B **Prezime, ime, br. indeksa:** ______________________ **23.01.2011**

Odsek E1 E2 (zaokruži) **KOLOKVIJUM 2**

Studenti koji kod pitanja do zvezdica naprave više od tri greške nisu položili ispit! U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti tačne odgovore tj. slova ili brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- Za ravan $\alpha: z=1$ napisati jedan njen vektor normale $\vec{n}_\alpha = (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ )$ i koordinate jedne njene tačke $A(\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ )$

- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je sistem linernih jednačina $2x+y=1 \wedge 4x+ay=a$ nad poljem realnih brojeva: **1)** neodređen: $a=2$ **2)** određen: $a\neq 2$ **3)** kontradiktoran:

- Za vektore $\vec{a}=(-2,1,2)$ i $\vec{b}=(1,4,8)$ izračunati: **1)** $|\vec{a}|=$ 3 **2)** $|\vec{b}|=$ 9 **3)** $\vec{a}-2\vec{b}=$ $(-4,-7,-14)$ **4)** $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ 18 **5)** $\vec{a}\times\vec{b}=$ $(0,18,-9)$ **6)** $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=$ $\frac{2}{3}$

- Koje su od sledećih uređenih n-torki zavisne u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$: **1)** $\big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\big)$ **2)** $\big((1,0,0),(0,-1,0)\big)$ **3)** $\big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,2,3)\big)$ **4)** $\big((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\big)$

- $\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = [1\ 1\ {-1}]$ $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix} = 2$ $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix} = -2$ $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

- Matrice linearnih transformacija $h(x)=5x$, $f(x,y)=x+2y$, $g(x,y,z)=(x,x-y)$ i $s(x,y)=(3x,y)$ su:
$M_h = [5]$ $M_f = [1\ 2]$ $M_g = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -4 & 2 & -2\end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ 0 $\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}$ 1

* *

- Neka je $\varphi: V \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k})=(x_1,x_2,x_3)$ tj. $\varphi(\vec{x})=(\vec{x}\vec{i},\vec{x}\vec{j},\vec{x}\vec{k})$, gde su $(V,\mathbb{R},+,\cdot)$ i $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},+,\cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V\to\mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija **2)** injektivna **3)** sirjektivna **4)** bijektivna **5)** izomorfizam

- Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\det: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ **2)** $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ **3)** $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ **4)** $\det: \mathcal{M} \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{R}$ **5)** det je linearna

- Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\text{rang}: \mathcal{M}\to\mathbb{R}$ **2)** $\text{rang}: \mathcal{M}\to\mathbb{N}$ **3)** $\text{rang}: \mathcal{M}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ **4)** $\text{rang}: \mathcal{M}\xrightarrow{1-1}\mathbb{N}\cup\{0\}$ **5)** $\text{rang}: \mathcal{M}\xrightarrow{na}\mathbb{N}\cup\{0\}$

- Ako je $f(0)=0$, tada funkcija f: **1)** sigurno jeste linearna transformacija **2)** sigurno nije linearna transformacija **3)** može a ne mora biti linearna transformacija

- Neka je $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ nezavisna u prostoru V, $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ generatorna za prostor V i $\dim V=m$. Tada je
1) $m\le k\le n$ **2)** $n\le k\le m$ **3)** $n\le m\le k$ **4)** $k\le m\le n$ **5)** $k\le n\le m$ **6)** $m\le n\le k$

- Neka je $\vec{r}_M$ vektor položaja tačke M, $|\overrightarrow{MN}|=\ell$. Odrediti $\vec{r}_N$ u zavisnosti od $\vec{r}_M$, $\vec{p}$ i ℓ, ako je vektor $\vec{p}$ istog pravca kao i vektor $\overrightarrow{MN}$, a suprotnog smera od vektora $\overrightarrow{MN}$. $\vec{r}_N = \vec{r}_M - \ell\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$

- Neka je $\ell-$ torka vektora $(b_1,b_2,\ldots,b_\ell)$ baza prostora V i neka je $(d_1,d_2,\ldots,d_k)$ zavisna $k-$ torka vektora. Tada je: **1)** $k\le\ell$ **2)** $\ell\le k$ **3)** $k=\ell$ **4)** $\ell<k$ **5)** $\ell>k$ **6)** ništa od prethodnog

- U vektorskom prostoru slobodnih vektora, trojka vektora (a,b,c) je:
1) uvek nezavisna, **2)** uvek zavisna, **3)** nekad nezavisna a nekad zavisna. **4)** nikad nezavisna

- Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$? **1)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

- Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:
  1) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$, **dim** $U=$ 1 **2)** $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ **dim** $U=$ 1
  3) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ **dimU**= 0 **4)** $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z\}$ **dim** $U=$ 2

- Neka je $a = (2,0,2)$, $b = (-3,0,3)$, $c = (1,0,-1)$, $d = (-1,0,1)$, $e = (0,1,0)$, $f = (1,0,0)$, $g = (1,0,2)$. Odrediti dimenzije sledećih potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$: **1)** $V = L(e,f,g) \Rightarrow dim(V) =$ 3
  2) $V = L(a,b) \Rightarrow dim(V) =$ 2 **3)** $V = L(g) \Rightarrow dim(V) =$ 1 **4)** $V = L(b,c,d) \Rightarrow dim(V) =$ 1
  5) $V = L(b,c,e) \Rightarrow dim(V) =$ 2 **6)** $V = L(a,g) \Rightarrow dim(V) =$ 2 **7)** $V = L(a,b,c) \Rightarrow dim(V) =$ 2

- Ako je A kvadratna matrica reda n, tada je: **1)** **rang** A$= n \Leftarrow \det A \neq 0$, **2)** $\det A = 0 \Rightarrow$ **rang** A$= 0$
  3) $\det A{=}0 \Leftrightarrow$ **rang** A$\leq n-1$, **4)** $\det A{=}0 \Rightarrow$ **rang** A$= n$ **5)** **rang** A$=n \Rightarrow \det A{\neq}0$, **6)** **rang** A$=n \Leftarrow \exists A^{-1}$.

- Odrediti sve vrednosti realnih parametara a i b za koje je sistem linearnih jednačina
  $$\begin{aligned} (a-1)x \;+\; ay &= 0 \\ -\;(a+1)y &= a+1 \end{aligned}$$
  1) kontradiktoran: $a = 1$
  2) određen: $a \neq -1 \wedge a \neq 1$
  3) 1 puta neodređen: $a = -1$
  4) 2 puta neodređen: ______

- Neka je je $ABCD$ paralelogram, gde mu je AC dijagonala. Tada u zavisnosti od $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ izraziti $\overrightarrow{AT}$, gde je T težište trougla ACD. $\overrightarrow{AT} =$ $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

- Izraziti vektor $\vec{x} = (1,0,1)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1,0,-1)$, $\vec{b} = (0,1,-1)$ i $\vec{c} = (1,1,0)$: $\vec{x} =$
  $\vec{x} = -\vec{b} + \vec{c}$

- U vektorskom prostoru slobodnih vektora, četvorka vektora (a,b,c,d) je:
  1) uvek generatorna **2)** nikad baza, **3)** može ali ne mora da bude generatorna **4)** nikad nezavisna

- Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je.
  1) $|\det(A)| = \lambda |\det(A')|$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ **2)** $\mathbf{rang}(A) = \mathbf{rang}(A')$ **3)** $A \cdot A' = I$ **4)** $\det A = 0 \Leftrightarrow \det A' = 0$

- Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 3 i svaki skalar λ:
  1) $A(BC) = (AB)C$ **2)** $(B+C)A = BA+CA$ **3)** $(AB)^2 = A^2B^2$ **4)** $A-B = B-A$ **5)** $\det(AB) = \det(B)det(A)$
  6) $\mathbf{rang}(AB) = \mathbf{rang}(A)rang(B)$ **7)** $\det(A \cdot B) = \det(A) + \det(B)$ **8)** $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$

- Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$:
  a)$(\vec{x} - \frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}) \perp \vec{x}$ **b)**$(\vec{x} - \frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}) \perp \vec{a}$ **c)**$(\vec{x} - \frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}) \parallel \vec{x}$ **d)**$(\vec{x} - \frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}) \parallel \vec{a}$ **e)**ništa od prethodnog

- Neka su a, b i c proizvoljni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+b, a+c, b+c)$ je:
  a) uvek zavisna **b)** uvek nezavisna **c)** zavisna ili nezavisna, tj. zavisi od izbora vektora a, b, c.

- Neka su a, b i c proizvoljni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+b, a+c, -a+b-2c)$ je:
  a) uvek zavisna **b)** uvek nezavisna **c)** zavisna ili nezavisna, tj. zavisi od izbora vektora a, b, c.

- Vektri $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su kolinearni ako i samo ako:
  a) **rang** $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ **b)** **rang** $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ **c)** **rang** $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ **d)** $(\exists\lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda\vec{b}$
  e) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ **f)** $(\exists\lambda \in \mathbb{R})\ (\vec{a} = \lambda\vec{b} \ \vee\ \lambda\vec{a} = \vec{b})$ **g)** $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \ \wedge\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ **h)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni

- Neka je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ proizvoljni vektor i neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{m} \cdot \vec{x}$, gde je $\vec{m} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}$ dati slobodni vektor. Funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je:
  1) linearna transformacija **2)** injektivna **3)** sirjektivna **4)** bijektivna **5)** izomorfizam

- Za svaku linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i svako $x, y, \lambda, v \in \mathbb{R}$ tačno je: **1)** $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ **2)** $f(0) = 0$
  3) $f(0) = 1$ **4)** $f(xy) = f(x)f(y)$ **5)** $f(xy) = x\,f(y)$ **6)** $f(x) = ax$ za neko $a \in \mathbb{R}$ **7)** $f(\lambda + v) = f(\lambda) + f(v)$

- Za koje $a, b \in \mathbb{R}$ su f i g linearne transformacije i za one koje jesu, naći odgovarajuću matricu i diskutovati njen rang:
  $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (y3^{x+b} - bz, y\sin(a-b))$ /

  $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (z - bxy, a^{x+a})$ $a = 0 \wedge b = 0$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ rang $= 1$