A **Prezime, ime, br. indeksa:** ______________________________ **19.01.2021.**

Studijski program **E1** **E2** **PR** **SV** **IT** **IN** **(zaokruži)** **KOLOKVIJUM 2**

U zadatku je dato više odgovora, a treba zaokružiti brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,…,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- Izraziti vektor $\vec{x} = (4,4,4)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{r}_A = (1,0,1)$, $\vec{r}_B = (0,1,1)$ i $\vec{r}_C = (1,1,0)$ $\vec{x} = 2\ \vec{r}_A + 2\ \vec{r}_B + 2\ \vec{r}_C$ i zapreminu tetraedra $OABC$, gde je $O(0,0,0)$ tj. $V_{OABC} =$ 2/6 = 1/3

- Ako su vektori $\vec{s}$ i $\vec{t}$ jedinični, a $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ i $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ uzajamno normalni, tada je **1)** $\sphericalangle(\vec{s},\vec{t}) = \frac{\pi}{6}$ **2)** $\sphericalangle(\vec{s},\vec{t}) = \frac{\pi}{4}$ **3)** $\sphericalangle(\vec{s},\vec{t}) = \frac{\pi}{3}$ **4)** $\sphericalangle(\vec{s},\vec{t}) = \frac{\pi}{2}$ **5)** $\sphericalangle(\vec{s},\vec{t}) = \arccos\frac{1}{2}$ **6)** $\sphericalangle(\vec{s},\vec{t}) = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Neka je p prava čija je jednačina $p: x + y = 3 \wedge y = 3$. Napisati bar jedan jedinični vektor pravca $\vec{p}$ prave p: $\vec{p} = (0, 0, 1)$ i koordinate tačke A prave p koja je najbliža koordinatnom početku $O(0,0,0)$: $A(0, 3, 0)$.

- Neka je $\vec{r}_A = (1,0,1)$, $\vec{r}_B = (0,1,1)$ i $\vec{r}_C = (1,1,0)$ tada je: **1)** $|\vec{r}_A| = \sqrt{2}$ **2)** $\vec{r}_A \cdot \vec{r}_B = 1$ **3)** $P_{\triangle ABC} = \sqrt{3}/2$ **4)** $\sphericalangle(\vec{r}_A, \vec{r}_B) = \pi/3$ **5)** $|\vec{r}_A - \vec{r}_B| = \sqrt{2}$ **6)** $\vec{r}_A \times \vec{r}_B = (-1,-1,1)$ **7)** $(\vec{r}_A \times \vec{r}_B)\vec{r}_C = -2$ **8)** $\overrightarrow{BA} = (1,-1,0)$

- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $x - ay = 1 \ \wedge\ ax + y = 1$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** određen: $a \in \mathbb{R}$ **2)** kontradiktoran: / **3)** jednostruko neodređen: /

- **Zavisne** uređene trojke u vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ su: **1)** $\big((6,3,-1),(9,3,1),(7,3,0)\big)$ **2)** $\big((0,-1,2),(0,-1,3),(0,1,4)\big)$ **3)** $\big((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\big)$ **4)** $\big((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\big)$

- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3 2 2 1 0 3 1 1 1

- **Napisati bar jednu,** ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ za koju važi da **1)** je injektivna $f(x,y) = (x, y, 0)$ **2)** nije injektivna $f(x,y) = (0, 0, 0)$ **3)** je sirjektivna $f(x,y) = (\quad,\quad,\quad)$ **4)** nije sirjektivna $f(x,y) = (0, 0, 0)$

- Neka su $ABCDEF$ uzastopna temena pravilnog šestougla i T njegov centar (težište). Izraziti vektore $\overrightarrow{BT}$, $\overrightarrow{BE}$ i $\overrightarrow{AE}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{BT} = \vec{b} - \vec{a}$ $\overrightarrow{BE} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$ $\overrightarrow{AE} = 2\vec{b} - \vec{a}$

- Koordinate normalne projekcije A' tačke $A(3,3,0)$ na ravan određenu sa $2x + 2y - z = 3$ su: $A'(1, 1, 1)$

- Normalna projekcija vektora $\vec{x} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ na pravu $\ell: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-1}$ je vektor: $\mathbf{pr}_\ell(\vec{x}) = (2, 2, -2)$

- Odrediti vektor $\vec{x}\,' = \mathbf{pr}_{\alpha,\vec{a}}(\vec{x})$ koji je kosa projekcija vektora $\vec{x} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ na ravan $\alpha: x + y + 4z = 5$ ako su zraci projektovanja paralelni sa pravom $a: \frac{x-6}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+7}{-1}$. $\vec{x}\,' = (-6, -14, 5)$

- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su **kolinearni** ako je: **1)** $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ **2)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ **3)** $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ **4)** $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \le 2$ **5)** $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \le 1$ **6)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nezavisni **7)** $(\exists\lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda\vec{b}$ **8)** $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ **9)** $(\forall\lambda \in \mathbb{R})\ (\vec{a} \ne \lambda\vec{b} \ \wedge\ \lambda\vec{a} \ne \vec{b})$ **10)** $(\exists\alpha,\beta \in \mathbb{R})\ \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \ \wedge\ \alpha^2 + \beta^2 \ne 0$

- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **nekomplanarni** ako i samo ako je: **1)** $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \le 2$ **2)** $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \le 3$ **3)** $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$ **4)** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ **5)** $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \ne 0$ **6)** $(\exists\alpha,\beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ **7)** $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \ \Rightarrow\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ **8)** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

- Linearna transformacija $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x - y, 2x + ay)$ je izomorfizam akko $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

- Neka su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični vektori $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k} \perp \vec{i}$ i $\vec{a} \neq 0$. Tada je 1) $\vec{x} = (\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k}$ 2) $(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k})$ je trijedar vektora 3) Projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{i}$ je vektor $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}$ 4) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ 5) Algebarska projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{i}$ je broj $\vec{x}\vec{i}$ 6) $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$ 7) $|\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})| = \frac{|\vec{a}\vec{x}|}{|\vec{a}|}$

- Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ generatorna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = k$. Tada je 1) $m \leq k \leq n$ 2) $n \leq k \leq m$ 3) $m \leq k$ 4) $k \leq m \leq n$ 5) $k \leq n \leq m$ 6) $n \leq m \leq k$

- Ako je A kvadratna matrica reda 5, tada je: 1) **rang** A= 5 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$, 2) $\det A = 0 \Rightarrow$ **rang** A= 5 3) **rang** A= 5 $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$ 4) $\det A = 0 \Rightarrow$ **rang** A= 0 5) $\det A = 0 \Leftrightarrow$ **rang** A≤ 4,

- **Svaka** linearna transformacija različita od nula transformacije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ je: 1) sirjektivna 2) injektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog

- Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je: 1) $|det(A)| = \lambda |det(A')|$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ 2) $\mathbf{rang}(A) = \mathbf{rang}(A')$ 3) $A \cdot A' = I$ 4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$

- Za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 2 i svaki skalar λ je: 1) $A + C = C + A$ 2) $AC = CA$ 3) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 4) $\det AB = \det BA$ 5) $(B + C)A = AB + AC$ 6) $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A)$ 7) $\det(AB) = \det(B) det(A)$ 8) $(AB)^2 = A^2 B^2$ 9) $\mathbf{rang}(AB) = \mathbf{rang}(A)\mathbf{rang}(B)$ 10) $C(BA) = (CB)A$

ALGEBRA, KOLOKVIJUM 2 — 19.01.2021.

1. Prava p sadrži tačku P i paralelna je sa vektorom $\vec{p}$. Tačka A ne pripada pravoj p. Preko $\vec{r}_A$, $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja temena B, C i D kvadrata $ABCD$ čija je ravan normalna na pravu p, i centar (presek dijagonala) kvadrata pripada pravoj p.

2. Neka je S skup svih rešenja sistema linearnih jednačina
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & 4z & = & 0 \end{array}$$
nad $\mathbb{R}$ po nepoznatim $x, y, z \in \mathbb{R}$.
   (a) Dokazati da je S potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ i odrediti jednu bazu potprostora S.
   (b) Neka je $V = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \forall s \in S,\ v \cdot s = 0\}$. Dokazati da je V potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ i odrediti jednu bazu potprostora V.

3. Neka je $a_1 = (2, -1)$, $a_2 = (-3, 2)$, $b_1 = (0, -1, 1)$ i $b_2 = (2, 2, -1)$. Za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ važi $f(a_1) = b_1$ i $f(a_2) = b_2$.
   (a) Odrediti matricu linearne transformacije f i njen rang.
   (b) Ispitati injektivnost i sirjektivnost linearne transformacije f.
   (c) Odrediti skup $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0, 0)\}$.