z(1, -1, 1) \mid y \in \mathbb{R}\} = Lin((1, -1, 1))$. Po teoremi je lineal podprostor polaznog prostora, a jedan nenula vektor $b = (1, -1, 1)$ čini linearno nezavisan skup, te je $\{(1, -1, 1)\}$ baza potprostora S.

   (b) Jednodimenzionalni potprostor S generisan vektorom $b = (1, -1, 1)$ je prava koja prolazi kroz koordinatni početak i ima vektor pravca $b = (1, -1, 1)$. Kako je $v \cdot s = 0 \Leftrightarrow v \perp s$, sledi da je V skup svih vektora ortogonalnih na pravu S, a to je ravan koja prolazi kroz koordinatni početak i ima vektor normale $b = (1, -1, 1)$. Poznato je da je ravan koja prolazi kroz koordinatni početak dvodimenzionalni potprostor prostora $\mathbb{R}^3$, te jednu njegovu bazu čine bilo koja dva nekolinearna vektora koji su ortogonalni na $b = (1, -1, 1)$. Kako npr. za $v_1 = (1, 1, 0)$ i $v_2 = (0, 1, 1)$ važi $b \cdot v_1 = 0$ i $b \cdot v_2 = 0$, sledi da $v_1, v_2 \in V$. Pri tome su v_1 i v_2 očigledno linearno nezavisni jer su im koordinate neproporcionalne, te sledi da je $\{v_1, v_2\}$ jedna baza podprostora V.

3. (a) Rešavanjem jednačine $(x, y) = \alpha a_1 + \beta a_2$ po $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dobijamo
   $(x, y) = \alpha(2, -1) + \beta(-3, 2) = (2\alpha - 3\beta, -\alpha + 2\beta)$
   $$\Leftrightarrow \begin{array}{rcrcl} 2\alpha & - & 3\beta & = & x \\ -\alpha & + & 2\beta & = & y \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcl} & & \beta & = & x + 2y \\ -\alpha & + & 2\beta & = & y \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \beta = x + 2y \\ \alpha = 2x + 3y \end{array},$$
   dakle $(x, y) = (2x + 3y)a_1 + (x + 2y)a_2$. Koristeći da je f lineana tranformacija dobijamo
   $f(x, y) = f((2x + 3y)a_1 + (x + 2y)a_2) = (2x + 3y)f(a_1) + (x + 2y)f(a_2) = (2x + 3y)b_1 + (x + 2y)b_2 = (2x + 3y)(0, -1, 1) + (x + 2y)(2, 2, -1) = (2x + 4y, y, x + y)$.
   Matrica linearne transformacije f je $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Njene kolone su neproporcionalne te je $rang\, M = 2$.

   (b) Kako je $\dim \mathbb{R}^2 = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$, linearna transformacija ne može biti sirjektivna, a injektivna jeste jer je $\dim \mathbb{R}^2 = 2 = rang\, M$.

   (c) Kako je f injektivna linearna transformacija, mora biti $V = \{(0, 0)\}$.