Prezime, ime, br. indeksa: LJUBO 30.01.2022.

Studijski program E1 E2 PR SW IT IN (zaokruži) KOLOKVIJUM 1

Studenti koji kod pitanja do zvezdica naprave više od pet grešaka nisu položili ispit! U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti broj ili brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

$-\sqrt{x^2}$ //

- Neka su funkcije $f, g : (-1, 0) \to (-1, 0)$ definisane sa $f(x) = -\sqrt{x+1}$ i $g(x) = x^2 - 1$. Tada je $f^{-1}(x) =$ $x^2-1=g(x)$, $(f \circ g)(x) =$ $-\sqrt{x^2}=x$, $(f \circ g)^{-1}(x) =$ $x=-\sqrt{x^2}$, $g^{-1}(x) =$ $-\sqrt{x+1}=f(x)$, $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) =$ x
- U Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ važi: **1)** $x + y = x'y'$ **2)** $xy = (x' + y')'$ **3)** $xy = 1 \Rightarrow x + y = 1$ **4)** $x + y = 1 \Leftrightarrow xy = 1$ **5)** $x = y \Rightarrow x' = y'$ **6)** $x' = y' \Rightarrow x = y$ **7)** $f(x) = x' \Rightarrow f : B \xrightarrow[\text{na}]{} B$
- Za funkciju $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ grupe $((0, \infty), \cdot)$ u grupu $(\mathbb{R}, +)$, definisanu sa $f(x) = -\log_3 x$ važi da je: **1)** homomorfizam **2)** izomrfizam **3)** f^{-1} homomorfizam **4)** f^{-1} funkcija **5)** f^{-1} izomorfizam
- Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom prstenu $(R, +, \cdot)$: **1)** $(b + c)a = ca + ba$ **2)** $(b + c)a = ca + ab$ **3)** $(R, +)$ je grupa **4)** $(R, \cdot)$ je asocijativni grupoid **5)** $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ **6)** operacija $\cdot$ je distributivna prema operaciji $+$ **7)** $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ **8)** $a \cdot 0 = 0$ **9)** $a \cdot (-a) = -a^2$
- Pri delenju polinoma $x^4 - 4x^2 - 5$ sa $x^2 + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je x^2-5, a ostatak je 0.
- NZD(P,Q) za polinome $P = (t-3)^4(t+7)^2(t-1)^5(t+13)^3$ i $Q = (t-3)^2(t-15)(t-1)^7(t+13)^5$ je polinom **1)** $(t-3)^4(t-1)^7(t+13)^5$ **2)** $(t-3)(t-1)(t+13)$ **3)** $(t-3)^4(t+7)^2(t-1)^7(t+13)^5(t-15)$ **4)** $(t-3)(t+7)(t-1)(t+13)(t-15)$ **5)** $(t-3)^2(t-1)^5(t+13)^3$
- Ako je $z \in \mathbb{C}$, upiši nedostajući element u skupu A, ako je $z^4 = -7-24i \Leftrightarrow z \in \{-1-2i, 2-i, 1+2i, -2+i\} = A$
- Neka su f i g funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} d & a & b & c \\ c & b & d & a \end{pmatrix}$. Tada je $f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$, $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{pmatrix}$, $(f \circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{pmatrix}$, $g^{-1} \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{pmatrix}$.
- Izračunati: **1)** $\arg(\pi) = 0$ **2)** $\arg(5e^{4i}) = 4-2\pi$ **3)** $\arg(-6\pi) = +\pi$ **4)** $\arg(9\pi) = 0$ **5)** $\arg(2i) = \pi/2$ **6)** $\arg(-1-i) = -3\pi/4$ **7)** $\arg(8e^{2i}) = 2$ **8)** $\arg(-1 - i\sqrt{3}) = -2\pi/3$ **9)** $\arg(e^{i\pi} + 1) =$ /
- Zaokružiti brojeve ispred sirektivnih funkcija: **1)** $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 3$ **2)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f(x) = x^4$ **3)** $f : (-\infty, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ **4)** $f : \mathbb{R}^+ \to (0, \infty)$, $f(x) = \ln(x+1)$ **5)** $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$, $f(x) = e^{x^2}$
- Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:

  $\left|\{f | f : A \longrightarrow B\}\right| = 8$, $\left|\{f | f : A \xrightarrow{1-1} B\}\right| = 0$, $\left|\{f | f : A \to B \wedge f \nearrow\}\right| = 0$, $\left|\{f | f : B \overset{na}{\to} B\}\right| = 2$,
  $\left|\{f | f : B \to A\}\right| = 9$, $\left|\{f | f : A \to A \wedge f \nearrow\}\right| = 1$, $\left|\{f | f : B \to A \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| = 6$, $\left|\{f | f : A \overset{na}{\to} B\}\right| = 6$.
- Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(1 + 3i) = 0$, tada je: **1)** $x - 1 + 2i \mid f(x)$ **2)** $x - 1 - 3i \mid f(x)$ **3)** $x - \sqrt{10}\, e^{i \operatorname{arctg} 3} \mid f(x)$ **4)** $x^2 - 2x + 10 \mid f(x)$; **5)** $x^2 - 2x - 8 \mid f(x)$; **6)** $x - \sqrt{5}\, e^{-i \operatorname{arctg} 2} \mid f(x)$; **7)** $x^2 - x + 4 \mid f(x)$
- Za svako $z \in \mathbb{C}$ je: **1)** $\arg z \geq 0 \Leftrightarrow I_m(z) \geq 0$ **2)** $\arg z \geq 0 \Leftrightarrow \left(R_e(z) \geq 0 \wedge z \neq 0\right)$ **3)** $\arg z \geq 0 \Leftrightarrow \left(I_m(z) \geq 0 \wedge z \neq 0\right)$ **4)** $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow R_e(z) \geq 0$ **5)** $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow R_e(z) \geq 0$ **6)** $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(I_m(z) \in \mathbb{R} \wedge z \neq 0\right)$ **7)** $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(I_m(z) \in \mathbb{R} \wedge z \neq 0\right)$
- Funkcija $f : (-\pi, 0) \longrightarrow (-1, 1]$ definisana sa $f(x) = \cos x$ je: **1)** sirjektivna i nije injektivna **2)** injektivna i nije sirjektivna **3)** nije injektivna i nije sirjektivna **4)** bijektivna
- Funkcija $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \longrightarrow (-1, 1]$ definisana sa $f(x) = \sin x$ je: **1)** sirjektivna i nije injektivna **2)** injektivna i nije sirjektivna **3)** nije injektivna i nije sirjektivna **4)** bijektivna
- Funkcija $f : (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \operatorname{tg} x$ je: **1)** sirjektivna i nije injektivna **2)** injektivna i nije sirjektivna **3)** nije injektivna i nije sirjektivna **4)** bijektivna
- Ako je $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$, tada je $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $f \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $f \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$.
- Neka je $\{-2, 1, -1\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ nad poljem realnih brojeva. Tada skup svih mogućnosti za a je $a \in \{ 2 \}$.
- Neka su $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2$ i $z_3 = 1$. Izraziti u zavisnosti od z_1, z_2 i z_3 ugao $\measuredangle z_2 z_3 z_1 = \arg \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} = \arg(z_1-z_3)-\arg(z_2-z_3)$ i zatim ga efektivno izračunati $\measuredangle z_2 z_3 z_1 = \frac{\pi}{2}$ Da li je ovaj ugao pozitivno orijentisan? DA NE

LJUBO

Prezime, ime, br. indeksa: LJUBO **30.01.2022. Studijski program** E1 E2 PR SW IT IN (zaokruži) **KOLOKVIJUM 2**

Studenti koji kod pitanja do zvezdica naprave više od pet grešaka nisu položili ispit! U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti tačne odgovore tj. slova ili brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- Vektor normale ravni $\alpha: \ z = x + y - 1$ je: **1)** $(1,0,1)$ **2)** $(1,0,-1)$ **3)** $(0,1,0)$ **4)** $(-1,-1,1)$ **5)** $(1,1,-1)$
  Koordinate jedne njene tačke su: **6)** $(0,0,0)$ **7)** $(1,0,0)$ **8)** $(0,1,0)$ **9)** $(0,0,1)$ **10)** $(1,1,1)$
- Sistem jednačina $ax + ay = a \ \wedge \ ax - ay = -a$ je određen za: **1)** $a \neq 1$ **2)** $a \neq -1$ **3)** $a \neq 1 \wedge a \neq -1$ **4)** $a \neq 0$ neodređen za: **5)** $a = 1$ **6)** $a = 0$ **7)** $a = -1$ protivrečan za: **8)** $a = 1$ **9)** $a = 0$ **10)** $a = -1$ **11)** $a = -1 \wedge a = 1$
- Izračunati vektore položaja $\vec{r_{T'}}$ i $\vec{r_{T''}}$ projekcija tačke $T(-1,1,-1)$ na pravu $a: \vec{r} = (-1,0,-2) + t(1,-1,1), \ t \in \mathbb{R}$ i ravan $\alpha: (1,-1,0) \cdot \vec{r} = (1,-1,0) \cdot (1,0,0)$.
  $\vec{r_{T'}} = (-1,0,-2)$ $\qquad$ $\vec{r_{T''}} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$
- Izračunati α i β ako je $\alpha(1,-3,2) + \beta(3,7,-3) = (0,0,0)$: $\quad (\alpha,\beta) \in \{ (0,0) \}$
- Izračunati α i β ako je $\alpha(1,-3,2) + \beta(2,-6,4) = (0,0,0)$: $\quad (\alpha,\beta) \in \{ (-2\beta, \beta) \mid \beta \in \mathbb{R} \}$
- Neka je $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ uređena trojka nekoplanarnih slobodnih vektora. Tada: **1)** trojka $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ je uvek linearno nezavisna **2)** trojka $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ je uvek linearno zavisna **3)** postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})$ nezavisna **4)** postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})$ zavisna **5)** za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})$ nezavisna **6)** za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})$ zavisna **7)** svaki vektor $\vec{d}$ je linearna kombinacija uređene trojke vektora $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$
- Format (m,n), matrice linearne transformacije **1)** $h(x) = 5x$ je (0,1),(1,0),(1,1); **2)** $f(x,y) = x + 2y$ je (2,2),(2,1),(1,2); **3)** $g(x,y) = (x, x-y, x+y)$ je ~~(2,3)~~,(3,2),(2,2); **4)** $s(x,y) = x$ je (2,1),(1,2),(1,1)
- Ispod svake matrice zaokružiti broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

1 ~~2~~ ~~3~~ 2	1 2 3 2	1 2 3 2	1 2 3 1	0 1 2	1 2 3	1 2 3	0 1 2	0 1 2

- Ako je $\vec{a} = (-2,2,1)$ i $\vec{b} = (1,-4,8)$, tada je: **1)** $|\vec{a}| = 3$ **2)** $|\vec{b}| = 9$ **3)** $\vec{a}\vec{b} = 2$ **4)** $\vec{a} \times \vec{b} = (20,17,6)$ **5)** $\cos \sphericalangle(\vec{a}\vec{b}) = -\frac{2}{27}$
- Ako je: $a = \Big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\Big)$ $b = \Big((1,0,0),(0,-1,0)\Big)$ $c = \Big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,2,3)\Big)$ $d = \Big((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\Big)$, tada su nezavisne u $\mathbb{R}^3$: **1)** a **2)** b **3)** c **4)** d
- Ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tada je: **1)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\top$ **2)** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ **3)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
- Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačka T težište trougla BCD (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{DT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. $\quad \overrightarrow{DT} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$
- Neka je u sedmodimenzionalnom vektorskom prostoru V, k-torka vektora $(a_1, \dots, a_k)$ generatorna. Tada je uvek: **1)** $k < 7$ **2)** $k \leq 7$ **3)** $k = 7$ **4)** $k > 7$ **5)** $k \geq 7$ **6)** ništa od prethodnog
- Ako su nenula vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ **kolinearni** tada je: **1)** $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ **2)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ **3)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ **4)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ **5)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2$ **6)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni **7)** $(\exists \lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} \neq \lambda\vec{b}$ **8)** $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ \vec{b} \neq \lambda\vec{a}$ **9)** $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\vec{a} \neq \lambda\vec{b} \ \wedge \ \lambda\vec{a} \neq \vec{b})$ **10)** $\vec{a} \parallel \vec{b}$ **11)** $(\exists \alpha,\beta \in \mathbb{R})\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \ \wedge \ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. **12)** $(\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R})\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \ \Rightarrow \ \alpha^2 + \beta^2 = 0$.
- Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$? **1)** $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.
- Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je: **1)** $|det(A)| = \lambda|det(A')|$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ **2)** $\textbf{rang}(A) = \textbf{rang}(A')$ **3)** $A \cdot A' = I$ **4)** $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$
- Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 2 i svaki skalar λ: **1)** $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$ **2)** $(B+C)A = BA + CA$ **3)** $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$ **4)** $\det(AB) = \det(B)det(A)$ **5)** $(AB)^2 = A^2B^2$ **6)** $\textbf{rang}(AB) = \textbf{rang}(A)\textbf{rang}(B)$ **7)** $\textbf{rang}(AB) = \textbf{rang}(A) + \textbf{rang}(B)$ **8)** $A(BC) = (AB)C$

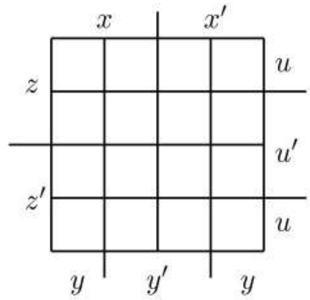
ALGEBRA **30.01.2022.**

1. Neka je $z_1 = a + 1 + i(a-1)$, $z_2 = 2a - ia$ i $w = \frac{z_1}{z_2}$. Odrediti $a \in \mathbb{R}$ tako da je
   (a) $I_m(w) = 0$, (b) $R_e(w) = 0$, (c) $|w| = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

2. Za uređeni par $([0,\infty), *)$, gde je binarna operacija $*$ skupa $[0,\infty)$ definisana sa $x * y = \sqrt{x^2+y^2}$, ispitati zatvorenost operacije, asocijativnost, komutativnost, egzistenciju neutralnog elementa i egzistenciju inverznih elemenata.

3. Napisati $SDNF$, sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0



4. Neka je $A \neq B$ i $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$. U zavisnosti od vektora $\vec{n}$ i vektora položaja $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$ susednih temena A i B kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$, izraziti vektore položaja temena kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kod koje je ravan dijagonalnog preseka ABC_1D_1 normalna na vektor $\vec{n}$.

5. Operacije $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ su definisane na sledeći način: za sve $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ i svako $\lambda \in \mathbb{R}$ je: $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$, $\lambda \odot (a,b) = (\lambda a, b)$.
   Na uređenoj četvorci $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \odot)$ ispitati sve aksiome vektorskog prostora.

6. Za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je poznato da je $f(1,2) = (-1,3)$ i $f(1,1) = (2,-6)$.
   (a) Izračunati $f(x,y)$ i matricu M linearne transformacije f. (b) Odrediti rang linearne transformacije f. (c) Ispitati da li postoji inverzna linearna transformacija f^{-1}. (d) Napisati jednačinu skupa tačaka $f(\mathbb{R}^2) = \{f(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ i dati geometrijsku interpretaciju toga skupa.

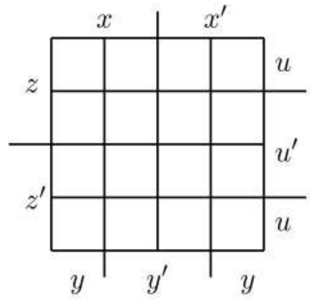
ALGEBRA **30.01.2022.**

1. Neka je $z_1 = a + 1 + i(a-1)$, $z_2 = 2a - ia$ i $w = \frac{z_1}{z_2}$. Odrediti $a \in \mathbb{R}$ tako da je
   (a) $I_m(w) = 0$, (b) $R_e(w) = 0$, (c) $|w| = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

2. Za uređeni par $([0,\infty), *)$, gde je binarna operacija $*$ skupa $[0,\infty)$ definisana sa $x * y = \sqrt{x^2+y^2}$, ispitati zatvorenost operacije, asocijativnost, komutativnost, egzistenciju neutralnog elementa i egzistenciju inverznih elemenata.

3. Napisati $SDNF$, sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0



4. Neka je $A \neq B$ i $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$. U zavisnosti od vektora $\vec{n}$ i vektora položaja $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$ susednih temena A i B kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$, izraziti vektore položaja temena kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kod koje je ravan dijagonalnog preseka ABC_1D_1 normalna na vektor $\vec{n}$.

5. Operacije $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ su definisane na sledeći način: za sve $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ i svako $\lambda \in \mathbb{R}$ je: $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$, $\lambda \odot (a,b) = (\lambda a, b)$.
   Na uređenoj četvorci $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \odot)$ ispitati sve aksiome vektorskog prostora.

6. Za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je poznato da je $f(1,2) = (-1,3)$ i $f(1,1) = (2,-6)$.
   (a) Izračunati $f(x,y)$ i matricu M linearne transformacije f. (b) Odrediti rang linearne transformacije f. (c) Ispitati da li postoji inverzna linearna transformacija f^{-1}. (d) Napisati jednačinu skupa tačaka $f(\mathbb{R}^2) = \{f(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ i dati geometrijsku interpretaciju toga skupa.

REŠENJA

1. Kako je

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+1+i(a-1)}{2a-ia} = \frac{a+1+i(a-1)}{2a-ia}\cdot\frac{2a+ia}{2a+ia}$$
$$= \frac{2a^2+2a-a^2+a+i(2a^2-2a+a^2+a)}{4a^2+a^2} = \frac{a^2+3a+i(3a^2-a)}{5a^2}$$
$$= \frac{a^2+3a}{5a^2} + i\frac{3a^2-a}{5a^2},$$

dobijamo sledeća rešenja.

(a) $I_m(w)=0$ ako je
$$\frac{3a^2-a}{5a^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (3a^2-a=0 \ \wedge\ 5a^2\neq 0)$$
$$\Leftrightarrow\quad (a(3a-1)=0 \ \wedge\ a\neq 0) \quad\Leftrightarrow\quad a=\frac{1}{3}.$$

(b) $R_e(w)=0$ ako je
$$\frac{a^2+3a}{5a^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (a^2+3a=0 \ \wedge\ 5a^2\neq 0)$$
$$\Leftrightarrow\quad (a(a+3)=0 \ \wedge\ a\neq 0) \quad\Leftrightarrow\quad a=-3.$$

(c) $|w|=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{(\frac{a^2+3a}{5a^2})^2+(\frac{3a^2-a}{5a^2})^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$

Za $a=0$ broj w nije definisan, a za $a\neq 0$ je
$$|w|=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{(\frac{a+3}{5a})^2+(\frac{3a-1}{5a})^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{\frac{(a+3)^2+(3a-1)^2}{25a^2}} = \sqrt{\frac{10a^2+10}{25a^2}} = \frac{\sqrt{10}\sqrt{a^2+1}}{5|a|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{5}|a|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{a^2+1}=\sqrt{2}|a| \ \ /^2$$
$$\Leftrightarrow\quad a^2+1=2a^2 \quad\Leftrightarrow\quad a^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad a\in\{-1,1\}.$$

2. (a) Zatvorenost operacije $*$ je očigledna jer za $x,y\in[0,\infty)$ je $\sqrt{x^2+y^2}\in[0,\infty)$.

(b) Operacija $*$ jeste asocijativna jer za
$$L=(x*y)*z=\sqrt{x^2+y^2}*z=\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$D=x*(y*z)=x*\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{x^2+(\sqrt{y^2+z^2})^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
imamo da je $L=D$.

(c) Komutativnost operacije $*$ je očigledna jer je
$x*y=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{y^2+x^2}=y*x.$

(d) Neutralni element je $0\in[0,\infty)$ jer za sve $x\in[0,\infty)$ važi
$0*x=x*0=\sqrt{x^2+0^2}=|x|=x.$

(e) Inverzni element za 0 je naravno 0, a za sve ostale $x>0$ ne postoji $x'\geq 0$ takvo da je $x*x'=\sqrt{x^2+(x')^2}=0$ (jer je $x^2>0$).

3. Proste implikante:

yu', $y'zu$, $x'y'z$, $x'zu'$.

$MDNF_1 = yu' + y'zu + x'y'z,$

$MDNF_2 = yu' + y'zu + x'zu'.$

	x	x	x'	x'	
z		$*$	$*$		u
z	$*$		$*$	$*$	u'
z'	$*$			$*$	u'
z'					u
	y	y'	y'	y	

4. Duži AD_1 i BC_1 su dijagonale strana kocke tj. kvadrata ADD_1A_1 i BCC_1B_1, te je $|AD_1| = |BC_1| = \sqrt{2}|\overrightarrow{AB}|$. Vektori $|AD_1|$ i $|BC_1|$ su normalni i na $\overrightarrow{AB}$ i na $\vec{n}$, dakle imaju pravac vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \times \vec{n}$. Stoga je

$$\vec{r}_{D_1} = \vec{r}_A \pm \sqrt{2}|\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \qquad \vec{r}_{C_1} = \vec{r}_B \pm \sqrt{2}|\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

(zadatak ima dva rešenja). Neka je S sredina duži BC_1, dakle $\quad \vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_{C_1})$.

Vektori SC i SB_1 su istog pravca kao vektor $\vec{n}$ i jednake dužine kao vektori $\overrightarrow{SB}$ i $\overrightarrow{SC_1} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC_1}|$, te je

$$\vec{r}_C = \vec{r}_S \pm \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC_1}|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \qquad \vec{r}_{B_1} = \vec{r}_S \mp \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC_1}|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

(rešenja dobijena sa $\pm$ i $\mp$ su jednaka jer se razlikuju samo u oznakama temena kocke).

Na kraju iz $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BB_1}$ dobijamo $\quad \vec{r}_{A_1} = \vec{r}_A + \vec{r}_{B_1} - \vec{r}_B, \qquad \vec{r}_D = \vec{r}_{D_1} - \vec{r}_{B_1} + \vec{r}_B$.

5. (a) Ispitujemo da li je $(\mathbb{R}^2, +)$ komutativna grupa. Operacija $+$ je zatvorena jer je $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \in \mathbb{R}^2$ za sve $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$. Asocijativna je i komutativna jer je

$$\begin{aligned}(a,b) + ((c,d) + (e,f)) &= (a,b) + (c+e, d+f) = (a+c+e, b+d+f)\\ &= (a+c, b+d) + (e,f) = ((a,b) + (c,d)) + (e,f),\end{aligned}$$

$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c,d) + (a,b)$.

Neutralni element je $(0,0)$ jer je $(a,b) + (0,0) = (0,0) + (a,b) = (a,b)$.

Inverzni element za $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ je $(-a,-b) \in \mathbb{R}^2$ jer je $(a,b) + (-a,-b) = (-a,-b) + (a,b) = (0,0)$.

Dakle, $(\mathbb{R}^2, +)$ je komutativna grupa.

(b) Jeste $\lambda \odot ((a,b) + (c,d)) = \lambda \odot (a,b) + \lambda \odot (c,d)$ za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ i sve $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ jer je

$$\begin{aligned}\lambda \odot ((a,b) + (c,d)) &= \lambda \odot (a+c, b+d) = (\lambda(a+c), b+d)\\ &= (\lambda a + \lambda c, b+d) = (\lambda a, b) + (\lambda c, d) = \lambda \odot (a,b) + \lambda \odot (c,d).\end{aligned}$$

(c) Ispitujemo da li je $(\lambda + \theta) \odot (a,b) = \lambda \odot (a,b) + \theta \odot (a,b)$ za sve $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$ i svako $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Nije, jer je npr. za $\lambda = \theta = a = b = 1$

$L = (\lambda + \theta) \odot (a,b) = ((1+1) \cdot 1, 1) = (2,1)$,

$D = \lambda \odot (a,b) + \theta \odot (a,b) = (\lambda a, b) + (\theta a, b) = (1,1) + (1,1) = (2,2) \neq L$.

(d) Ispitujemo da li je $\lambda \odot (\theta \odot (a,b)) = (\lambda\theta) \odot (a,b)$ za sve $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$ i svako $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Jeste, jer je

$\lambda \odot (\theta \odot (a,b)) = \lambda \odot (\theta a, b) = (\lambda\theta a, b) = (\lambda\theta) \odot (a,b)$.

(e) Očigledno je $1 \odot (a,b) = (1 \cdot a, b) = (a,b)$ za svako $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

6. (a) Lin. transf. f odgovara matrica $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, a iz uslova $f(1,2) = (-1,3)$ i $f(1,1) = (2,-6)$ dobijamo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b \\ c+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & -1 \\ c & + & 2d & = & 3 \end{array},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 2 \\ c & + & d & = & -6 \end{array}.$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & 2b & & & & & = & -1 \\ & & & & c & + & 2d & = & 3 \\ a & + & b & & & & & = & 2 \\ & & & & c & + & d & = & -6 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & 2b & & & & & = & -1 \\ a & + & b & & & & & = & 2 \\ & & & & c & + & 2d & = & 3 \\ & & & & c & + & d & = & -6 \end{array}$$

dobijamo $a = 5$, $b = -3$, $c = -15$, $d = 9$, dakle $M = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -15 & 9 \end{bmatrix}$, te je

$f(x,y) = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -15 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x - 3y \\ -15x + 9y \end{bmatrix}$. Sledi da je $f(x,y) = (5x - 3y, -15x + 9y)$.

(b) Ako prvu vrstu matrice M pomnoženu sa 3 dodamo drugoj, dobijamo da je $M \sim \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, odakle sledi da je $\operatorname{rang}(M) = 1$.

(c) Iz $\det M = 0$ sledi da ne postoji inverzna linearna transformacija f^{-1}.

(d) $f(\mathbb{R}^2) = \{f(x,y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(5x-3y, -15x+9y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(5x-3y, -3(5x-3y)) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ $= \{(t, -3t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(1,-3) \mid t \in \mathbb{R}\}$,

što je prava koja prolazi koordinatni početak i paralelna je sa vektorom $(1,-3)$, i njena jednačina je $f(\mathbb{R}^2) : \frac{x}{1} = \frac{y}{-3}$.