Prezime, ime, br. indeksa: Rešenja **11.07.2009**

Odsek E1 E2 (zaokruži) **KOLOKVIJUM 2**

Studenti koji kod pitanja do zvezdica naprave više od tri greške nisu položili ispit! U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti tačne odgovore tj. slova ili brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,…,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax + y = 1 \wedge x - y = -a$ nad poljem realnih brojeva je:
  1) jednostruko neodređen: - **3)** određen: $a \neq -1$
  2) dvostruko neodređen: - **4)** kontradiktoran: $a = -1$

- Ako je $\vec{a} = (1,2,2)$ i $\vec{b} = (2,-3,1)$, tada je
  $\vec{a}\vec{b} = -2$, $|\vec{a}| = 3$, $\vec{a} \times \vec{b} = (8,3,-7)$.

- Za vektore $\vec{a} = (1,1,-3)$ i $\vec{b} = (-1,1,2)$ važi: **1)** $\vec{a} \parallel \vec{b}$ **2)** $\vec{a} \perp \vec{b}$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ $\boxed{\textbf{4)}}$ $\vec{a} \not\perp \vec{b}$

- Neka je p prava čija je jednačina $x - 1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}$. Napisati jedan vektor pravca prave p:
  $\vec{p} = (1,2,-2)$, i koordinate jedne tačke prave p: $(1,-1,0)$.

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -8 \end{bmatrix}$

- Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n-torki koje su linearno NEZAVISNE u vektorkom prostoru trojki $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$: $\boxed{\textbf{1)}}$ $\big((0,1,0)\big)$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $\big((1,2,0),(1,1,0),(2,-1,1)\big)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $\big((1,0,0),(2,0,2)\big)$
  $\boxed{\textbf{4)}}$ $\big((1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\big)$ **5)** $\big((1,1,1),(2,2,2)\big)$ **6)** $\big((0,0,2),(0,0,0),(3,0,0)\big)$ **7)** $\big((0,1,0),(0,2,0)\big)$
  8) $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\big)$

- Neka je je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala. Tada u zavisnosti od $\vec{r}_D$, $\vec{r}_B$ i $\vec{r}_A$ napisati vektor položaja tačke C: $\vec{r}_C = \vec{r}_D - \vec{r}_A + \vec{r}_B$

- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
  $\underset{3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}}$ $\underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$ $\underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$ $\underset{2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$ $\underset{1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}$ $\underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$ $\underset{1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$ $\underset{0}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$

- Za ravan $\alpha : \ 2y - 5z = 1$ napisati jedan njen vektor normale $\vec{n}_\alpha = (0,2,-5)$ i koordinate jedne njene tačke $A(0, \frac{1}{2}, 0)$

- Zaokružiti funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ koje su izomorfizmi vektorskih prostora:
  1) $f(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$, $\boxed{\textbf{2)}}$ $f(x,y) = (x+y, x-y)$, **3)** $f(x) = 0$,

* *

- Odrediti vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ za koje je sistem $\begin{array}{rcrcl} x & + & by & = & 0 \\ ax & - & by & = & b \end{array}$
  (a) određen: $a \neq -1 \ \wedge \ b \neq 0$
  (b) kontradiktoran: $a = -1 \wedge b \neq 0$
  (c) 1 puta neodređen: $b = 0$
  (d) 2 puta neodređen: nikada

- Naći tačku T prodora prave $p : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{-1}$ kroz ravan $\alpha : 2x - y + z = 3$. $T(\frac{5}{3}, 0, -\frac{1}{3})$. Izračunati ugao između vektora $\vec{a} = (-1,-1,0)$ i $\vec{b} = (2,0,2)$: $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$

- Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uređena trojka vektora takvih da su svaka dva nekolinearna. Tada: **1)** trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno nezavisna **2)** trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno zavisna $\boxed{\textbf{3)}}$ postoje takvi vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ da je trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ nezavisna $\boxed{\textbf{4)}}$ postoje takvi vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ da je trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ zavisna

- U vektorskom prostoru slobodnih vektora, par vektora (a,b) je:
1) uvek generatoran, $\boxed{\textbf{2)}}$ nikad generatoran, **3)** nekad generatoran a nekad nije.

- U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$, generatorna četvorka (a,b,c,d) je:
1) uvek baza, **2)** uvek linearno nezavisna, $\boxed{\textbf{3)}}$ nikad linearno nezavisna, $\boxed{\textbf{4)}}$ nikad baza.

- Ako su $(v_1,\dots,v_n,v_{n+1})$ zavisni vektori, i ako je $\ell = \dim\Big(Lin(v_1,\dots,v_n,v_{n+1})\Big)$, tada je:
1) $\ell < n$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $\ell \le n$ **3)** $\ell = n$ **4)** $\ell \ge n$ **5)** $\ell > n$ **6)** Ništa od prethodnog

- Neka je $p=(1,1,1)$, $q=(0,2,2)$, $r=(0,0,3)$, $s=(0,4,0)$. Sledeće n-torke vektora su generatorne u prostoru $\mathbb{R}^3$: $\boxed{\textbf{1)}}$ (p,q,r) **2)** (q,r,s) $\boxed{\textbf{3)}}$ (p,q,r,s) **4)** (p,q) **5)** (p,r)

- Izraziti vektor $\vec{x}=(1,1,1)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(0,2,2)$ i $\vec{c}=(2,-1,0)$:
$\vec{x} = -\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

- Za koje $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ su vektori $\vec{a}=(1,2,3)$ i $\vec{b}=(1,\alpha,\beta)$:
1) nekolinearni: $\alpha\ne 2 \ \vee \ \beta\ne 3$ **2)** ortogonalni: $\alpha = -\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2},\ \beta\in\mathbb{R}$

- Napisati $\vec{r}_P$ vektor položaja tačke P simetrične tački $A(1,2,0)$ u odnosu na pravu $p:\ x=y=z$.
$\vec{r}_P = (1,0,2)$

- Koji od sledećih podskupova $U\subseteq\mathbb{R}^3=\{x=(x_1,x_2,x_3)|x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$ je podprostor prostora $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},+,\cdot)$:
$\boxed{\textbf{1)}}$ $U=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid x_1=2x_2=-9x_3\}$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $U=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2=0\}$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $U=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid x_1=0\}$
4) $U=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid x_1=x_2=x_3=3\}$ **5)** $U=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$ **6)** $U=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid x_1=2x_2=3x_3+1\}$,

- Koja od navedenih tvrđenja su tačna u proizvoljnom vektorskom prostoru $(V,F,+,\cdot)$:
$\boxed{\textbf{1)}}$ $(\forall x,y\in V)(\forall\alpha\in F)\ \alpha^2(x+y)=\alpha^2x+\alpha^2y$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $(\forall x\in V)\ 1\cdot x=x$ **3)** $\forall x,y\in V,\ x+x=x$
$\boxed{\textbf{4)}}$ $(\forall x\in V)(\forall\alpha,\beta\in F)\ (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ **5)** $(\forall x\in V)(\forall\alpha\in F)(\exists y\in V)\ \alpha y=x$
$\boxed{\textbf{6)}}$ $(\forall x\in V)(\forall\alpha\in F)\ \alpha(-x)=-(\alpha x)$ $\boxed{\textbf{7)}}$ $(\forall x\in V)\ 0\cdot x=0$ **8)** $(\forall x\in V)\ \alpha\cdot x=0\Rightarrow\alpha=0$

- Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix}-1&2\\4&1\end{bmatrix}$? **1)** $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

- Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A,B,C reda n i svaki skalar λ:
1) $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$ **2)** $\det(\lambda A)=\lambda\det(A)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $\det(ABC)=\det(A)\det(B)\det(C)$
4) $rang(AB)=rang(A)\,rang(B)$ $\boxed{\textbf{5)}}$ $A+(B+C)=(A+B)+C$ $\boxed{\textbf{6)}}$ $A(BC)=(AB)C$
$\boxed{\textbf{7)}}$ $A(B+C)=AB+AC$ **8)** $(AB)^2=A^2B^2$ $\boxed{\textbf{9)}}$ $A+B=B+A$

- Linearna transformacija $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=(ax+3y+z,-3x+ay)$ je injektivna akko $a\in\emptyset$

- Za koje vrednosti parametara $a,b\in\mathbb{R}$ su navedene funkcije linearne transformacije, i za one koje jesu, naći odgovarajuću matricu i diskutovati njen rang:

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ \ f(x,y,z)=(y3^{ax+b}-bz, y\sin(a-b))$: $a=0$; $\begin{bmatrix}0&3^b&-b\\0&\sin(-b)&0\end{bmatrix}$; $\text{rang}=\begin{cases}1, & b=k\pi\\2, & b\ne k\pi\end{cases}$

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ \ f(x,y,z)=(z-bxy,1+a^{x+a})$: *nikada*

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ \ f(x,y)=((a-bx)y,x+ab)$: $b=0$; $\begin{bmatrix}0&a\\1&0\end{bmatrix}$; $\text{rang}=\begin{cases}1, & a=0\\2, & a\ne 0\end{cases}$

- Ako je $f:V\to W$ izomorfizam prostora V u prostor W, tada: $\boxed{\textbf{1)}}$ $f(x)=0\ \Leftarrow\ x=0$
$\boxed{\textbf{2)}}$ V i W su uvek vektorski prostori nad istim poljem $\boxed{\textbf{3)}}$ $\dim(V)\le\dim(W)$ $\boxed{\textbf{4)}}$ $f(x)=0\ \Rightarrow\ x=0$
$\boxed{\textbf{5)}}$ $\dim(V)\ge\dim(W)$ $\boxed{\textbf{6)}}$ ako je $(a_1,\dots,a_n)$ nezavisna, tada je i $(f(a_1),\dots,f(a_n))$ nezavisna n-torka vektora

- Ako je $f : V \to W$ linearna transformacija, tada: **1)** f bijekcija **2)** V i W su izomorfni $\boxed{\textbf{3)}}$ $f(V)$ je potprostor od W **4)** $\dim(V) \leq \dim(W)$ **5)** $\dim(V) \geq \dim(W)$ $\boxed{\textbf{6)}}$ ako je $(a_1, \ldots, a_n)$ zavisna, tada je i $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ zavisna n-torka vektora

- Koje od tvrđenja je tačno ako je kvadratna matrica B dobijena od matrice A elementarnim transformacijama. **1)** $\det(A) = \det(B)$ **2)** $\det(A) \neq 0 \ \wedge \ \det(B) \neq 0$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $rang(A) = rang(B)$ **4)** $A \cdot B = I$ **5)** $A = \alpha B$ za neki skalar α **6)** matrice A i B imaju iste karakteristične korene $\boxed{\textbf{7)}}$ $\exists A^{-1} \ \Leftrightarrow \ \exists B^{-1}$