$\boxed{\text{A}}$ DISKRETNA MATEMATIKA i ALGEBRA 22.01.2017.

1. Data je tačka P, i prava a određena tačkom $A \in a$ i vektorom pravca $\vec{a}$, pri čemu $P \notin a$. U funkciji od $\vec{r}_P$, $\vec{r}_A$ i $\vec{a}$ izraziti vektore položaja tačaka Q i R takvih da je PQR jednakostranični trougao kod kojeg je $PQ \parallel a$ i $R \in a$.

2. Neka su $a = (-2, 3, 4)$, $b = (-3, 1, -1)$, $c = (5, 3, 11)$ elementi prostora $\mathbb{R}^3$, i neka je $V = \mathrm{Lin}(a, b, c)$. Naći dimenziju prostora V i sve potskupove skupa $\{a, b, c\}$ koji su baza prostora V. Napisati jednačinu skupa V.

3. Neka je $a_1 = (-2, -3)$, $a_2 = (1, 2)$, $b_1 = (-1, p)$, $b_2 = (3, 1)$. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija za koju je $f(a_1) = b_1$ i $f(a_2) = b_2$. Odrediti matricu linearne transformacije f. U zavisnosti od parametra $p \in \mathbb{R}$ diskutovati $\dim(f(\mathbb{R}^2))$.

$\boxed{\text{B}}$ DISKRETNA MATEMATIKA i ALGEBRA 22.01.2017.

1. Data je tačka F, i prava b određena tačkom $B \in b$ i vektorom pravca $\vec{b}$, pri čemu $F \notin b$. U funkciji od $\vec{r}_F$, $\vec{r}_B$ i $\vec{b}$ izraziti vektore položaja tačaka G i H takvih da je FGH jednakostranični trougao kod kojeg je $FG \parallel b$ i $H \in b$.

2. Neka su $a = (-3, 1, -2)$, $b = (2, 1, 2)$, $c = (12, 1, 10)$ elementi prostora $\mathbb{R}^3$, i neka je $V = \mathrm{Lin}(a, b, c)$. Naći dimenziju prostora V i sve potskupove skupa $\{a, b, c\}$ koji su baza prostora V. Napisati jednačinu skupa V.

3. Neka je $a_1 = (2, 5)$, $a_2 = (1, 2)$, $b_1 = (-p, 2)$, $b_2 = (-2, 1)$. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija za koju je $f(a_1) = b_1$ i $f(a_2) = b_2$. Odrediti matricu linearne transformacije f. U zavisnosti od parametra $p \in \mathbb{R}$ diskutovati $\dim(f(\mathbb{R}^2))$.

$\boxed{\text{C}}$ DISKRETNA MATEMATIKA i ALGEBRA 22.01.2017.

1. Data je tačka X, i prava c određena tačkom $C \in c$ i vektorom pravca $\vec{c}$, pri čemu $X \notin c$. U funkciji od $\vec{r}_X$, $\vec{r}_C$ i $\vec{c}$ izraziti vektore položaja tačaka Y i Z takvih da je XYZ jednakostranični trougao kod kojeg je $XY \parallel c$ i $Z \in c$.

2. Neka su $a = (2, 1, -3)$, $b = (1, 2, 3)$, $c = (7, 8, 3)$ elementi prostora $\mathbb{R}^3$, i neka je $V = \mathrm{Lin}(a, b, c)$. Naći dimenziju prostora V i sve potskupove skupa $\{a, b, c\}$ koji su baza prostora V. Napisati jednačinu skupa V.

3. Neka je $a_1 = (2, 3)$, $a_2 = (1, 1)$, $b_1 = (-1, 2)$, $b_2 = (2, p)$. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija za koju je $f(a_1) = b_1$ i $f(a_2) = b_2$. Odrediti matricu linearne transformacije f. U zavisnosti od parametra $p \in \mathbb{R}$ diskutovati $\dim(f(\mathbb{R}^2))$.

$\boxed{\text{D}}$ DISKRETNA MATEMATIKA i ALGEBRA 22.01.2017.

1. Data je tačka V, i prava d određena tačkom $D \in d$ i vektorom pravca $\vec{d}$, pri čemu $V \notin d$. U funkciji od $\vec{r}_V$, $\vec{r}_D$ i $\vec{d}$ izraziti vektore položaja tačaka N i K takvih da je VNK jednakostranični trougao kod kojeg je $VN \parallel d$ i $K \in d$.

2. Neka su $a = (-1, 3, 2)$, $b = (3, 1, -1)$, $c = (-7, -9, -1)$ elementi prostora $\mathbb{R}^3$, i neka je $V = \mathrm{Lin}(a, b, c)$. Naći dimenziju prostora V i sve potskupove skupa $\{a, b, c\}$ koji su baza prostora V. Napisati jednačinu skupa V.

3. Neka je $a_1 = (2, -1)$, $a_2 = (1, -1)$, $b_1 = (1, 3)$, $b_2 = (-2, p)$. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija za koju je $f(a_1) = b_1$ i $f(a_2) = b_2$. Odrediti matricu linearne transformacije f. U zavisnosti od parametra $p \in \mathbb{R}$ diskutovati $\dim(f(\mathbb{R}^2))$.

$\boxed{\text{A}}$ REŠENJA:

1. Neka je P_1 projekcija tačke P na na pravu a, dakle $\vec{r}_{P_1} = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$. $|PP_1|$ je dužina visine trougla PQR, te je dužina stranice trougla $|PQ| = \frac{2}{\sqrt{3}}|PP_1|$. Tako dobijamo (postoje dva rešenja) $\vec{r}_Q = \vec{r}_P \pm \frac{2}{\sqrt{3}}|PP_1|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ i $\vec{r}_R = \vec{r}_{P_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$.

2. $\dim V = \text{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a\!: & b\!: & c\!: \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 11 \end{bmatrix} \end{array} = \text{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a\!: & b\!: & c\!: \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 14 \\ 4 & -1 & 11 \end{bmatrix} \end{array} = 2,$

Svaka dva od vektora skupa $\{a, b, c\}$ su nekolinearna tj. linearno nezavisna jer su im koordinate neproporcionalne, te je su svi dvočlani skupovi $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ baze prostora V. Kako je $\dim V = 2$, sledi da je V ravan koja sadrži koordinatni početak. Jedan njen vektor normale je npr. $a \times b = (-7, -14, 7) \parallel (-1, -2, 1)$, te jednačina ravni V glasi $-x - 2y + z = 0$.

3. Za matricu $M_f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ je $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ p \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, što je ekvivalentno sa sistemom linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcr} -2a & - & 3b & = & -1 \\ a & + & 2b & = & 3 \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{rcrcr} -2c & - & 3d & = & p \\ c & + & 2d & = & 1 \end{array}$ čijim rešavanjem dobijamo da je $M_f = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -2p-3 & p+2 \end{bmatrix}$. Kako je $\dim(f(\mathbb{R}^2)) = \text{rang} M_f \in \{1, 2\}$, iz $\det M_f = 3p + 1$ sledi da je $\dim(f(\mathbb{R}^2)) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2 & , & p \neq -\frac{1}{3} \\ 1 & , & p = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$.

$\boxed{\text{B}}$ REŠENJA:

1. Neka je F_1 projekcija tačke F na na pravu b, dakle $\vec{r}_{F_1} = \vec{r}_B + \frac{(\vec{r}_F - \vec{r}_B)\vec{b}}{\vec{b}\vec{b}}\vec{b}$. $|FF_1|$ je dužina visine trougla FGH, te je dužina stranice trougla $|FG| = \frac{2}{\sqrt{3}}|FF_1|$. Tako dobijamo (postoje dva rešenja) $\vec{r}_G = \vec{r}_F \pm \frac{2}{\sqrt{3}}|FF_1|\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ i $\vec{r}_H = \vec{r}_{F_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$.

2. $\dim V = \text{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a\!: & b\!: & c\!: \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix} \end{array} = \text{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a\!: & b\!: & c\!: \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix} \end{array} = 2,$

Svaka dva od vektora skupa $\{a, b, c\}$ su nekolinearna tj. linearno nezavisna jer su im koordinate neproporcionalne, te je su svi dvočlani skupovi $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ baze prostora V. Kako je $\dim V = 2$, sledi da je V ravan koja sadrži koordinatni početak. Jedan njen vektor normale je npr. $a \times b = (4, 2, -5)$, te jednačina ravni V glasi $4x + 2y - 5z = 0$.

3. Za matricu $M_f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ je $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, što je ekvivalentno sa sistemom linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcr} 2a & + & 5b & = & -p \\ a & + & 2b & = & -2 \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{rcrcr} 2c & + & 5d & = & 2 \\ c & + & 2d & = & 1 \end{array}$ čijim rešavanjem dobijamo da je $M_f = \begin{bmatrix} 2p-10 & 4-p \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Kako je $\dim(f(\mathbb{R}^2)) = \text{rang} M_f \in \{1, 2\}$, iz $\det M_f = p - 4$ sledi da je $\dim(f(\mathbb{R}^2)) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2 & , & p \neq 4 \\ 1 & , & p = 4 \end{array} \right.$.

$\boxed{\text{C}}$ **REŠENJA:**

1. Neka je X_1 projekcija tačke X na na pravu c, dakle $\vec{r}_{X_1} = \vec{r}_C + \dfrac{(\vec{r}_X - \vec{r}_C)\vec{c}}{\vec{c}\vec{c}}\vec{c}$. $|XX_1|$ je dužina visine trougla XYZ, te je dužina stranice trougla $|XY| = \frac{2}{\sqrt{3}}|XX_1|$. Tako dobijamo (postoje dva rešenja) $\vec{r}_Y = \vec{r}_X \pm \dfrac{2}{\sqrt{3}}|XX_1|\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$ i $\vec{r}_Z = \vec{r}_{X_1} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{XY}$.

2. $\dim V = \operatorname{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a: & b: & c: \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \end{array} = \operatorname{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a: & b: & c: \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = 2,$

Svaka dva od vektora skupa $\{a,b,c\}$ su nekolinearna tj. linearno nezavisna jer su im koordinate neproporcionalne, te je su svi dvočlani skupovi $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$ baze prostora V. Kako je $\dim V = 2$, sledi da je V ravan koja sadrži koordinatni početak. Jedan njen vektor normale je npr. $a \times b = (9,-9,3) \parallel (3,-3,1)$, te jednačina ravni V glasi $3x - 3y + z = 0$.

3. Za matricu $M_f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ je $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ p \end{bmatrix}$, što je ekvivalentno sa sistemom linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcr} 2a & + & 3b & = & -1 \\ a & + & b & = & 2 \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{rcrcr} 2c & + & 3d & = & 2 \\ c & + & d & = & p \end{array}$ čijim rešavanjem dobijamo da je $M_f = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 3p-2 & 2-2p \end{bmatrix}$. Kako je $\dim(f(\mathbb{R}^2)) = \operatorname{rang} M_f \in \{1,2\}$, iz $\det M_f = p + 4$ sledi da je $\dim(f(\mathbb{R}^2)) = \begin{cases} 2 & , \ p \neq -4 \\ 1 & , \ p = -4 \end{cases}$.

$\boxed{\text{D}}$ **REŠENJA:**

1. Neka je V_1 projekcija tačke V na na pravu d, dakle $\vec{r}_{V_1} = \vec{r}_D + \dfrac{(\vec{r}_V - \vec{r}_D)\vec{d}}{\vec{d}\vec{d}}\vec{d}$. $|VV_1|$ je dužina visine trougla VNK, te je dužina stranice trougla $|VN| = \frac{2}{\sqrt{3}}|VV_1|$. Tako dobijamo (postoje dva rešenja) $\vec{r}_N = \vec{r}_V \pm \dfrac{2}{\sqrt{3}}|VV_1|\dfrac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$ i $\vec{r}_K = \vec{r}_{V_1} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{VN}$.

2. $\dim V = \operatorname{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a: & b: & c: \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & -9 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} = \operatorname{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a: & b: & c: \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 0 & 10 & -30 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = 2,$

Svaka dva od vektora skupa $\{a,b,c\}$ su nekolinearna tj. linearno nezavisna jer su im koordinate neproporcionalne, te je su svi dvočlani skupovi $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$ baze prostora V. Kako je $\dim V = 2$, sledi da je V ravan koja sadrži koordinatni početak. Jedan njen vektor normale je npr. $a \times b = (-5,5,-10) \parallel (-1,1,-2)$, te jednačina ravni V glasi $-x + y - 2z = 0$.

3. Za matricu $M_f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ je $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ p \end{bmatrix}$, što je ekvivalentno sa sistemom linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcr} 2a & - & b & = & 1 \\ a & - & b & = & -2 \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{rcrcr} 2c & - & d & = & 3 \\ c & - & d & = & p \end{array}$ čijim rešavanjem dobijamo $M_f = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3-p & 3-2p \end{bmatrix}$. Kako je $\dim(f(\mathbb{R}^2)) = \operatorname{rang} M_f \in \{1,2\}$, iz $\det M_f = -p - 6$ sledi da je $\dim(f(\mathbb{R}^2)) = \begin{cases} 2 & , \ p \neq -6 \\ 1 & , \ p = -6 \end{cases}$.