

## MATEMATIKA 3

Ivan Prokić

kabinet 117, F blok

prokic@uns.ac.rs

<http://imft.ftn.uns.ac.rs/~iprokic/>

Andrea Karalić

kabinet 215, F blok

andrea.karalic@gmail.com

Novi Sad

Slajdove pripremila prof. dr Jovanka Pantović

# Sadržaj predmeta

- 1 Funkcije više promenljivih
- 2 Višestruki i krivolinijski integrali
- 3 Obične diferencijalne jednačine
- 4 Laplasove transformacije

# Tema 1

## Funkcije više promenljivih

# Ponavljanje - binarne relacije i funkcije

**Binarna relacija**  $\rho$  između skupova  $A$  i  $B$  je proizvoljan podskup Dekartovog proizvoda  $A \times B$ ,

$$\rho \subseteq A \times B$$

**Funkcija** skupa  $A$  u skup  $B$ , u oznaci  $f : A \rightarrow B$ , je binarna relacija između skupova  $A$  i  $B$  sa osobinom da se svaki element skupa  $A$  pojavljuje tačno jednom kao prva komponenta u  $\rho$ .

# Ponavljanje - binarne relacije i funkcije

Neka je  $A = \{a, b, c\}$  i  $B = \{u, v, w\}$ .

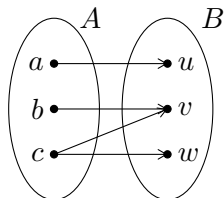
$$\begin{aligned}\rho_i &\subseteq A \times B \\ &= \{a, b, c\} \times \{u, v, w\} \\ &= \{(a, u), (a, v), (a, w), (b, u), (b, v), (b, w), (c, u), (c, v), (c, w)\}\end{aligned}$$

$$\rho_1 = \{(a, u), (b, v), (c, v), (c, w)\}$$

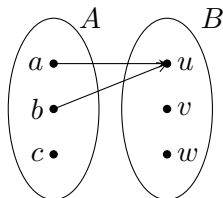
$$\rho_2 = \{(a, u), (b, u)\}$$

$$f_3 = \{(a, u), (b, u), (c, v)\}$$

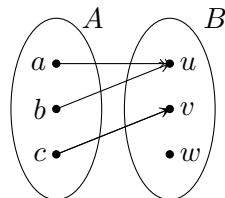
# Ponavljanje - binarne relacije i funkcije



$$\rho_1 = \{(a, u), (b, v), (c, v), (c, w)\}$$

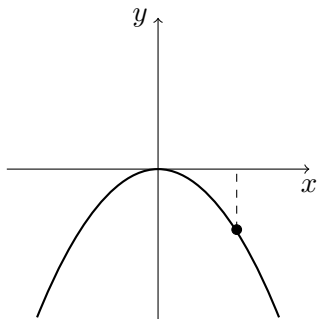


$$\rho_2 = \{(a, u), (b, u)\}$$

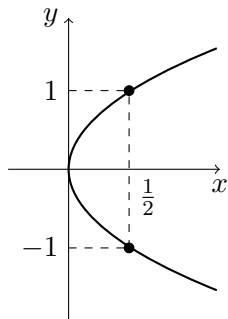


$$f_3 = \{(a, u), (b, u), (c, v)\}$$

# Ponavljanje - binarne relacije i funkcije



$$f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2\}$$



$$\rho_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x = y^2\}$$

$$f_3 = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 : 2x = y^2\}$$

# Skalarne i vektorske funkcije $n$ realnih promenljivih

## skalarne funkcije

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$n \geq 1$$

## vektorske funkcije

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m, D \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$n \geq 1, m \geq 2$$

skalarne veličine	vektorske veličine
masa	sila
dužina	brzina
vreme	ubrzanje
rad	impuls
energija	ugaona brzina



## Tema 2

# Realne (skalarne) funkcije više realnih promenljivih

# Realne funkcije više realnih promenljivih

## Definicija

*Realna funkcija  $n$  realnih promenljivih  $f$  je preslikavanje*

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 1.$$

- U ovom kursu razmatramo slučajeve  $n \geq 2$ .
- Skup  $D$  se naziva domen funkcije.
- Skup slika od  $f$  je  $f(D) = \{f(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in D\}$
- Vrednost funkcije  $f$  u tački  $(x_1, \dots, x_n) \in D$  se zapisuje  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

# Primer - realna funkcija tri realni promenljive

## Primer

Data je funkcija  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ .

- Odrediti domen funkcije  $f$ .
- Odrediti skup slika funkcije  $f$ .
- Izračunati vrednost funkcije  $f$  u tački  $f(1, 2, -3)$ .

## Rešenje.

- $D = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $f(D) = \mathbb{R}$
- $f(1, 2, -3) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -4$

# Primer

## Primer

Data je funkcija  $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 81}$ .

- (1) Odrediti domen funkcije  $f$ .
- (2) Odrediti skup tačka domena u kojima je  $f(x_1, x_2) = 10$ .

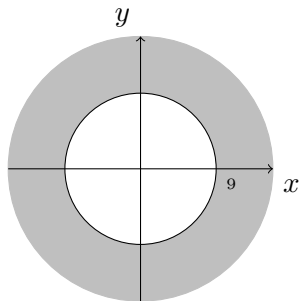
*Rešenje.*

(1) Funkcija je definisana u tačkama u kojima je potkorena vrednost nenegativna:

$$x_1^2 + x_2^2 - 81 \geq 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq 81.$$

Znači,

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \geq 81\}.$$



# Primer

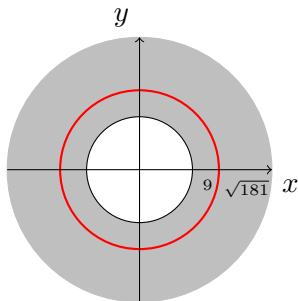
## Primer

Data je funkcija  $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 81$ .

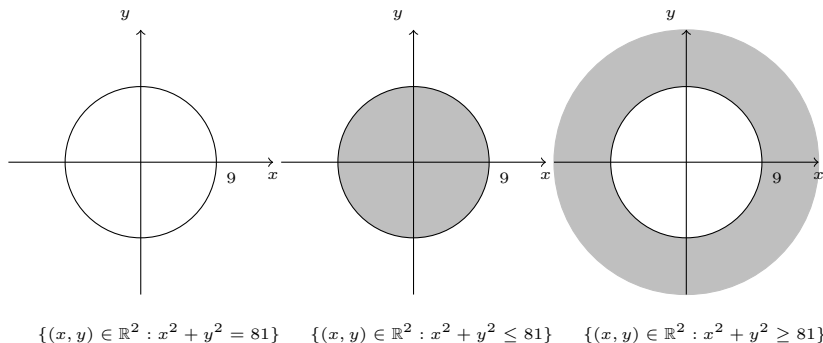
- (1) Odrediti domen funkcije  $f$ .
- (2) Odrediti skup tačka domena u kojima je  $f(x_1, x_2) = 10$ .

Rešenje.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad f(x_1, x_2) = 10 &\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 81 = 10 \\
 &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 81 = 100 \\
 &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 181
 \end{aligned}$$



# Ponavljjanje - krug i kružnica



## Tema 3

# Realne funkcije dve realne promenljive

# Realne funkcije dve realne promenljive

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$



# Grafik funkcije i nivo krive

Grafik funkcije  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  zadate sa  $z = f(x, y)$ :

$$G_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

## Definicija

*Trag* je presek površi  $z = f(x, y)$  i ravni paralelne sa  $xy$ -ravni.

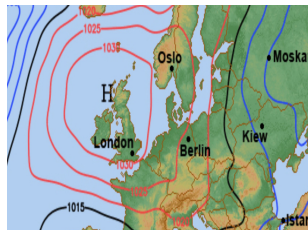
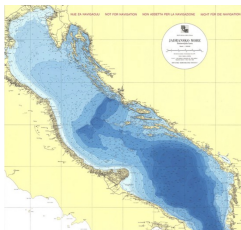
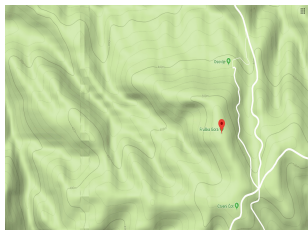
*Nivo kriva* je projekcija traga na  $xy$ -ravan. Znači, za  $c \in f(D)$ , kriva koja odgovara nivou  $c$  je skup tačka sledećeg oblika

$$\{(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}.$$

# Nivo krive - izolinije (geografske karte)

grč. isos = jednak

- izohipse: grč. hypsos = visina
- izobate: grč. batos=dubina
- izobare: grč. baros = težina



# Nivo krive - ravan

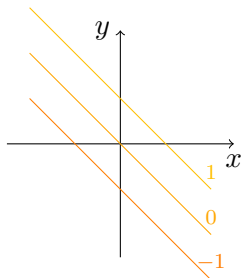
## Primer

Skicirati nivo krive funkcije  $z = x + y$ .

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

$$z = -1 \quad \Rightarrow \quad x + y = -1 \Leftrightarrow y = -1 - x$$

$$z = 1 \quad \Rightarrow \quad x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$$

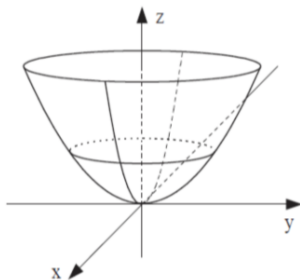


# Nivo krive - kružni paraboloid

## Primer

Skicirati nivo krive funkcije  $z = (x - 1)^2 + (y + 1)^2$ .

Grafik je transliran sledeći kružni paraboloid za vektor  $(1, -1, 0)$ .



# Nivo krive - kružni paraboloid

## Primer

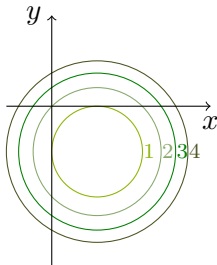
Skicirati nivo krive funkcije  $z = (x - 1)^2 + (y + 1)^2$ .

$$z = 1 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

$$z = 2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$$

$$z = 3 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 3$$

$$z = 4 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

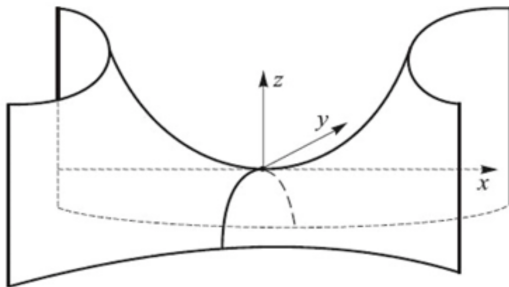


# Nivo krive - hiperbolični paraboloid (sedlo)

## Primer

Skicirati nivo krive funkcije  $z = x^2 - y^2$ .

Grafik je sedlo:



# Nivo krive - hiperbolični paraboloid

## Primer

Skicirati nivo krive funkcije  $z = x^2 - y^2$ .

$$z = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x \vee y = -x$$

$$z = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$$

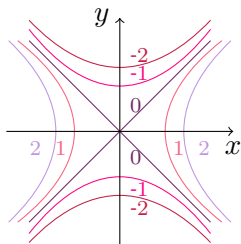
$$z = 2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$$

$$z = -1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$$

$$z = -2 \Rightarrow x^2 - y^2 = -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1$$



## Tema 4

# Granična vrednost i neprekidnost



# Granična vrednost

## Definicija

Kažemo da je  $A \in \mathbb{R}$  *granična vrednost funkcije  $f$  kad  $M$  teži  $M_1$*  ako

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r = r(\epsilon) > 0)(\forall M \in D \setminus \{M_1\})$$

$$d(M, M_1) < r \Rightarrow d(f(x, y), A) < \epsilon$$

*i pišemo*

$$\lim_{M \rightarrow M_1} f(M) = A.$$

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

$M_1$  - tačka nagomilavanja skupa  $D$

# Granična vrednost

## Primer

Neka je

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & , \text{ ako je } (x, y) \neq (2, 5) \\ 1 & , \text{ ako je } (x, y) = (2, 5) \end{cases}$$

Izračunati  $\lim_{M \rightarrow (2,5)} f(M)$ .



Rešenje.

$$\lim_{M \rightarrow M_1} f(M) = 7.$$

# Neprekidnost

## Definicija

*Kažemo da je funkcija  $f$  neprekidna u tački  $M_1$  ako važi*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r = r(\epsilon) > 0)(\forall M \in D)$$

$$d(M, M_1) < r \Rightarrow d(f(M), f(M_1)) < \epsilon$$

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

$M_1$  - unutrašnja tačka skupa  $D$

# Neprekidnost

TRI uslova moraju biti zadovoljena:

$$\lim_{M \rightarrow M_1} f(M) = A$$

$$M_1 \in D$$

$$A = f(M_1)$$

# Neprekidnost

Primer (nije neprekidna)

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & , \text{ ako je } (x, y) \neq (2, 5) \\ 1 & , \text{ ako je } (x, y) = (2, 5) \end{cases}$$

Primer (neprekidna)

$$g(x, y) = \begin{cases} x + y & , \text{ ako je } (x, y) \neq (2, 5) \\ 7 & , \text{ ako je } (x, y) = (2, 5) \end{cases}$$