A **Prezime, ime, br. indeksa:** ______________________ **23.01.2011**

Odsek E1 E2 (zaokruži) **KOLOKVIJUM 2**

Studenti koji kod pitanja do zvezdica naprave više od tri greške nisu položili ispit! U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti tačne odgovore tj. slova ili brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- Za ravan $\alpha: \ x = 0$ napisati jedan njen vektor normale $\vec{n}_\alpha = ($ 1 , 0 , 0 $)$ i koordinate jedne njene tačke $A($ 0 , 1 , 3 $)$

- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je sistem linernih jednačina $x - 2y = 2 \wedge ax + 2y = a$ nad poljem realnih brojeva: **1)** neodređen: / **2)** određen: $a \neq -1$ **3)** kontradiktoran: $a = -1$

- Za vektore $\vec{a} = (-3, 0, 4)$ i $\vec{b} = (-8, 1, -4)$ izračunati: **1)** $|\vec{a}| =$ 5 **2)** $|\vec{b}| =$ 9 **3)** $\vec{a} - 2\vec{b} =$ (13, −2, 12) **4)** $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ 8 **5)** $\vec{a} \times \vec{b} =$ (−4, −44, −3) **6)** $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) =$ 8/45

- Koje su od sledećih uređenih n-torki nezavisne za vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$: **1)** $\big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\big)$ **2)** $\big((1,0,0),(0,-1,0)\big)$ **3)** $\big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,2,3)\big)$ **4)** $\big((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\big)$

- $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$ $\quad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

- Matrice linearnih transformacija $f(x) = (2x, x)$, $g(x, y, z) = (x, x)$ $h(x) = 13x$ i $s(x, y, z) = 3x$ su:
$M_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad M_h = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$ $\quad M_s = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 2 $\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1 $\quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 1 $\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 1 $\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 2 $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 1 $\quad \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ 1 $\quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ 1

* *

- Odrediti sve vrednosti realnih parametara a i b za koje je sistem linearnih jednačina
$$\begin{aligned} ax \ + \ \ ay &= 0 \\ -\ (a-1)y &= a-1 \end{aligned}$$
1) kontradiktoran: /
2) određen: $a \neq 0 \wedge a \neq 1$
3) 1 puta neodređen: $a = 0 \vee a = 1$
4) 2 puta neodređen: /

- Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačka T težište trougla ABC (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{AT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

- Izraziti vektor $\vec{x} = (3, 3, 2)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 0)$:
$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$

- U vektorskom prostoru slobodnih vektora, četvorka vektora (a, b, c, d) je:
1) uvek zavisna **2)** nikad baza, **3)** može ali ne mora da bude generatorna.

- U vektorskom prostoru slobodnih vektora, trojka vektora (a, b, c) je:
1) uvek nezavisna, **2)** uvek zavisna, **3)** nekad nezavisna a nekad zavisna.

- Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$? **1)** $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

- Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je:
1) $|det(A)| = \lambda |det(A')|$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ **2)** $\mathbf{rang}(A) = \mathbf{rang}(A')$ **3)** $A \cdot A' = I$ **4)** $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$

- Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 2 i svaki skalar λ:
1) $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$ **2)** $(B + C)A = BA + CA$ **3)** $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$ **4)** $\det(AB) = \det(B)det(A)$ **5)** $(AB)^2 = A^2B^2$ **6)** $\mathbf{rang}(AB) = \mathbf{rang}(A)\mathbf{rang}(B)$ **7)** $\mathbf{rang}(AB) = \mathbf{rang}(A)\mathbf{rang}(B)$ **8)** $A(BC) = (AB)C$

- Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$:
a) $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \perp \vec{x}$ **b)** $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \perp \vec{a}$ **c)** $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \parallel \vec{x}$ **d)** $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \parallel \vec{a}$ **e)** ništa od prethodnog
- Neka su a, b i c proizvoljni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+b, a+c, b+c)$ je:
a) uvek zavisna **b)** uvek nezavisna **c)** nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.
- Neka su a, b i c proizvoljni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+b, a+c, -a+b-2c)$ je:
a) uvek zavisna **b)** uvek nezavisna **c)** nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.
- Vektri $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su kolinearni ako i samo ako:
a) $\mathbf{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ **b)** $\mathbf{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ **c)** $\mathbf{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ **d)** $(\exists\lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda\vec{b}$
e) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ **f)** $(\exists\lambda \in \mathbb{R})\ (\vec{a} = \lambda\vec{b}\ \vee\ \lambda\vec{a} = \vec{b})$ **g)** $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0\ \wedge\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ **h)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni
- Neka je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ proizvoljni vektor i neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{m} \cdot \vec{x}$, gde je $\vec{m} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}$ dati slobodni vektor. Funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je:
1) linearna transformacija **2)** injektivna **3)** sirjektivna **4)** bijektivna **5)** izomorfizam
- Za svaku linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i svako $x, y, \lambda, v \in \mathbb{R}$ tačno je: **1)** $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ **2)** $f(0) = 0$ **3)** $f(0) = 1$ **4)** $f(xy) = f(x)f(y)$ **5)** $f(xy) = x\,f(y)$ **6)** $f(x) = ax$ za neko $a \in \mathbb{R}$ **7)** $f(\lambda + v) = f(\lambda) + f(v)$
- Neka je $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1, x_2, x_3)$ tj. $\varphi(\vec{x}) = (\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k})$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija **2)** injektivna **3)** sirjektivna **4)** bijektivna **5)** izomorfizam
- Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\det : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ **2)** $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ **3)** $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ **4)** $\det : \mathcal{M} \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{R}$ **5)** det je linearna
- Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ **2)** $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ **3)** $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ **4)** $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N} \cup \{0\}$ **5)** $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{N} \cup \{0\}$
- Ako je $f(0) = 0$, tada funkcija f: **1)** sigurno jeste linearna transformacija **2)** sigurno nije linearna transformacija **3)** može a ne mora biti linearna transformacija
- Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nezavisna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ generatorna za prostor V i $\dim V = k$. Tada je
1) $m \leq k \leq n$ **2)** $n \leq k \leq m$ **3)** $n \leq m \leq k$ **4)** $k \leq m \leq n$ **5)** $k \leq n \leq m$ **6)** $m \leq n \leq k$
- Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A, $|\overrightarrow{AB}| = d$. Odrediti $\vec{r}_B$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{a}$ i d, ako je vektor $\vec{a}$ istog pravca kao i vektor $\overrightarrow{AB}$, a suprotnog smera od vektora $\overrightarrow{AB}$. $\vec{r}_B = \vec{r}_A - d\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Neka je $k-$ torka vektora $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ baza prostora V i neka je $(d_1, d_2, \ldots, d_\ell)$ zavisna $\ell-$ torka vektora. Tada je: **1)** $k \leq \ell$ **2)** $\ell \leq k$ **3)** $k = \ell$ **4)** $\ell < k$ **5)** $\ell > k$ **6)** ništa od prethodnog
- Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:
1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$, $\mathbf{dim}\ U =$ 1 **2)** $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ $\mathbf{dim}\ U =$ 1
3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ **dimU=** 0 **4)** $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z\}$ $\mathbf{dim}\ U =$ 2
- Neka je $a = (2, 0, 2)$, $b = (-3, 0, 3)$, $c = (1, 0, -1)$, $d = (-1, 0, 1)$, $e = (0, 1, 0)$, $f = (1, 0, 0)$, $g = (1, 0, 2)$. Odrediti dimenzije sledećih potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$: **1)** $V = L(a, b, c) \Rightarrow dim(V) =$ 2
2) $V = L(a) \Rightarrow dim(V) =$ 1 **3)** $V = L(a, b) \Rightarrow dim(V) =$ 2 **4)** $V = L(b, c, d) \Rightarrow dim(V) =$ 1
5) $V = L(b, c, e) \Rightarrow dim(V) =$ 2 **6)** $V = L(a, g) \Rightarrow dim(V) =$ 2 **7)** $V = L(e, f, g) \Rightarrow dim(V) =$ 3
- Ako je A kvadratna matrica reda n, tada je: **1)** $\det A = 0 \Rightarrow \mathbf{rang}\,\mathrm{A} = 0$ **2)** $\det A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{rang}\,\mathrm{A} \leq n - 1$, **3)** $\det A = 0 \Rightarrow \mathbf{rang}\,\mathrm{A} = n$ **4)** $\mathbf{rang}\,\mathrm{A} = n \Rightarrow \det A \neq 0$, **5)** $\mathbf{rang}\,\mathrm{A} = n \Leftarrow \det A \neq 0$, **6)** $\mathbf{rang}\,\mathrm{A} = n \Leftarrow \exists A^{-1}$.
- Za koje $a, b \in \mathbb{R}$ su f i g linearne transformacije i za one koje jesu, naći odgovarajuću matricu i diskutovati njen rang:
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (y3^{ax+b} - bz, y\sin(a - b))$ $a = 0,\ b \in \mathbb{R}$ $M_f = \begin{bmatrix} 0 & 3^b & -b \\ 0 & -\sin b & 0 \end{bmatrix}$ $r(f) = \begin{cases} 1, & b = k\pi \\ 2, & b \neq k\pi \end{cases}$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (z - bxy, 1 + a^{x+a})$ nikada