

UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
NOVI SAD
Odsek/smer/usmerenje: Matematika u tehnici

DIPLOMSKI - MASTER RAD

Kandidat: mr Tibor Lukić
Broj indeksa: 10

Tema rada: O NEKIM VARIJACIONIM PROBLEMIMA U SEGMENTACIJI
DIGITALNIH SLIKA

Mentori rada: dr Nataša Sladoje Matić
dr Joakim Lindblad, Švedska

Novi Sad, 2008.

Sadržaj

1	Uvod	2
2	Varijacioni račun	4
3	Aktivna kontura	9
4	Klasični model aktivne konture	10
4.1	Opis modela	10
4.2	Minimizacija funkcionele energije	12
5	Balon model	15
6	GVF model	16
7	Nivo-skup postupak	18
8	Geodezijski model aktivne konture	24
9	Mumford-Shah funkcionala	27
10	Chan-Vese model	29
11	Zaključak	33

Oznake

- n - prirodan broj;
- \mathbb{Z} - skup celih brojeva;
- \mathbb{R} - skup realnih brojeva;
- $|\cdot|$ - apsolutna vrednost broja;
- \mathbb{R}^n - skup uređenih n -torki realnih brojeva;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - unutrašnji proizvod dva vektora,
 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 \dots + x_n y_n$, za $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$;
- $\|\cdot\|$ - euklidska norma vektora,
 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$, za $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Za funkciju više realnih promenljivih $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$:

- f_x - parcijalni izvod funkcije po x -u, $\frac{\partial f}{\partial x}$;
- ∇ - operator gradijenta,
$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T$$
 ;
- div - operator divergencije,
$$\operatorname{div}(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
.

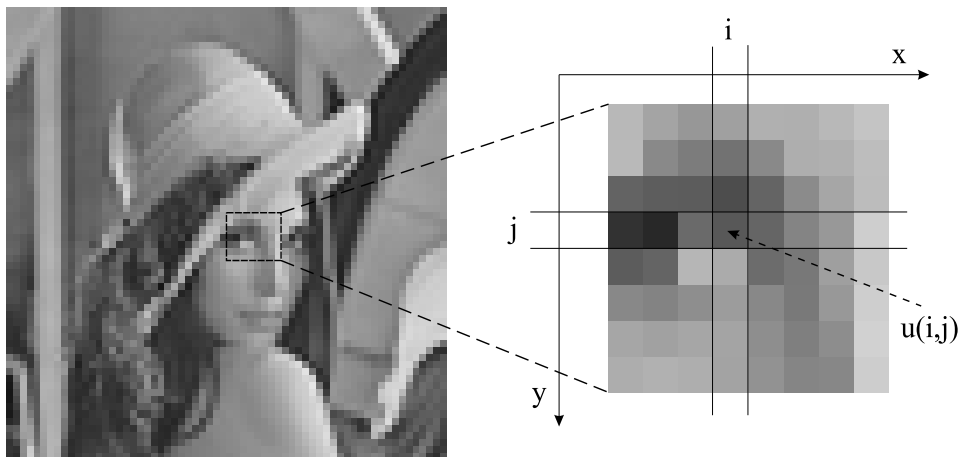
1 Uvod

Neka je \mathbb{Z}^2 skup tačaka sa celobrojnim koordinatama i neka je Ω njegov konačan podskup. *Dvodimenzionalna digitalna slika* je par (Ω, \mathbf{u}) , gde je \mathbf{u} *funkcija slike* za koju važi

$$\mathbf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Domen preslikavanja Ω je istovremeno i *domen slike*. Za vrednost preslikavanja $\mathbf{u}(x, y)$ u tački $(x, y) \in \Omega$ kažemo da je *intenzitet* ili *sivi nivo* slike u toj tački. Svakom elementu skupa Ω odgovara jedan *piksel* na digitalnoj slici (videti sliku 1). Piksel je osnovni element slike i asocira na kombinaciju engleskih reči „PICTure ELEment”.

Broj mogućih sivih nivoa piksela može da varira. Njihov broj je najčešće određen brojem bitova korišćenih za njihovo čuvanje. Uobičajeno se koristi 8 bitova po pikselu, što odgovara 256 različitih nijansi sive boje po jednom pikselu. Naravno, moguća su i druga rešenja sa više ili manje bitova po pikselu. Izdvajamo *binarnu* ili *crisp* sliku koja koristi samo jedan bit po pikselu. To znači da svaki piksel može da ima jedan od moguća dva intenziteta, nula ili jedan (tj. crnu ili belu boju). Broj sivih nivoa slike je takođe poznat i pod nazivom *rezolucija sivih nivoa*.



Slika 1: Levo: Poznati primer digitalne slike, *Lena*. Desno: Digitalna slika je određena funkcijom slike \mathbf{u} . Piksel na poziciji (i, j) ima intenzitet $\mathbf{u}(i, j)$.

Veličina digitalne slike ili njena *prostorna rezolucija* je takođe važna kara-

teristika slike. Rezolucija je „format domena slike”, tj. broj kolona (širina) i vrsta (visina) slike. Na primer, tipični neprofesionalni digitalni fotoaparati daju slike veličine 2608 puta 1952 piksela. Naravno, ovi brojevi mogu da variraju u zavisnosti od aparata. Jasno je da za što bolje predstavljanje fizičkog sveta potrebno je imati što je moguće veću i veličinu i broj sivih nivoa slike.

Oblast *digitalne obrade slike* bavi se crpljenjem i obradom informacija sačuvanih u digitalnoj slici. *Segmentacija* je jedna od najznačajnijih faza digitalne obrade slike. Ona se bavi podelom (particijom) slike na više delova u zavisnosti od ciljeva segmentacije. Tipični zadatak segmentacije je da locira određene objekte na datoj slici. Algoritmi za segmentaciju mogu se podeliti u dve velike grupe u zavisnosti od toga da li su zasnovani na sličnostima ili diskontinuitetima sivih nivoa slike. Kod prve grupe slika se deli na povezane oblasti (regione) tako da svaka oblast sadrži tačke sa približno istim intenzitetom. Druga grupa algoritama je bazirana na određivanju tačaka sa naglim promenama intenziteta, tj. na određivanju oštih granica (ivica) slike. Iz ovoga sledi da su za uspešnu primenu algoritama segmentacije potrebna odgovarajuća predznanja o konfiguraciji slike, npr. da li objekti segmentacije imaju oštre granice ili ne. Jasno je da takve informacije u opštem slučaju nisu na raspolaganju, zbog čega je segmentacija slike u opštem slučaju veoma složen i još uvek otvoren problem.

U poslednjih dvadeset godina razvijeni su široko prihvaćeni postupci za segmentaciju bazirani na varijacionim problemima. Aktivni konturni modeli spadaju u najpoznatije metode ove vrste. Aktivna kontura je kriva koja se kreće od date početne pozicije ka ciljnoj poziciji sa ciljem da „zaokruži” objekat segmentacije. Prikazaćemo i diskutovaćemo najpoznatije vrste aktivnih konturnih modela koji su našli značajno mesto u segmentaciji slike i u digitalnoj obradi slike uopšte (videti [24, 23, 27, 28, 16]).

Ovaj master rad je organizovan na sledeći način: Posle kraćeg uvoda u varijacioni račun prikazaćemo najvažnije karakteristike pet najznačajnijih aktivnih konturnih modela, a to su: Klasičan aktivni konturni model, Balon model, GVF (Gradient Vector Flow) model, Chan-Vese model i Geodezijski model. Takođe, posmatraćemo i Mumford-Shah funkcionele i nivo-skup postupak. Pomoću Mumford-Shah funkcionele je definisan postupak za segmentaciju slike sa nejasnim granicama (bez ivica) između različitih oblasti. Chan-Vese model koristi specijalan slučaj Mumford-Shah funkcionele. Nivo-skup postupak uvodi alternativni način reprezentacije i kretanja krive, što omogućava topološke promene krive. On se primenjuje kod Geodezijskog i Chan-Vese

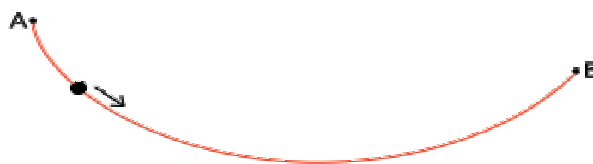
modela. Zaključak rada sadrži evaluaciju izloženih aktivnih konturnih modela na osnovu njihovih glavnih karakteristika. Naša analiza pokazuje da Chan-Vese model ispunjava najveći broj postavljenih kriterijuma. Međutim, teško je dati prednost bilo kom modelu, jer slično kao u segmentaciji uopšte, njihova efikasnost dobrim delom zavisi od odgovarajućih predznanja o konfiguraciji slike.

2 Varijacioni račun

U ovoj sekciji daćemo kratak uvod u varijacioni račun. Počecemo sa istorijskim činjenicama vezano za razvoj ovog računa.

Heron iz Aleksandrije (10 n.e. - 70 n.e.) je prvi u istoriji formulisao naučni princip minimuma. On je formulisao *Princip najkraće putanje svetlosti*. Ovaj princip tvrdi da je odbijeni zrak između dve tačke najkraći ako je upadni ugao jednak odbijenom uglu. Heronov princip je prethodio klasičnim principima ekstrema u mehanici koji su bazirani na varijacionom računu. U ove principe spada *Fermat-ov princip* [3] u optičkoj geometriji (1662) kao i *Princip najmanje akcije* [2] (oko 1744) u mehanici.

Za vreme Isaac Newton-a (1643 - 1727) optimizacioni problem pod imenom *brahistohrona* je bio dobro poznat u naučnim krugovima. Problem brahistohrone se može formulisati na sledeći način: Neka su A i B dve tačke u vertikalnoj ravni u odnosu na zemljinu površinu. Brahistohrona je kriva koju opisuje telo na koje deluje samo gravitaciona sila krećući od tačke A do tačke B za najkraće moguće vreme (vidi sliku 2). Problem se sastoji u određivanju krive-brahistohrone. Na grčkom jeziku „brachisto” znači najkraći a „chronos”



Slika 2: Kriva brahistohrona. Izvor Wikipedia.

vreme. Problem brahistohrone je prvi put formulisao Johann Bernoulli u naučnom časopisu *Acta Eruditorum* (1696). Sa rešenjima ovog problema javilo se pet matematičara: Isaac Newton, Jakob Bernoulli, Guillaume de l'Hopital,

Gottfried Leibniz i Ehrenfried Walther von Tschirnhaus. Rešenje je danas dobro poznata kriva cikloida [4]. Kasnije, Johann Bernoulli je formulisao težu verziju ovog problema i rešio ga je sam uvodeći novi pristup u rešavanju. Taj pristup je kasnije dalje analiziran i razmatran od strane Leonarda Eulera. Euler je redefinisao i sistematizovao nova saznanja i objavio ih u svom radu „Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietate Gaudentes” [1] (1744). U ovom radu je uveden opšti matematički postupak za sistematsko istraživanje ekstremum problema mehanike. Problem brahistohrone spada u specijalan slučaj izloženog opšteg postupka. Posle diskusije sa Joseph-Louis de Lagrange-om, Euler je ovaj metod nazvao varijacionim računom (1755). Taj momenat se smatra nastankom varijacionog računa.

U nastavku ćemo dati uvod u osnove varijacionog računa. *Funkcionela* u vektorskom prostoru nad poljem realnih brojeva je funkcija koja preslikava elemente vektorskog prostora na skup realnih brojeva. U nastavku, pretpostavićemo da su elementi vektorskog prostora realne funkcije realnih promenljivih. Manje precizno, pod funkcionalom prodrzumevaćemo „funkciju funkcije”. Na primer, funkcionela \mathcal{F} , definisana sa

$$\mathcal{F}[f] = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx, \quad (1)$$

preslikava funkciju f u dužinu luka njene krive od tačke $P(a, f(a))$ do tačke $Q(b, f(b))$.

Predmet varijacionog računa je određivanje ekstremnih vrednosti funkcionela, tj. funkcija za koje data funkcionela dostiže maksimalnu ili minimalnu vrednost. Dakle, opšti *varijacioni problem* se može definisati kao optimizacioni problem

$$\underset{f}{\text{optimize}} \Psi[f],$$

gde je Ψ data funkcionela a f je argument-funkcija.

Sledeća lema ima fundamentalnu ulogu u teoriji varijacionog računa.

Lemma 1 [9] *Neka je funkcija M neprekidna na intervalu (a, b) . Ako je*

$$\int_a^b M(x)\psi(x) dx = 0$$

za sve funkcije ψ sa neprekidnim parcijalnim izvodima drugog reda, tada je $M(x) = 0$ za sve $x \in (a, b)$.

Posmatrajmo sledeću opštu klasu funkcionela, datu sa

$$I[f] = \int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx, \quad (2)$$

gde je podintegralna funkcija F funkcija od tri nezavisne promenljive x , f i f' . U nastavku ćemo odrediti uslov koji mora da zadovolji funkcija ekstrema, tj. funkcija za koju funkcionela I dostiže svoju maksimalnu ili minimalnu vrednost. Pretpostavimo da je funkcija f (lokalna) ekstremna funkcija od I . *Varijacija* od f je data sa

$$f(x) + \varepsilon h(x),$$

gde je ε je mali realan broj a h je proizvoljna diferencijabilna funkcija za koju važi $h(a) = h(b) = 0$, (videti sliku 3). Očigledno je da je za svako malo $\varepsilon > 0$ zadovoljena tačno jedna od nejednakosti

$$I[f(x) + \varepsilon h(x)] > I[f] \quad \text{ili} \quad I[f(x) + \varepsilon h(x)] < I[f]$$

u zavisnosti od toga da li I u f dostiže minimum ili maksimum, respektivno. To znači da funkcija $I[f + \varepsilon h]$ dostiže svoj ekstremum za $\varepsilon = 0$. Iz ovoga sledi da izvod funkcije $I[f + \varepsilon h]$ po ε mora biti jednak nuli u tački $\varepsilon = 0$. Za ovaj izvod kažemo da je *prva varijacija* funkcionele I i obeležavamo ga sa δI , tj.

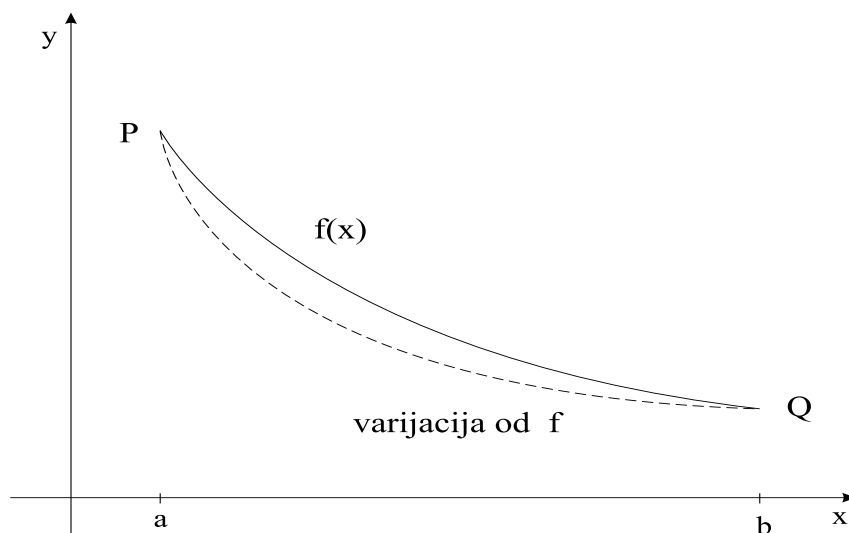
$$\delta I = \left. \frac{d}{d\varepsilon} I[f + \varepsilon h] \right|_{\varepsilon=0}.$$

Dakle, funkcija ekstrema mora da zadovoljava jednačinu

$$\delta I = 0.$$

Koristeći definiciju (2) funkcionele I , imamo sledeći račun

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_a^b \left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f_\varepsilon} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial f'_\varepsilon} \frac{\partial f'_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f} h + \frac{\partial F}{\partial f'} h' \right) dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial f} h dx + \frac{\partial F}{\partial f'} h(x) \Big|_a^b - \int_a^b h \cdot \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right) h(x) dx, \end{aligned} \quad (3)$$



Slika 3: Varijacija od f .

gde je $f_\varepsilon = f + \varepsilon h$. U drugom redu računa (3) je primenjena parcijalna integracija i pretpostavka o funkciji h prema kojoj je $h(a) = h(b) = 0$. Sada, funkcija ekstrema f zadovoljava sledeću jednačinu

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right) h(x) dx = 0. \quad (4)$$

Pošto smo funkciju h birali proizvoljno, možemo da primenimo Lemu 1 na jednačinu (4), odakle mora da važi

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} = 0. \quad (5)$$

Diferencijalna jednačina (5) je poznata kao *Euler-Lagrange-ova* jednačina. Primetimo da ona definiše potreban, ali ne i dovoljan uslov koji treba da zadovolji ekstrem funkcionele (2). Dovoljan uslov može da se definiše pomoću *druge varijacije*, $\delta^2 I$, ali to izlazi iz okvira ovog rada. Više detalja o ovome može da se nađe u radovima [8, 9].

Sada možemo da odredimo ekstrem funkcionele \mathcal{F} (1). Rešavajući Euler-Lagrange-ovu jednačinu, imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) = 0 &\iff -\frac{d}{dx} \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \right) = 0 \\ \iff \frac{f''(x)}{(1+f'(x))^{\frac{3}{2}}} = 0 &\iff f''(x) = 0 \iff f(x) = c_2x + c_1, \end{aligned}$$

gde su c_1 i c_2 konstante. Dakle, rešenje je prava koja je, razume se, najkraća moguća putanja između tačaka P i Q .

U nastavku posmatrajmo klasu funkcionela sledećeg oblika

$$A[f] = \int_a^b L(f(x), f'(x), f''(x)) dx, \quad (6)$$

gde je f najmanje dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija na (a, b) a L funkcija od tri nezavisne promenljive f , f' i f'' . Odredićemo odgovarajuću Euler-Lagrange-ovu jednačinu za funkcionelu (6). Razlog zašto posmatramo ovakavu funkcionelu biće jasan u sekciji 4. Procedura je slična kao u slučaju funkcionele (2). Pretpostavimo da je funkcija f ekstrem funkcionele (6). Neka je f_1 proizvoljno birana, najmanje dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija na (a, b) takva da je $f_1(a) = f_1'(a) = 0$ i $f_1(b) = f_1'(b) = 0$. Prvi izvod od $A[f + \varepsilon f_1]$ u odnosu na ε mora biti jednak nuli u tački $\varepsilon = 0$. Drugim rečima, prva varijacija od A je jednaka nuli, tj. $\delta A = 0$. Za δA možemo da izvedemo sledeći račun

$$\begin{aligned} \delta A &= \frac{d}{d\varepsilon} A[f + \varepsilon f_1] \Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \frac{dL}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} dx = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f} f_1 + \frac{\partial L}{\partial f'} f_1' + \frac{\partial L}{\partial f''} f_1'' \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial L}{\partial f''} \right) f_1 dx \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial f} f_1(x) \Big|_a^b - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f''} f_1(x) \Big|_a^b + \frac{\partial L}{\partial f'} f_1'(x) \Big|_a^b, \end{aligned} \quad (7)$$

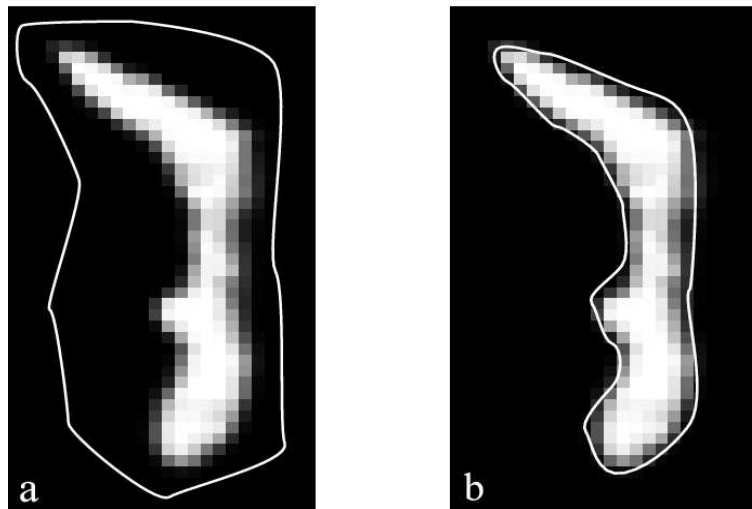
gde je drugi i treći red dobijen primenom odgovarajuće parcijalne integracije. Zbog načina izbora funkcije f_1 , poslednja tri člana u (7) se anuliraju. Dakle, ekstremna funkcija zadovoljava sledeću jednačinu

$$\delta A = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial L}{\partial f''} \right) f_1(x) dx = 0.$$

Na osnovu Leme 1 i gornje jednačine sledi da ekstrem f funkcionele A mora

zadovoljavati sledeću, Euler-Lagrange-ovu jednačinu,

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial L}{\partial f''} = 0. \quad (8)$$



Slika 4: Aktivna kontura primenjena na detekciju granice objekta (objekat je oblast koštanog tkiva fazi segmentovane slike implantata kostiju). (a) Početni položaj konture. (b) Posle minimizacije energije kontura je poprimila oblik granice objekta.

3 Aktivna kontura

Aktivna kontura je kriva definisana na domenu slike i ima osobinu da menja svoj oblik, veličinu i topologiju krećući se od svoje početne pozicije ka ciljnoj poziciji. Ovo kretanje se često označava i kao *evolucija* konture (krive). Zahvaljujući dinamičkom ponašanju, aktivna kontura se takođe označava i kao *snake*, engl. zmija. Evolucija krive je kontrolisana odgovarajućom *funkcionelom energije*. Funkcionela energije ima minimalnu vrednost u momentu kada je kriva na ciljnoj poziciji. Definicija funkcionele zavisi od ciljeva postupka kao i od konfiguracije slike. Uobičajeno, aktivne konture primenjuju se u

segmentaciji za detekciju ivica i za detekciju granice objekata. Slika 4 ilustruje osnovnu ideju funkcionisanja aktivne konture.

Postoji nekoliko različitih modela aktivnih kontura. Oni se međusobno razlikuju po dva najvažnija kriterijuma: (1) načinu definisanja energetske funkcionele i (2) načinu reprezentacije krive, koja može biti parametarska ili bazirana na nivo-skupovima. Uloga funkcionele energije je da kontroliše pravac kretanja i oblik krive. Parametarska reprezentacija ne dozvoljava topološke promene krive, dok reprezentacija na bazi nivo-skupova rešava ovaj nedostatak, međutim ujedno povećava i složenost postupka jer posmatra problem u višoj dimenziji. Naime, umesto evolucije konture u ravni, zahteva kontrolu nad evolucijom odgovarajuće površi u prostoru (za više detalja videti sekciju 7). U ovom radu su analizirani najznačajniji modeli aktivnih kontura.

4 Klasični model aktivne konture

Klasični model aktivne konture je prvi put definisan u radu Kass-a, Witkin-a i Terzopoulos-a [6] 1987. godine. Glavna namena modela je da detektuje granice povezanog, prevashodno konveksnog objekta. Funkcionela energije zavisi od oblika, dužine kao i od položaja krive u odnosu na granicu objekta. Reprezentacija krive je parametarskog tipa.

4.1 Opis modela

Koristićemo sledeće pretpostavke. Zbog matematičke analize modela, funkciju slike ćemo posmatrati/modelirati kao dovoljno puta neprekidno diferencijabilnu funkciju

$$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

gde je Ω novi, prošireni domen slike. Pretpostavićemo da je $\mathbf{c} \subset \Omega$ zatvorena parametarska kriva, data sa

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(s) &= [x(s), y(s)]^T, \quad s \in [a, b] \\ \mathbf{c}(a) &= \mathbf{c}(b). \end{aligned}$$

Funkcionela energije je definisana sa

$$E[\mathbf{c}] = \int_a^b \{E_{int}(\mathbf{c}(s)) + E_{ext}(\mathbf{c}(s))\} ds, \quad (9)$$

gde je E_{int} unutrašnja energija konture koja kontroliše njen oblik i dužinu, dok je E_{ext} spoljašnja energija koja ima ulogu da „vuče” konturu ka željenoj poziciji.

Unutrašnja energija je definisana na sledeći način

$$E_{int}(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \left(\alpha(s) \left\| \frac{d\mathbf{c}}{ds} \right\|^2 + \beta(s) \left\| \frac{d^2\mathbf{c}}{ds^2} \right\|^2 \right), \quad (10)$$

gde je $\frac{d\mathbf{c}}{ds} = \left[\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right]^T$ i $\left\| \frac{d\mathbf{c}}{ds} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2}$, sa analognom notacijom za $\frac{d^2\mathbf{c}}{ds^2}$. Težinski parametri $\alpha(s)$ i $\beta(s)$ regulišu značaj prvog i drugog člana u

(10), respektivno. Tokom minimizacije funkcionele E , prvi član, $\left\| \frac{d\mathbf{c}}{ds} \right\|$ nastoji da smanji dužinu luka konture. Iz ovoga sledi da velika vrednost parametra $\alpha(s)$ rezultuje jakim kontrakcijama (sakupljanjima) konture prilikom njene evolucije. Nasuprot tome, mala vrednost $\alpha(s)$ dovodi do spore kontrakcije. Uloga drugog člana, $\left\| \frac{d^2\mathbf{c}}{ds^2} \right\|^2$ u procesu minimizacije je da smanji krivinu konture (definiciju krivine krive videti u [32]). Sledi da mala vrednost parametra $\beta(s)$ dozvoljava konturu sa ostrim uglovima, dok njegova velika vrednost čini konturu krutom, nesavitljivom.

Postoje različite mogućnosti za izbor spoljašnje energije. U nastavku navešćemo tri najpoznatija oblika. Tipična forma spoljašnje energije je data sa

$$E_{ext}^1(x, y) = -\|\nabla u(x, y)\|^2.$$

Ova funkcija ima minimalnu vrednost na lokacijama slike sa velikim vrednostima gradijenta. Ovo su zapravo tačke ivica objekata ili su neka druga mesta sa velikom promenom intenziteta tačaka.

Funkcija $\|\nabla u(x, y)\|$ pridružuje (jako) velike vrednosti ivičnim tačkama. Ova osobina može da predstavlja prepreku za operativnu primenu, jer vrednost $\|\nabla u(x, y)\|$ može da prevazilazi operativni opseg računara. Ovu anomaliju možemo da izbegnemo ako koristimo funkciju $g : [0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$ koja zadovoljava sledeće uslove

- (i) g je diferencijabilna i opadajuća,
- (ii) $g(0) = 1$ i $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = 0$.

Funkcija definisana sa $g(\|\nabla u\|)$ ima minimalne vrednosti, koje su blizu nule

na lokacijama sa velikim gradijentima. Ona je poznata *funkcija za detekciju ivica*. Za definiciju funkcije g ima više izbora, najčešći je $g(s) = 1/(1 + s^2)$. Sada, primenom g dolazimo do sledeće funkcije spoljašnje energije konture

$$E_{ext}^2 = g(\|\nabla u(x, y)\|).$$

U slučaju binarne slike sa crtežom (linije ili izolovane tačke na homogenoj pozadini), spoljašnja energija oblika

$$E_{ext}^3(x, y) = -u(x, y),$$

je najjednostavnija za primenu. Ako pretpostavimo da tačke sa intenzitetom 0 pripadaju pozadini a sa 1 crtežu, onda E_{ext}^3 ima minimalnu vrednost (-1) samo u tačkama koja pripadaju crtežu.

Bitna, zajednička osobina svih spoljašnjih energija za klasičan model je da su one bazirane na diskontinuitetima inteziteta tačaka.

4.2 Minimizacija funkcionele energije

Kao što smo videli, potrebno je minimizirati sledeću funkcionelu

$$\begin{aligned} E[\mathbf{c}] &= \int_a^b \left\{ \frac{1}{2} \left(\alpha \left\| \frac{d\mathbf{c}}{ds} \right\|^2 + \beta \left\| \frac{d^2\mathbf{c}}{ds^2} \right\|^2 \right) + E_{ext}(\mathbf{c}) \right\} ds \\ &= \int_a^b L(\mathbf{c}, \mathbf{c}', \mathbf{c}'') ds. \end{aligned} \quad (11)$$

Radi jednostavnosti, pretpostavićemo da su α i β konstante. Kriva \mathbf{c} koja minimizuje energiju E mora da zadovoljava odgovarajuću Euler-Lagrange-ovu jednačinu. Na osnovu jednačine (8) imamo

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{c}} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{c}'} + \frac{d^2}{ds^2} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{c}''} = 0,$$

odnosno

$$\alpha \mathbf{c}'' - \beta \mathbf{c}^{IV} - \nabla E_{ext} = 0. \quad (12)$$

Zapravo, gornja formula je sistem od dve diferencijalne jednačine četvrtog reda,

$$\begin{aligned} \alpha x''(s) - \beta x^{IV}(s) - \frac{\partial E_{ext}}{\partial x} &= 0, \\ \alpha y''(s) - \beta y^{IV}(s) - \frac{\partial E_{ext}}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

koji ne može biti rešen analitičkim putem. Potrebno je naći približno, numeričko rešenje. Uvođenjem veštačkog parametra za vreme, krivu \mathbf{c} ćemo posmatrati kao dinamičku funkciju. Tretiraćemo je kao funkciju od dve promenljive, s i t . Svako t definiše jednu krivu, $\mathbf{c}(s, t)$ za $s \in [a, b]$. Parcijalni izvod od \mathbf{c} u odnosu na t je izjednačen sa levom stranom jednačine (12),

$$\frac{\partial \mathbf{c}(s, t)}{\partial t} = \alpha \mathbf{c}''(s, t) - \beta \mathbf{c}^{IV}(s, t) - \nabla E_{ext}(\mathbf{c}(s, t)), \quad (13)$$

gde je $\mathbf{c}(s, 0)$ data početna kontura. Za formulu (13) kažemo da je *evolucionarna jednačina* krive \mathbf{c} i rešavamo je numeričkim putem. Diskretizovaćemo je koristeći diskretnu mrežu promenljivih i diferencne količnike [20]. Diskretnu mrežu nezavisnih promenljivih s i t definišemo kao

$$\begin{aligned} s_i &= s_0 + i\Delta s, & i &= 0, \dots, N_s, \\ t_j &= t_0 + j\Delta t, & j &= 0, \dots, N_t, \end{aligned}$$

gde su N_s i N_t prirodni brojevi. Diferencni količnici korišćeni za aproksimaciju izvoda u tački (s_i, t_j) su sledeći

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} &\approx \frac{\mathbf{c}_{i,j+1} - \mathbf{c}_{i,j}}{\Delta t}, & \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial s^2} &\approx \frac{\mathbf{c}_{i+1,j} - 2\mathbf{c}_{i,j} + \mathbf{c}_{i-1,j}}{2(\Delta s)^2} \quad \text{i} \\ \frac{\partial^4 \mathbf{c}}{\partial s^4} &\approx \frac{\mathbf{c}_{i-2,j} - 4\mathbf{c}_{i-1,j} + 6\mathbf{c}_{i,j} - 4\mathbf{c}_{i+1,j} + \mathbf{c}_{i+2,j}}{2(\Delta s)^4}, \end{aligned}$$

gde je vrednost $\mathbf{c}_{i,j} = \mathbf{c}(s_i, t_j)$ definisana na diskretnoj mreži. Primenjujući ove aproksimacije na evolucionu jednačinu (13) dobijamo diskretnu formu iste:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{i,j+1} &= \mathbf{c}_{i,j} + \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta s)^2} (\mathbf{c}_{i+1,j} - 2\mathbf{c}_{i,j} + \mathbf{c}_{i-1,j}) \\ &\quad - \frac{\beta \Delta t}{2(\Delta s)^4} (\mathbf{c}_{i+2,j} - 4\mathbf{c}_{i+1,j} + 6\mathbf{c}_{i,j} - 4\mathbf{c}_{i-1,j} + \mathbf{c}_{i-2,j}) \\ &\quad - \nabla E_{ext}(i, j), \end{aligned} \quad (14)$$

gde je $\nabla E_{ext}(i, j) = \nabla E_{ext}(\mathbf{c}_{i,j})$. Diskretna evolucionarna jednačina (14) se može zapisati u matricnom obliku kao

$$C_{j+1} = W \cdot C_j - E_j \quad (15)$$

gde je

$$C_j = [\mathbf{c}_{1,j}, \mathbf{c}_{2,j}, \dots, \mathbf{c}_{N_s,j}]^T,$$

$$E_j = [\nabla E_{ext}(1, j), \nabla E_{ext}(2, j), \dots, \nabla E_{ext}(N_s, j)]^T,$$

$$W = \begin{bmatrix} K & M & G & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ M & K & M & G & 0 & 0 & \dots & 0 \\ G & M & K & M & G & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G & M & K & M & G & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G & M & K \end{bmatrix},$$

sa elementima

$$K = 1 - \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta s)^2} - 3\frac{\beta\Delta t}{(\Delta s)^4},$$

$$M = \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta s)^2} + 2\frac{\beta\Delta t}{(\Delta s)^4},$$

$$G = -\frac{\beta\Delta t}{2(\Delta s)^4}.$$

Jednačina (15) definiše iterativno pravilo. Startujući od date početne konture C_0 , koristeći (15), računamo elemente iterativnog niza diskretnih kontura $\{C_j\}$. Postupak se prekida kada je parcijalni izvod po vremenu jednak nuli ili je blizu nule, tj.

$$\frac{\mathbf{c}_{i,j+1} - \mathbf{c}_{i,j}}{\Delta t} \approx 0. \quad (16)$$

Tada je dinamički sistem (13) u ravnotežnom stanju. U slučaju da kriterijum (16) nije moguće postići, kao alternativni izlazni kriterijum može da se koristi i uslov

$$\|C_{j+1} - C_j\| < \delta_r,$$

gde je $\delta_r > 0$ unapred zadata tolerancija. Primetimo da je matrica W simetrična, petdijagonalna i retka. Iz toga sledi da iterativna jednačina (15) pogodna za primenu numeričkih postupaka. Metoda sukcesivne relaksacije [29] je jedna od najpogodnijih za ovu namenu. Diskretizacija evolucione jednačine nije jedinstvena, postoje i druge diskretizacione šeme, koje se najviše razlikuju po izboru diferencnih količnika. Druge diskretizacione šeme i numerički postupci za rešavanje evolucione jednačine mogu se naći u radovima [6, 21].

Osvrnimo se na poznate nedostatke i probleme klasičnog modela. Nedovoljno informacija o izboru početne konture je prva poteškoća sa kojom možemo da se suočimo prilikom primene modela. Naime, kontura koja nije dovoljno blizu rešenju (ciljnom položaju, najčešće ivici objekta) ne može biti „privučena” prema njemu. Ovo je posledica relativno „kratkog dometa” spoljašnje energije, E_{ext} koja deluje u okolini tačaka sa velikim gradijentima (dodatna objašnjenja čitalac može naći u sekciji 6). Takođe, problemi u evoluciji konture se mogu pojaviti i kada se ona nalazi u oblasti sa konstantnim intenzitetom tačaka. Tada je spoljašnja energija nula i kriva se skuplja u tačku ili se pretvara u pravu liniju pod isključivim uticajem unutrašnje energije. Do nestabilnosti može da dovede i neadekvatan izbor vremenskog koraka, čak i u slučaju da je početna kontura smeštena dovoljno blizu rešenja. Naime, prevelika vrednost Δt može dovesti do prevelikih deformacija između iteracija i da kontura prođe kroz traženi minimum, i da se nikad ne vrati. S druge strane, premala vrednost od Δt može da dovede do situacije da samo jako velike vrednosti od $-\nabla E_{ext}$ mogu pomeriti konturu napred. Optimalanu vrednost vremenskog koraka nije moguće odrediti, u primenama sa oslanja na eksperimentalne rezultate. Vrednost energije E zavisi od načina parametrizacije krive, što znači da možemo dobiti različita rešenja birajući istu početnu krivu ali parametrizujući je na različit način.

Kao što smo videli, spoljašnja enregija je zasnovana na detekciji diskontinuiteta funkcije slike. Posledica toga je da klasičan model ne daje dobre rezultate u segmenatciji na bazi sličnosti u intenzitetu tačaka. Takođe, značajno ograničenje u primeni je i nemogućnost topoloških promena konture. To je posledica parametarskog načina predstavljanja konture.

Drugi modeli aktivnih kontura su uglavnom nastali iz težnje da se prevaziđu ili koriguju gore nabrojani nedostaci klasičnog modela. U nastavku, bavićemo se ovim modelima.

5 Balon model

Balon model je uveden u radu Cohen-a [22], 1989. godine. Razvoju ovog modela je najviše doprineo problem izbora početne konture kod klasičnog modela. Osnovna motivacija je prevashodno, to što ako je kriva smeštena unutar objekta sa homogenim intenzitetom, kriva se skuplja i nestaje (kolabira) iako objekat ima jasnu granicu. Ovo je svakako nepoželjna osobina.

Neka važe pretpostavke klasičnog modela, s tim što ovde parametrizovana kriva \mathbf{c} nije obavezno zatvorena. Evolucionu jednačinu (13) posmatra kao zbir dve sile, unutrašnje i spoljašnje. Preciznije,

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = \alpha \mathbf{c}'' - \beta \mathbf{c}^{IV} - \nabla E_{ext}(\mathbf{c}) = F_{int} + F_{ext},$$

gde su F_{int} i F_{ext} unutrašnja i spoljašnja sila. Kolabiranje konture u homogenom području je posledica slabog ili potpunog izostanka delovanja spoljašnje sile na konturu. Iz ovih razloga balon model koristi modifikovanu spoljašnju silu, datu sa

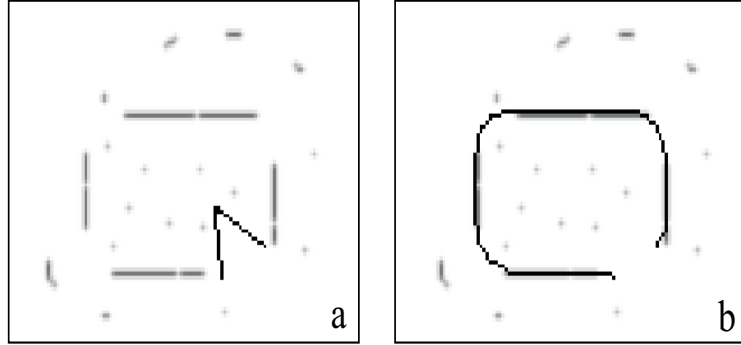
$$F_{ext}^B = k_B \vec{n}(s) - k \frac{\nabla E_{ext}}{\|\nabla E_{ext}\|}, \quad (17)$$

gde je $\vec{n}(s)$ jedinični vektor normale na krivu a k_B i k su parametri. Zadatak dodatne sile $k_B \vec{n}(s)$ je da „gura” krivu kroz oblasti sa konstantnim intenzitetom, kao i kroz slabe (kvazi) ivice na slici. Ova sila omogućava krivoj da se ponaša nalik balonu za naduvavanje, na šta asocira i sam naziv modela. Znak parametra k_1 određuje smer delovanja sile \vec{n} , tj. da li se radi o efektu „naduvavanja” ili „izduvavanja”. Parametar k kontroliše normalizovanu spoljašnju silu slike. Njegov izbor je takav da je vrednost $\Delta t \cdot k$ u funkciji veličine piksela. Time je postignuto da za jednu iteraciju kriva može da se pomeri najviše za veličinu jednog piksela. Na taj način izbegnut je problem izbora vremenskog koraka koji se javlja kod klasičnog modela. Dakle, ovaj model omogućava i slobodu izbora vremenske diskretizacije. Slika 5 prikazuje osnovnu ideju balon modela pri detektovanju ivica nepotpunog pravougaonika na slici sa dodatim kvazi-ivicama (smetnjama).

Model se suočava sa dva ozbiljna nedostatka. Prvo, potrebno je a priori znanje o tome da li primeniti efekat „naduvavanja” ili „izduvavanja” (odrediti znak od k_B), što zahteva dodatne informacije o objektu segmentacije. Drugo, teško je odrediti intenzitet delovanja dodatne sile, tj. veličinu $|k_B|$. S jedne strane, ona mora biti dovoljno jaka da savlada kvazi ivice i homogena područja. S druge strane, ova sila treba da bude dovoljno slaba da kriva ne „pređe” kroz prave ivice ili granice objekta.

6 GVF model

GVF (Gradient Vector Flow) model je definisan i analiziran u radu Xu i Prince-a [17] 1997. godine. Motivacija za razvoj ovog modela je proistekla



Slika 5: (a) Početna kriva. (b) Zahvaljujući efektu „naduvavanja” kriva detektuje ivice pravougaonika. Slike su preuzete iz [22].

iz sledećih nedostataka klasičnog modela: (1) Slaba konvergencija konture ka ivicama i granicama konkavnog oblika [25]; (2) Problemi sa izborom početne konture, naročito ako je kontura smeštena u homogenom području ili duboko unutar objekta.

Polazimo od pretpostavki klasičnog modela. Aktivna kontura na ciljnoj poziciji mora da zadovoljava Euler-Lagrange-ovu jednačinu. Ova jednačina (12) se posmatra, slično kao kod balon modela, kao jednačina ravnoteže između dve sile

$$F_{int} + F_{ext} = 0,$$

gde je $F_{int} = \alpha \mathbf{c}'' - \beta \mathbf{c}^{IV}$ i $F_{ext} = -\nabla E_{ext}$. Unutrašnja sila, F_{int} kontroliše skupljanje i savijanje, dok spoljašnja sila, F_{ext} deluje na krivu (potiskuje je) u pravcu ciljne pozicije. Analizirajući polje spoljašnje sile, Xu i Prince su zaključili da ono ima kratak domet delovanja. Kriva koja nije u domenu polja ne može da bude pod njegovim uticajem, tj. ne može biti privučena ka ciljnoj poziciji. Štaviše, u oblastima konkavnosti spoljašnje sile deluju horizontalno i u suprotnim pravcima (videti U-oblik na Slici 6(a)), tako da se njihov uticaj anulira. Kao posledicu toga imamo situaciju u kojoj kriva ne može biti uvučena u takve oblasti. Da bi se rešili ovi problemi, GVF model definiše novu spoljašnju silu $w^*(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$, koja je dobijena minimizacijom sledeće funkcionele (energije)

$$E_{GVF}[w] = \iint_{\Omega} \left\{ \mu (a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2) + \|\nabla l\|^2 \cdot \|w - \nabla l\|^2 \right\} dx dy,$$

gde je $l(x, y) = -E_{ext}(x, y)$ funkcija za detekciju ivica, a μ je parametar regularizacije odnosa uticaja između prvog i drugog člana podintegralne funkcije. Varijaciona formulacija energije E_{GVF} obezbeđuje glatko vektorsko polje i na mestima gde je $\|\nabla l\|$ nula ili ima malu vrednost. Određivanje minimuma funkcionele E_{GVF} vrši se diskretizacijom odgovarajuće Euler-Lagrange-ove jednačine. Više detalja o ovom postupku čitalac može da nađe u radu [26].

Evolucionarna jednačina GVF modela je data sa

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = \alpha \mathbf{c}'' - \beta \mathbf{c}^{IV} + w^*, \quad (18)$$

gde je

$$w^* = \underset{w}{\operatorname{argmin}} E_{GVF}[w].$$

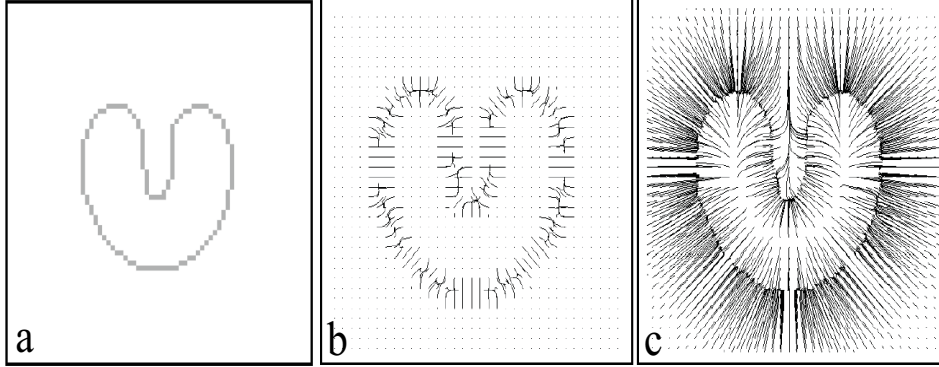
Jednačina (18) se rešava diskretizacijom i primenom odgovarajućeg iterativnog postupka, slično kao u slučaju klasičnog modela.

Promenu do koje je došlo usled primene nove sile w^* najbolje ilustruje slika 6. Na jednom primeru su prikazane strujne linije klasične i GVF spoljašnje sile. Pod *strujnom linijom* podrazumevamo putanju koju opiše slobodna čestica pod uticajem vektorskog polja (spoljašnje sile). Očigledno, domet privlačenja kod GVF modela mnogo je veći nego kod klasičnog modela. Štaviše, strujne linije GVF modela prolaze i vertikalno naniže unutar konkavne oblasti, dok klasičan model obezbeđuje samo sile bočne orijentacije. Ove činjenice omogućavaju GVF modelu veću fleksibilnost pri izboru početne krive kao i konvergenciju ka ivicama konkavnog oblika. Praktično, kriva je uvek u domenu uticaja spoljašnje sile i biva usmerena ka željenoj poziciji.

U pogledu računarske složenosti, moramo naglasiti da je GVF model složeniji za primenu i zahteva više vremena za izvršavanje nego klasičan ili balon modeli. Glavni razlog tome je dodatno izračunavanje potrebno za minimizaciju funkcionele E_{GVF} .

7 Nivo-skup postupak

U modelima koji smo do sada razmatrali aktivna kontura je posmatrana u parametarskom obliku, $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Glavni nedostatak ove reprezentacije je nemogućnost topoloških promena krive. Ovaj nedostatak je uspešno rešen uvođenjem *nivo-skup postupka* (engl. Level set method) za evoluciju krive. Ovaj postupak su definisali i analizirali Osher i Sethian 1988. godine u radu



Slika 6: Strujne linije slike (crteža) (a) u polju spoljašnje sile klasičnog modela (b) i GVF modela (c). Slike su preuzete iz [17].

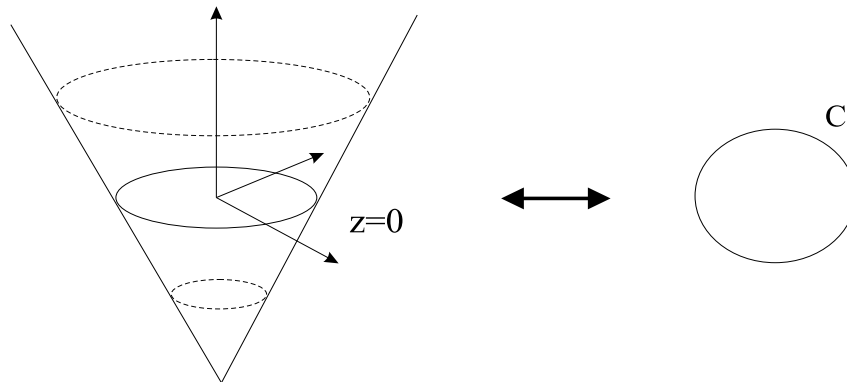
[18]. Kod ovog postupka kriva je predstavljena kao nulti nivo-skup odgovarajuće funkcije (površ) $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tj. $\mathbf{c} = \{(x, y) | \phi(x, y) = 0\}$. Otuda, primena ovog postupka kod modela aktivnih kontura se označava i kao nivo-skup reprezentacija krive, nasuprot parametarskoj. Međutim, postupak pored nivo-skup reprezentacije krive obuhvata i evoluciju funkcije ϕ .

Ideja postupka je da problem evolucije krive posmatra u prostoru više dimenzionalnosti. Naime, umesto da kontroliše kretanje same krive, nivo-skup postupak definiše površ na osnovu početne krive (u ravni) i kontroliše evoluciju tako dobijene površi (u prostoru). Ova površ se označava kao *nivo-funkcija*. Kriva se u svakom trenutku dobija kao nulti nivo-skup ove funkcije (videti sliku 8). Najjednostavniji način za konstrukciju nivo-funkcije je putem primene rastojanja između krive i svake tačke slike. Definicija glasi

$$\phi(x, y) = \begin{cases} -d((x, y), \mathbf{c}), & (x, y) \text{ je unutar } \mathbf{c} \\ 0, & (x, y) \text{ pripada } \mathbf{c} \\ +d((x, y), \mathbf{c}), & (x, y) \text{ je van } \mathbf{c}, \end{cases} \quad (19)$$

gde je d euklidsko rastojanje a $\phi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ je konstruisana nivo-funkcija.

Objasnimo sada evoluciju nivo-funkcije (površ). Glavna ideja je da ova površ raste, opada, širi se ili skuplja u zavisnosti od ciljeva kretanja aktivne konture, videti sliku 8. Slično evolucionoj jednačini krive, potrebno je odrediti odgovarajuću evolucionu jednačinu nivo-funkcije. Dodavanjem veštačke vre-



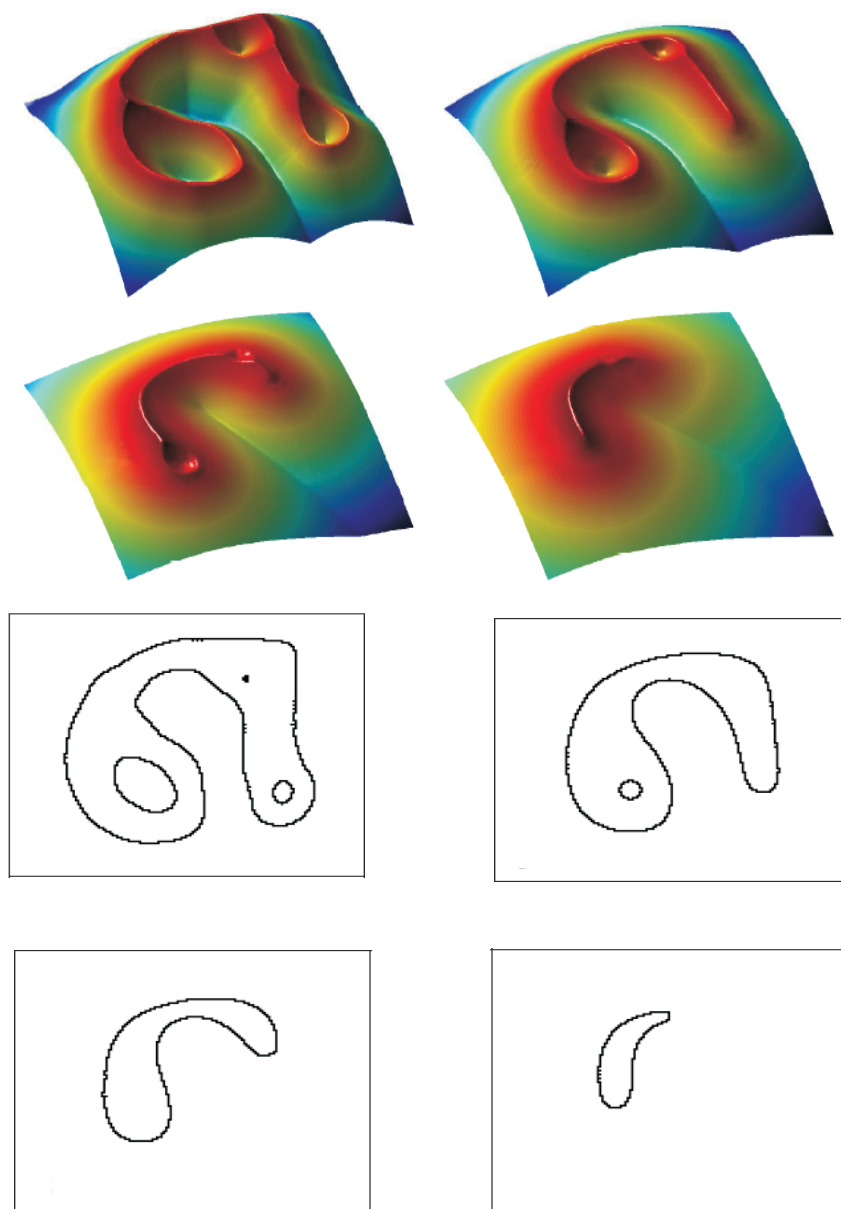
Slika 7: Levo: Nivo-funkcija (konus). Presek sa ravni $z = 0$. Desno: Nulta nivo kriva u $z = 0$ ravni.

menske promenljive, $t \geq 0$ posmatraćemo je kao dinamičku funkciju, $\phi(x, y, t)$. Aktivna kontura u trenutku evolucije $t = t'$ dobiće se kao nulti nivo-skup, tj. $\mathbf{c} = \{(x, y) | \phi(x, y, t') = 0\}$. Da bismo odredili odgovarajuću parcijalnu diferencijalnu jednačinu koja upravlja evolucijom nivo-funkcije, prvo ćemo analizirati sledeću jednačinu za evoluciju krive

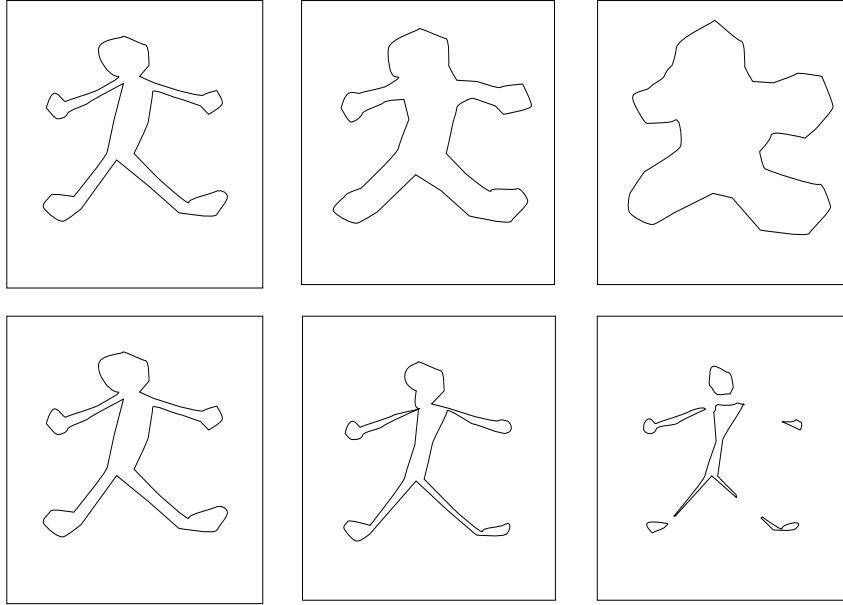
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} &= F \cdot \vec{N} \\ \mathbf{c}(s, 0) &= \mathbf{c}_0(s) , \end{aligned} \tag{20}$$

gde je F intenzitet brzine kretanja u pravcu normalnom na krivu, \vec{N} je jedinični vektor normale na krivu a \mathbf{c}_0 je data početna kriva. Jednačina (20) definiše *evoluciju krive sa datom brzinom*. Najjednostavnija forma ovog kretanja je *evolucija konstantnom brzinom*, gde je brzina F konstantna tokom kretanja. Slika 9 ilustruje kretanje konstantnom brzinom, gde je F birana da bude jednaka 1 ili -1. Slučaj kada je $F = 1$ je poznato „požar u pre-riji” kretanje, pošto se kriva ponaša slično vatrenom frontu prilikom gorenja trave. U slučaju kada je $F = -1$ kretanje ima suprotan karakter, kriva se skuplja da bi na kraju nestala. Primetimo da evoluciju konstantnom brzinom možemo uporediti sa evolucijom aktivne konture balon modela. Naime, kriva se širi nalik „naduvavanju balona” ili se skuplja nalik „izduvavanju balona” u zavisnosti od predznaka brzine F .

Pored kretanja konstantnom brzinom druga poznata forma evolucije krive



Slika 8: Evolucija nivo-funkcije tokom vremena (gore) i odgovarajući multi nivo-skupovi (dole). Primetimo topološke promene na nivo-skupovima. Slike su preuzete iz rada [16].



Slika 9: Ilustracija evolucije konture konstantnom brzinom. Gore: $F = \text{const} = 1$, „požar u preriji”. Dole: $F = \text{const} = -1$, kolabiranje.

tipa (20) je *kretanje brzinom krivine* koje je dato sa

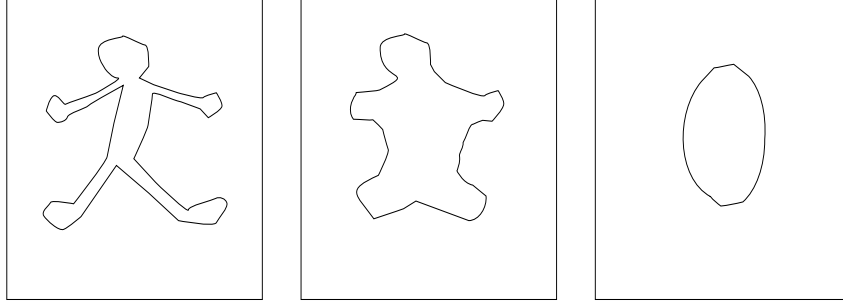
$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = \kappa \cdot \vec{N}, \quad (21)$$

gde je κ krivina krive. Specijalan slučaj ovog kretanja je *euklidsko kretanje skraćivanja dužine* (engl. Euclidean curve shortening flow) [11], gde je κ euklidska krivina krive data sa $\kappa = \|\mathbf{c}''(s)\|$. Tada je $\kappa \cdot \vec{N}$ jednaka levoj strani Euler-Lagrange-ove jednačine za funkcionalu euklidske dužine,

$$\Lambda[\mathbf{c}] = \oint \|\mathbf{c}'(s)\| ds.$$

Iz ovoga sledi da jednačina (21) određuje kretanje pri kome se dužina krive smanjuje na najbrži mogući način. Kao posledicu toga imamo da se svaka kriva pod dejstvom ovog kretanja transformiše u kružnicu i na kraju kolabira u tačku, videti sliku 10.

Na osnovih iznetih činjenica, evolucionarna jednačina (20) ima niz korisnih osobina u pogledu primene kod aktivnih kontura. U nastavku zainteresovani smo



Slika 10: Ilustracija kretanja brzinom krivine krive.

za pronalaženje analogne forme kretanja (20), ali sad umesto evolucije krive želimo da kontroliramo evoluciju nivo-funkcije. Uzimajući u obzir vremensku promenljivu i našu pretpostavku o funkciji ϕ sledi da u svakom trenutku, t treba da važi

$$\phi(\mathbf{c}(s, t), t) = 0, \quad \forall s \in [0, 1], \forall t \geq 0. \quad (22)$$

Diferencirajući gornju jednačinu u odnosu na t , imamo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \langle \nabla \phi, \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \rangle = 0. \quad (23)$$

Zamenjujući (20) u (23) dobijamo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \langle \nabla \phi, F \cdot \vec{N} \rangle = 0. \quad (24)$$

Jedinični vektor normale na krivu definisanu sa (22) je dat sa $\vec{N} = -\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$. Koristeći ovu činjenicu, jednačinu (24) možemo reformulisati u sledeći oblik

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = F \cdot \|\nabla \phi\|, \quad (25)$$

koji predstavlja traženu evolucionu jednačinu nivo-funkcije. Ovu jednačinu možemo da posmatramo kao nivo-skup „ekvivalent” evolucionoj jednačini krive (20). Pri tom mislimo na „ekvivalenciju” kretanja krive određene jednačinom (20) i kretanja nultog nivo-skupa funkcije ϕ definisane jednačinom (25). Sada, evoluciju nivo-funkcije možemo da definišemo na sledeći način

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= F \cdot \|\nabla \phi\| \\ \phi(x, y, 0) &= \phi_0(x, y), \end{aligned} \quad (26)$$

gde je F intenzitet brzine kretanja a ϕ_0 data početna nivo-funkcija. Funkciju ϕ_0 za datu početnu krivu određujemo pomoću (19). Više detalja o evolucionoj jednačini (26) čitalac može da nađe u radovima [10] i [18]. Slično kao u slučaju evolucije krive jednačina (26) se rešava numeričkim postupkom, putem diskretizacije jednačine i aproksimacije izvoda diferencnim količnicima. Kompletnu numeričku šemu čitalac može da nađe u radu [12].

Spomenućemo specijalan slučaj kretanja (26) pod nazivom *kretanje srednjom krivinom* [18],

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \|\nabla \phi\| \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) \\ \phi(x, y, 0) &= \phi_0(x, y) , \end{aligned} \tag{27}$$

gde je brzina kretanja definisana srednjom krivinom nivo funkcije ϕ , tj. $F = \operatorname{div}(\nabla \phi(x, y) / \|\nabla \phi(x, y)\|)$. Ovo kretanje je „ekvivalent” kretanju krive brzinom krivine (21). Ovu činjenicu ćemo iskoristiti u sekciji 8.

Nivo-skup postupak obezbeđuje potpunu slobodu topoloških promena krive prilikom njene evolucije. Slika 8 prikazuje različite faze evolucije nivo-funkcije. Odgovarajući nivo-skup menja svoju topologiju: od jedne zatvorene krive do više samostalnih zatvorenih krivih. Praktično postupak automatski određuje topološke promene krive, što predstavlja veliku prednost u odnosu na kretanje gde je kriva reprezentovana na parametarski način. Postupak se može na jednostavan način proširiti do primene i u trodimenzionalnom slučaju. Tada je domen nivo-funkcije oblast u prostoru, a odgovarajući nivo-skupovi su površi. Kao nedostatak postupka, moramo naglasiti da je zbog povećane dimenzije problema, numeričko rešavanje evolucione jednačine na bazi nivo-skupova računarski složenije nego rešavanje iste u slučaju parametarske reprezentacije krive. Primena nivo-skup postupka u evoluciji aktivnih kontura, nažalost nije moguća kod svih modela. Postoje dva uslova za primenu. Prvi uslov podrazumeva da se funkcionalna energija može izraziti u zavisnosti od nivo-funkcije ϕ (ovaj pristup možemo videti u sekciji 10). Alternativno, uslov je da se evolucionarna jednačina aktivne konture izrazi u obliku kretanja brzinom krivine, što opet nije moguće kod svih modela (primer ovog pristupa možemo videti u sledećoj sekciji).

8 Geodezijski model aktivne konture

Geodezijski model aktivne konture je uveden u radu Caselles-a, Kimmel-

a i Sapiro-a [15] 1997. godine. Glavni cilj uvođena ovog modela je modifikacija klasičnog modela za primenu nivo-skup postupka u evoluciji aktivne konture. Funkcionela energije je modifikovana na način da zadrži svoje najbitnije osobine, koje se pre svega odnose na detekciju granice objekata, ali da istovremeno bude omogućena i primena nivo-skup postupka za evoluciju krive. Time je ispravljen veliki nedostatak klasičnog modela koji se odnosi na nemogućnost toploških promena krive. Druga prednost ovog modela je da njegova funkcionalna energija ne zavisi od načina parametrizacije krive.

Neka važe pretpostavke klasičnog modela. Funkcionela energije geodezijske aktivne konture je definisana na sledeći način [15, 31]

$$E_G[\mathbf{c}] = \int_a^b g(\|\nabla u(\mathbf{c}(s))\|) \|\mathbf{c}'(s)\| ds = \int_0^{L(\mathbf{c})} g(\|\nabla u(\mathbf{c}(s))\|) dl, \quad (28)$$

gde je $g(\|\nabla u(\mathbf{c})\|)$ funkcija za detekciju ivica. Uporedimo ovu funkcionalu sa funkcionalom euklidske dužine krive, $\int_0^{L(\mathbf{c})} dl$. E_G možemo posmatrati kao modifikovanu, „naglašenu” euklidsku dužinu krive. Zaista, element dužine u (28), dl je naglašen faktorom $g(\|\nabla u(\mathbf{c}(s))\|)$. Dakle, minimizirajući funkcionalu E_G ujedno tražimo krivu minimalne dužine u novoj, „naglašenoj” metrici. Naziv geodezijski je vezan za ovu činjenicu.

Opravdanost definicije funkcionele E_G je analizirana posmatranjem funkcionele energije klasičnog modela (9). U radu [15] je pokazano da funkcionalna energija (9) dovoljno smanjuje krivinu krive i bez forsiranja člana koji sadrži drugi izvod, $\beta \int_a^b \|\mathbf{c}''(s)\| ds$. To znači da se ovaj član može izostaviti ($\beta = 0$). Posmatrajmo sada takvu funkcionalu J datu sa

$$J[\mathbf{c}] = \alpha \int_a^b \|\mathbf{c}'(s)\|^2 ds + \lambda \int_a^b g(\|\nabla u(\mathbf{c}(s))\|) ds. \quad (29)$$

Prvo što zaključujemo je da minimizacija funkcionele J „ekvivalentna” minimizaciji funkcionele E_G . Dokaz i više detalja o tačnom značenju ove „ekvivalencije” čitalac može da nađe u radu [10]. Drugo, funkcionala J zavisi od parametrizacije krive \mathbf{c} . Zaista, ako definišemo novu parametrizaciju $s = \theta(r)$, $\theta : [c, d] \rightarrow [a, b]$, $\theta' > 0$, imamo

$$\int_c^d \|\overline{\mathbf{C}}'(r)\|^2 dr \neq \int_c^d \|\overline{\mathbf{C}}'(r)\|^2 \theta'(r)^{-1} dr = \int_a^b \|\mathbf{c}'(s)\|^2 ds \quad (30)$$

i takođe

$$\int_c^d g(\|\nabla u(\bar{C}(r))\|)dr \neq \int_c^d g(\|\nabla u(\bar{C}(r))\|)\theta'(r)dr = \int_a^b g(\|\nabla u(\mathbf{c}(s))\|)ds \quad (31)$$

gde je $\bar{C} = \mathbf{c} \circ \theta$. Iz (30) i (31) sledi da energije nisu iste iako se radi o istoj krivoj. Očigledno, ovo je nepoželjna osobina. Geodezijska funkcionalna energija (28) međutim, nema ovaj nedostatak. Zaista, za novu parametrizaciju $s = \theta(r)$ imamo

$$\begin{aligned} \int_c^d g(\|\nabla u(\bar{C}(r))\|)\bar{C}'(r)dr &= \int_c^d g(\|\nabla u(\bar{C}(r))\|)\mathbf{c}'(\theta(r))\theta'(r)dr \\ &= \int_a^b g(\|\nabla u(\mathbf{c}(s))\|)\mathbf{c}'(s)ds, \end{aligned}$$

tj. funkcionalna energija (28) ostaje nepromenjena.

Euler-Lagrange-ova jednačina funkcionalne E_G je

$$g(\nabla u) \kappa \vec{N} - \langle \nabla g, \vec{N} \rangle \vec{N} = 0,$$

gde je κ euklidska krivina krive, \vec{N} je jedinični vektor normale na krivu a ∇g je skraćeni zapis za $\nabla g(\nabla u)$. Odgovarajuća evoluciona jednačina koja upravlja kretanjem krive je data sa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} &= g(\nabla u) \kappa \vec{N} - \langle \nabla g, \vec{N} \rangle \vec{N}, \\ \mathbf{c}(s, 0) &= \mathbf{c}_0(s) \end{aligned} \quad (32)$$

gde je t parametar vremena, a \mathbf{c}_0 data početna kriva. Rešenje je ona kriva za koju je sistem u ravnotežnom stanju, tj. $\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = 0$. Primetimo da jednačina kretanja (32) spada u vrstu kretanja krive sa datom brzinom. Zaista, ako brzinu kretanja definišemo sa $F = g(\nabla u) \kappa - \langle \nabla g, \vec{N} \rangle$, dobićemo prethodno analiziranu jednačinu (20)

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = F \cdot \vec{N}.$$

U sekciji 7 smo pokazali da se ova jednačina kretanja krive može zapisati u adekvatnoj („ekvivalentnoj”) formi kretanja na bazi nivo-skup reprezentacije. Odgovarajuća evoluciona jednačina u nivo-skup reprezentaciji je data sa (25)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = F \cdot \|\nabla \phi\|,$$

gde je ϕ odgovarajuća nivo-funkcija. Brzina kretanja krive u odnosu na nivo-funkciju je

$$F = g(\nabla u)\kappa + \langle \nabla g, \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \rangle,$$

gde je κ krivina površi ϕ , $\kappa = \operatorname{div}(\nabla \phi / \|\nabla \phi\|)$. Dakle, odgovarajuća evoluciona jednačina krive u nivo-skup reprezentaciji je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= g(\nabla u)\kappa \|\nabla \phi\| + \langle \nabla g, \nabla \phi \rangle, \\ \phi(x, y, 0) &= \phi_0(x, y), \end{aligned} \tag{33}$$

gde je ϕ_0 početna nivo-funkcija koja se određuje na osnovu date početne konture (19), tako da je $\phi_0(\mathbf{c}_0) = 0$. Zahvaljujući reformulaciji (33) evolucione jednačine (32), geodezijski model prilagođava krivu topološkim karakteristikama slike. Jednačina (33) ima dva značajna faktora. Prvi faktor je $g(\nabla u)$ koji nastoji da zaustavi krivu kada ona stigne do granice objekta. Drugi faktor je $\langle \nabla g, \nabla \phi \rangle$ koji pojačava privlačnu silu koja privlači krivu prema granici objekta. Time je poboljšana detekcija granica objekata, naročito sa velikim promenama gradijenta duž granice (više o ovome videti u [15, 10]).

Prednosti geodezijskog modela u odnosu na klasičan model možemo da sumiramo u tri tačke: (1) Topološke promene krive vrše se automatski; (2) Funkcionela energije ne zavisi od načina parametrizacije krive; (3) Poboljšana je detekcija granica objekata.

9 Mumford-Shah funkcionela

Mumford-Shah postupak je uveden u radu [5] 1989. godine. Spada u postupke za segmentaciju slike. Cilj postupka je da odredi particiju posmatrane slike gde će funkcija intenziteta u svakom delu biti glatka. Naročito je koristan u segmentaciji objekata sa nejasnim granicama. Mumford-Shah postupak se bazira na Mumford-Shah funkcionali koja ima bliske veze sa funkcionalama energije aktivnih konturnih modela. Predmet našeg interesovanja su zapravo definicija i osobine Mumford-Shah funkcionele, koja zauzima značajno mesto u segmentaciji na bazi varijacionog računa.

Neka je u funkcija slike sa domenom $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Neka su Ω_i disjunktni, povezani i otvoreni podskupovi (komponente) domena slike Ω , a Γ je unija svih rubova od Ω_i . Dakle, $\Omega = (\cup_i \Omega_i) \cup \Gamma$. Zapravo, skupovi Ω_i su elementi

jedne particije domena slike. Neka je u_s diferencijabilna funkcija na uniji $\cup_i \Omega_i$, a eventualno prekidna duž Γ . Mumford-Shah funkcionala je definisana sa

$$F_{MS}[u_s, \Gamma] = \lambda \int_{\Omega} (u_s - u)^2 dx dy + \int_{\Omega - \Gamma} \|\nabla u_s\|^2 dx dy + \nu \cdot \text{Dužina}(\Gamma), \quad (34)$$

gde su λ i ν pozitivni parametri. Cilj Mumford-Shah postupka je da minimizacijom Mumford-Shah funkcionele odredi uređeni par (rešenje) (u^*, Γ^*) , tj. da reši sledeći optimizacioni problem

$$(u^*, \Gamma^*) = \arg \min_{u_s, \Gamma} F_{MS}(u_s, \Gamma). \quad (35)$$

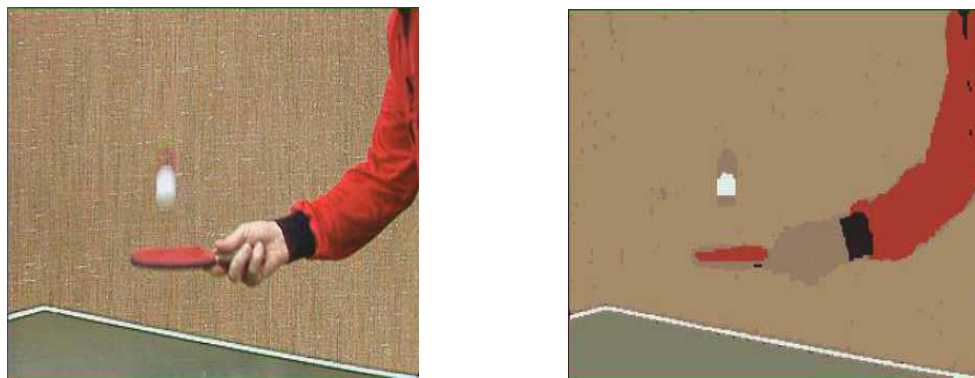
Analizirajmo sada šta dobijamo minimizacijom funkcionele F_{MS} . Prvi član u (34) obezbeđuje da u^* što je moguće bolje aproksimira funkciju u date slike. Drugi član čini u^* glatkom (homogenom) unutar skupova Ω_i . Poslednji član nastoji da minimizuje dužinu Γ^* . Rešenje (u^*, Γ^*) možemo smatrati pojednostavljenom verzijom (skicom) originalne slike, koja ne sadrži nikakvu teksturu. Nova slika u^* je sastavljena iz oblasti sa homogenim intenzitetima između kojih su granice oštre. Drugim rečima, u^* je pojednostavljena scena na originalnoj slici na način da se sačuvaju najbitnije odlike slike. Slika 11 ilustruje efekat minimizacije Mumford-Shah funkcionele.

Utvrđimo sada opravdanost svakog člana u F_{MS} . Izostavljanje bilo kog člana rezultuje trivijalnim rešenjem za koje je $\inf F_{MS}(u^*, \Gamma^*) = 0$. Zaista, ako izostavimo prvi član u (34) dobićemo da je $u^* = \text{const}$ i $\Gamma^* = \emptyset$. Izostavljanje drugog člana dovodi do rešenja gde je $u^* = u$ i $\Gamma^* = \emptyset$. Konačno, izostavljanje trećeg člana implicira da je $u^* = u$ i da je Γ^* skup svih vrsta i kolona domena (svaka tačka slike je jedan element particije). Jasno je da dobijena trivijalna rešenja nisu prihvatljiva u segmentaciji slike.

Funkcionala F_{MS} nije diferencijabilna pa ne može da se odredi odgovarajuća Euler-Lagrange-ova jednačina. Zbog toga se najčešće posmatra regularizovana verzija Mumford-Shah funkcionele. Najpoznatija regularizacija je data sa [33]

$$F_{MS}^{\varepsilon}[u_s, v] = \int_{\Omega} \left[(u_s - u)^2 + v^2 \|\nabla u_s\|^2 + \left(\varepsilon \|\nabla u_s\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (v - 1)^2 \right) \right] dx,$$

gde je $\varepsilon > 0$. Skup Γ je zamenjen funkcijom v koja predstavlja aproksimaciju karakteristične funkcije skupa Γ sa osobinama da je $v(x) \approx 0$ ako $x \in \Gamma$ i $v(x) \approx 1$ ako $x \notin \Gamma$.



Slika 11: Segmentacija na bazi Mumford-Shah funkcionele. Levo: originalna slika. Desno: segmentovana slika. Slike su preuzete iz rada [7].

Rešavanje optimizacionog problema (35) je složen zadatak i još uvek otvoren problem (više detalja videti u knjizi ([10]). Jedna od mogućnosti je diskretizacija Euler-Lagrange-ove jednačine za regularizovanu funkcionalu, F_{MS}^ϵ . Međutim, računarska složenost algoritma za ovu optimizaciju je velika, što predstavlja značajno ograničenje za praktičnu primenu. Najčešće se primenjuje pojednostavljena verzija Mumford-Shah funkcionele. Jednu takvu primenu možemo videti u sledećoj sekciji.

10 Chan-Vese model

Klasični aktivni konturni model, kao i njegove modifikacije koje smo do sada razmatrali, detektuju granice objekata na bazi gradijenta funkcije slike. Gradijent detektuje tačke promene intenziteta. To znači da prethodni modeli detektuju granice samo sa pretežno strogim prelazima između susednih oblasti. Ovo može da predstavlja problem u detekciji objekata sa glatkim granicama ili u slučajevima kada objekat uopšte nema jasno definisanu granicu, videti na Slici 12 levo. Ovaj problem je predstavljao glavnu motivaciju za razvoj *Chan-Vese modela*. Ovim modelom uvodi se nova energija konture na bazi

Mumford-Shah funkcionele koja omogućava detekciju objekata u oba slučaja, sa ili bez oštih granica (ivica). Model je definisan i analiziran u radu Chan-a i Vese-a [12] 2001. godine. Važno je još istaći da model primenjuje nivo-skup postupak za evoluciju konture, što automatski omogućava topološke promene konture.

Neka važe pretpostavke klasičnog modela. Funkcionela energije Chan-Vese modela je definisana na sledeći način

$$\begin{aligned}
 E_{CV}[\mathbf{c}] = & \nu \cdot \text{Dužina}(\mathbf{c}) + \mu \cdot \text{Površina}(\text{unutar}(\mathbf{c})) \\
 & + \lambda_1 \int_{\text{unutar}(\mathbf{c})} (u(x, y) - c_1)^2 dx dy \\
 & + \lambda_2 \int_{\text{van}(\mathbf{c})} (u(x, y) - c_2)^2 dx dy,
 \end{aligned} \tag{36}$$

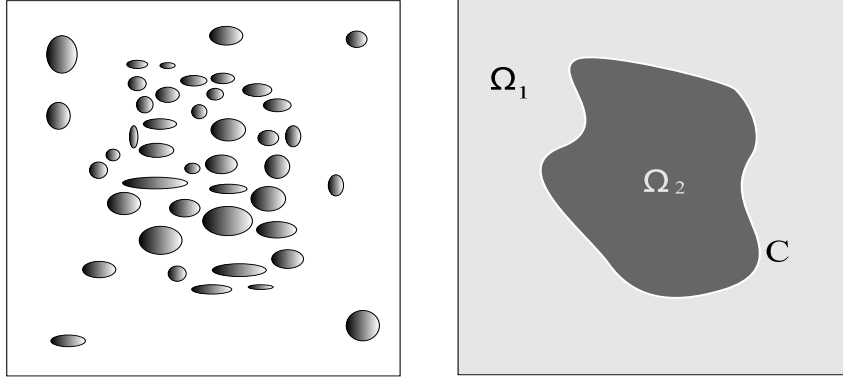
gde su $\nu \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ parametri, a konstante c_1 i c_2 su srednje vrednosti funkcije slike, u unutar i van konture \mathbf{c} , respektivno. Uloga prvog člana u E_{CV} je da smanji dužinu konture, dok drugi član smanjuje površinu obuhvaćenu konturom. Treći i četvrti član aproksimiraju funkciju u unutar i van konture \mathbf{c} .

Funkcionela E_{CV} može da se posmatra kao specijalan slučaj Mumford-Shah funkcionele, F_{MS} (34). Posmatrajmo restrikciju funkcionele F_{MS} na funkcije u_s koje su konstantne na svakoj komponenti Ω_i slike (koristimo oznake iz sekcije 9). Iz ovoga sledi da je u_s srednja vrednost funkcije slike u na svakoj komponenti Ω_i . Minimizacija ovako redukovane funkcionele se zove *problem minimalne particije*. Chan-Vese model za $\mu = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ je specijalan slučaj problema minimalne particije sa dve povezane komponente Ω_1 i Ω_2 .

Slika 12 ilustruje primenu modela na sliku koja se sastoji iz dve oblasti bez jasne granice među njima. Model je u stanju da razdvoji ove oblasti zahvaljujući definiciji funkcionele energije na bazi Mumford-Shah funkcionele.

Minimizacija funkcionele E_{CV} se vrši numeričkim putem i primenom nivo-skup postupka. Da bi se primenio nivo-skup postupak, reformulisaćemo funkcionelu E_{CV} tako da zavisi od odgovarajuće nivo-funkcije, ϕ (videti sekciju 7) umesto od konture \mathbf{c} . Koristićemo Heaviside-ovu funkciju H , i jednodimenzionalnu Dirac meru δ_0 koja su definisana sa

$$H(z) = \begin{cases} 1, & \text{if } z \geq 0 \\ 0, & \text{if } z < 0, \end{cases} \quad \delta_0 = \frac{d}{dz} H(z).$$



Slika 12: Levo: Originalna, sintetička slika. Desno: Chan-Vese aktivna kontura c i particija slike na dve komponente Ω_1 i Ω_2 .

Funkcije H i δ_0 nisu diferencijabilne. Da bismo izbegli ove nedostatke koristićemo regularizovane verzije ovih funkcija H_ε i δ_ε ($H'_\varepsilon = \delta_\varepsilon$). Najpoznatiji izbor za H_ε je dat sa

$$H_\varepsilon(z) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{\varepsilon} \right) \right).$$

Druge mogućnosti za regularizaciju čitalac može da nađe u radovima [30] i [12]. Regularizovana (diferencijabilna) funkcionala energije u odnosu na nivo-funkciju glasi [12]

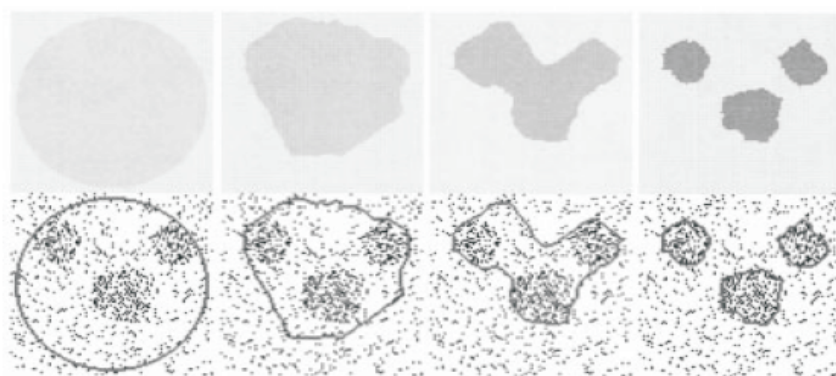
$$\begin{aligned} E_{CV_\varepsilon}[\phi] = & \nu \int_{\Omega} \delta_\varepsilon(\phi(x, y)) \|\nabla \phi(x, y)\| dx dy + \mu \int_{\Omega} H_\varepsilon(\phi(x, y)) dx dy \\ & + \lambda_1 \int_{\Omega} (u(x, y) - c_1)^2 H_\varepsilon(\phi(x, y)) dx dy \\ & + \lambda_2 \int_{\Omega} (u(x, y) - c_2)^2 (1 - H_\varepsilon(\phi(x, y))) dx dy, \end{aligned} \quad (37)$$

gde su konstante c_1 i c_2 takođe izražene u funkciji od ϕ

$$c_1(\phi) = \frac{\int_{\Omega} u(x, y) H(\phi(x, y)) dx dy}{\int_{\Omega} H(\phi(x, y)) dx dy}, \quad \text{i}$$

$$c_2(\phi) = \frac{\int_{\Omega} u(x, y)(1 - H(\phi(x, y))) dx dy}{\int_{\Omega} (1 - H(\phi(x, y))) dx dy}.$$

Računajući Euler-Lagrange-ovu jednačinu regularizovane funkcionele (37) i



Slika 13: Detekcija „simuliranog minskog polja” primenom Chan-Vese modela. Slike su preuzete iz rada [12].

uvodeći veštački parametar vremena za ϕ dobijamo odgovarajuću evolucionu jednačinu u odnosu nivo-funkciju

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta_{\varepsilon}(\phi) \left[\nu \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) - \mu - \lambda_1(u - c_1)^2 + \lambda_2(u - c_2)^2 \right], \quad (38)$$

$$\phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y),$$

gde je ϕ_0 početna nivo-funkcija koja je određena tako da njen nulti nivo-skup bude jednak datoj početnoj konturi (videti definiciju (19)). Jednačina (38) se rešava putem diskretizacije i primene odgovarajućeg numeričkog postupka. Kompletna numerička šema za rešavanje Chan-Vese modela može da se nađe u radu [12].

Najvažnija prednost Chan-Vese modela u odnosu na sve prethodno razmatrane modele je njegova mogućnost da detektuje objekte i sa ostrim i sa slabo definisanim garnicama. Ovome treba još dodati prednost korišćenja primene nivo-skup postupka u evoluciji konture koji dozvoljava topološke promene konture. Na slici 13 vidimo primenu modela za detekciju tri objekta (delove

simuliranog „minskog polja”) sa slabo definisanim granicama i gde topološke promene konture dolaze do izražaja. Nedostatak modela je činjenica da može da prepozna samo dve (homogene) oblasti na slici. Autori Chan i Vese su korigovali ovaj nedostatak uvodeći *Višefazni model* (videti [13, 14]). Međutim, kod ovog modela, broj homogenih oblasti se ne određuje automatski nego se mora zadati od strane korisnika. Ovo nesumnjivo predstavlja znatno ograničenje u primeni, jer je potrebna dodatna informacija o broju homogenih oblasti.

11 Zaključak

Posle analize najznačajnijih modela aktivnih kontura, daćemo kratko poređenje njihovih glavnih karakteristika. Polazeći od klasičnog modela, svaki novi model je uveden sa namerom da se prevaziđu odgovarajući nedostaci.

	(1)	(2)	(3)	(4)
Klasični model	-	-	-	-
Balon model	+ -	-	-	-
GVF model	+	-	-	+
Geodezijski model	+ -	+	-	-
Chan-Vese model	+ -	+	+	+

Tabela 1.

Izdvojićemo četiri najbitnije osobine: (1) Stabilnost modela u zavisnosti od izbora početne konture; (2) Mogućnost promene topoloških osobina krive; (3) Detekcija objekata sa glatkim (nedovoljno oštrim) granicama; i (4) Konvergencija ka konkavnim oblastima. Tabela 1 sadrži prikaz ovih osobina u odnosu na modele. Sa plus (+) smo obeležili situaciju kada model poseduje datu osobinu a sa minus (-) kada ne. Oznaka (+-) znači da osobina nije ispunjena u potpunosti. Iz tabele vidimo da najviše pozitivnih osobina ima Chan-Vese model. Međutim, ovde treba naglasiti da ovaj model pogodan za primenu samo u slučaju kada se slika sastoji iz dve dominantno homogene oblasti.

Opšti problem svih modela je nekonveksnost funkcionele energije. Ovo znači da se postizanje globalnih optimuma ne može garantovati. Ovo pitanje ostaje kao veliki izazov za budući rad.

Literatura

- [1] Euler L.: *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietate Gaudentes*. (1744) Bousquet, Lausanne and Geneva. 320 pages. Reprinted in *Leonhardi Euleri Opera Omnia: Series I vol 24*. (1952) C. Cartheodory (ed.) Orell Fuessli, Zurich.
- [2] P.L.M. de Maupertuis: *Accord de diffrentes lois de la nature qui avaiant jusqu'ici paru incompatibles*. Mm. As. Sc. Paris, 1744.
- [3] Schuster A.: *An Introduction to the Theory of Optics*, London, Edward Arnold, 1904.
- [4] Padra C.: *The beginnings of variational calculus, and its early relation with numerical methods*, CIMNE, Barcelona, Spain, 2006.
- [5] Mumford D., Shah J.: *Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems*. *Communications on Pure and Applied Mathematics* (42), 1989, 577-684.
- [6] Kass M., Witkin A., Terzopoulos D.: *Snakes: Active contour models*. *Int. J. Comput. Vision*.(1), 1987, 321-331.
- [7] Kato Z.: *PhD course on Variational and Level Set Methods in Image Processing*. University of Szeged, 2008.
- [8] Forray M. J.: *Variational Calculus in Science and Engineering*. McGraw-Hill Book Company, 1968.
- [9] Gelfand, I.M., Fomin, S.V.: *Calculus of Variations*, Dover Publ., 2000.
- [10] Gilles A., Pierre K.: *Mathematical Problems in Image Processing, Second Edition*, Springer, 2006.
- [11] Grayson M.: *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, *J. Differential Geometry*(26), 285–314, 1987.
- [12] Chan T.F., Vese L.A.: *Active Contours Without Edges*. *IEEE Trans. Image Processing*(10), 2001, 266-277.

- [13] Chung G., Vesse L.A.: Energy Minimization Based Segmentation and Denoising Using a Multilayer Level Set Approach. LNCS Vol. 3757, 2005, 439-455.
- [14] Vesse L.A., Chan T.F.: A Multilayer Level Set Framework for image Segmentation Using the Mumford and Shah Model. IJCV 50(3), 2002, 271-293.
- [15] Caselles V., Kimmel R., Sapiro G.: Geodesic Active Contours. International Journal of Computer Vision 22(1), 1997, 61-79.
- [16] Horváth P., Jermyn I., Kato Z., Zerubia J.: Higher Order Active Contour Model for Tree Detection. Proceedings of the 18th International Conference on Pattern Recognition(2), 2006, 130-133.
- [17] Xu C., Prince J.L.: Gradient Vector Flow: A new External Force for Snakes. IEEE Proceedings Conf. on Comp. Vis. Patt. Recog., 1997.
- [18] Osher S., Sethian J.A.: Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations. Jour. Comp. Phys(79), 1988, 12-49.
- [19] Sethian J.A.: Level Set Methods and Fast Marching Methods. Cambridge University Press, 1999.
- [20] Ames W.F.: Numerical Methods for Partial Differential Equations. Academic Press, 1977.
- [21] Hadziavdic V.: A comparative Study of Active Contour Models for Boundary Detection in Brain Images. University of Tromso, Diploma Project.
- [22] Cohen L.D.: On Active Contour Models and Balloons. Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding, 53(2), 1989, 211-218.
- [23] Terzopoulos D., Szeliski R.: Tracking with Kalman snakes. Active Vision, MIT Press, Cambridge, 1992, 3-20.
- [24] Leymarie F., Levine M.D.: Tracking deformable objects in the plane using an active contour model. IEEE Trans. on Pattern Anal. Machine Intell., 15(6), 1993, 617-634.

- [25] Davatzikos C., Prince J. L.: An active contour model for mapping the cortex. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 14(1), 1995, 65–80.
- [26] Xu C., Prince J. L.: Snakes, shapes, and gradient vector flow. Technical Report JHU-ECE TR96-15, The Johns Hopkins University, 1996.
- [27] Rocca M. R., Fiani M., Fortunato A., Pistillo P.: Active contour model to detect linear features in satellite images. *Proc. of XXth ISPRS Congress*, Istanbul, Turkey, 2004.
- [28] Rochery M., Jermin I., Zerubia J.: Higher Order Active Contours and their Application to the Detection of Line Networks in Satellite Imagery. 2004.
- [29] Hageman, L., Young, D. *Applied Iterative Methods*. New York: Academic Press, 1981.
- [30] Zhao, H. K., Chan T., Merriman B., and Osher S.: A variational level set approach to multiphase motion. *J. Comp. Phys*, vol. 127, 1996, 179–195.
- [31] Kichenassamy S., Kumar A., Olver P., Tannenbaum A., Yezzi A.: Conformal curvature flows: from phase transitions to active vision. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 134, 1996, 275–301.
- [32] Čomić I., Pavlović Lj.: *Funkcije više promenljivih*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2000.
- [33] Ambrosio L., Tortorelli V.M.: Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ -convergence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLII, 1990, 999-1036.