MATEMATIKA 3

Ivan Prokić
kabinet 117, F blok
prokic@uns.ac.rs
http://imft.ftn.uns.ac.rs/∼iprokic/

Andrea Karalić
kabinet 215, F blok
andrea.karalic@gmail.com

Novi Sad

Slajdove pripremila prof. dr Jovanka Pantović

Tema 1

Diferencijalne jednačine višeg reda

Diferencijalne jednačine višeg reda

$$\boxed{F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0}$$

$$\boxed{y^{(n)} = G\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)}$$

Početni problem:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Snižavanje reda

(1) Jednačina oblika:

$$y^{(n)} = f(x).$$

Direktnom integracijom: $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,\ y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}dx + C_2, \dots$

(2) Jednačina koja ne sadrži funkciju y:

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad \text{gde je} \quad 1 \leq k \leq n.$$

Smenom $y^{(k)}(x) = z(x),\ y^{(k+1)}(x) = z'(x),\ \dots, y^{(n)}(x) = z^{(n-k)}(x)$, dobijamo diferencijalnu jednačinu $n-k$-tog reda.

(3) Jednačina koja ne sadrži promenljivu x:

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Red snižavamo pomoću smene $y'(x) = z(y),\ y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z'z,\ y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d(z'z)}{dy} \cdot z = z''z^2 + (z')^2 z, \dots$

Linearne diferencijalne jednačine reda n

Opšti oblik linearne diferencijalne jednačine reda n je

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = f(x),} \tag{1}$$

gde su f i $a_1, \ldots, a_n$ neprekidne funkcije na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Teorema

Neka su $a_1, \ldots, a_n$ i f neprekidne funkcije nad I, $x_0 \in I$ i $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Tada postoji jedinstveno rešenje y, definisano nad I, diferencijalne jednačine (1), koje zadovoljava početne uslove

$$\boxed{y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.}$$

Homogene linearne diferencijalne jednačine reda n

Opšti oblik homogene linearne diferencijalne jednačine reda n je

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = 0} \tag{2}$$

gde su $a_1, \ldots, a_n$ neprekidne funkcije na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Ako uvedemo operator

$$L_n[y(x)] = y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x)$$

onda je prethodna diferencijalna jednačina oblika

$$L_n[y(x)] = 0.$$

Homogene linearne diferencijalne jednačine reda n

Na osnovu osobina izvoda možemo zaključiti da je operator L_n linearan, što je formulisano sledećom lemom.

Lema

Neka su y_1 i y_2 n puta neprekidno diferencijalbilne funkcije na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada važi

$$L_n\left[C_1 y_1 + C_2 y_2\right] = C_1 L_n\left[y_1\right] + C_2 L_n\left[y_2\right].$$

$$\begin{aligned}
& L_n\left[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\right] \\
= \quad & (C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))^{(n)} + a_1(x)(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))^{(n-1)} + \ldots \\
& + a_n(x)(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) \\
= \quad & C_1\left(y_1^{(n)}(x) + a_1(x) y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) y_1(x)\right) + \\
& C_2\left(y_2^{(n)}(x) + a_1(x) y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) y_2(x)\right) \\
= \quad & C_1 L_n\left[y_1(x)\right] + C_2 L_n\left[y_2(x)\right].
\end{aligned}$$

Homogene linearne diferencijalne jednačine reda n

Teorema

Neka su $y_1, y_2, \ldots, y_k$ rešenja diferencijalne jednačine (2) na nekom intervalu I. Tada je je za sve $C_1, C_2, \ldots, C_k \in \mathbb{R}$ funkcija

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_k y_k(x)$$

rešenje jednačine (2) na I.

Ako su y_1 i y_2 rešenja jednačine (2), onda je

$$L_n[y_1] = 0 \quad \text{i} \quad L_n[y_2] = 0 \ldots \text{ i } \qquad L_n[y_k] = 0.$$

Sada za funkciju $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_k y_k$ važi sledeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} L_n[y(x)] &= L_n[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_k y_k(x)] \\ &= C_1 L_n[y_1(x)] + C_2 L_n[y_2(x)] + \ldots + C_k L_n[y_k(x)] = 0. \end{aligned}$$

Homogene linearne diferencijalne jednačine reda n

Definicija

Funkcije $y_1, \ldots, y_n$ su **linearno nezavisne** *na intervalu I, ako za sve $x \in I$ iz*

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) = 0$$

sledi $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$.

Definicija

Neka je $n \geq 2$ i neka su $y_1, \ldots, y_n$ rešenja jednačine (2)*.* *Determinanta Wronskog (ili Wronskijeva determinanta) rešenja $y_1, \ldots, y_n$ u tački x je*

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & & \ldots & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Homogene linearne diferencijalne jednačine reda n

Teorema

Rešenja jednačine (2) $y_1, \ldots, y_n$ su linearno nezavisna ako i samo ako za svako $x \in I$ važi

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0$$

($\Leftarrow$) Neka je $W(x) \neq 0$ za svako $x \in I$. Pretpostavimo da su $y_1, \ldots, y_n$ linearno zavisna. Tada postoje konstante $C_1, \ldots, C_n$ za koje važi $(C_1, \ldots, C_n) \neq (0, \ldots, 0)$ i za svako $x \in I$ važi

$$\begin{array}{rcrcccrcl}
y_1(x)C_1 & + & y_2(x)C_2 & + & \ldots & + & y_n(x)C_n & = & 0 \\
y_1'(x)C_1 & + & y_2'(x)C_2 & + & \ldots & + & y_n'(x)C_n & = & 0 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \\
y_1^{(n-1)}(x)C_1 & + & y_2^{(n-1)}(x)C_2 & + & \ldots & + & y_n^{(n-1)}(x)C_n & = & 0.
\end{array}$$

Međutim, za svako $x \in I$ prethodni sistem linearnih jednačina ima determinantu $W(x) \neq 0$, što znači da sistem ima jedinstveno rešenje $(C_1, \ldots, C_n) = (0, \ldots, 0)$, što dovodi do kontradikcije. Dakle, naša pretpostavka da su rešenja linearno zavisna nije tačna.

Homogene linearne diferencijalne jednačine reda n

Definicija

Fundamentalni skup rešenja je linearno nezavisan skup od n rešenja jednačine (2), tj. baza vektorskog prostora rešenja jednačine (2).

Teorema

Neka je $\{y_1, \ldots, y_n\}$ fundamentalni skup rešenja jednačine (2). Tada je opšte rešenje y jednačine (2) dato sa

$$\boxed{y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x), \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.}$$

Pretpostavimo je $y(x)$ rešenje diferencijalne jednačine (2) koje zadovoljava početni problem

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Posmatrajmo sada sistem

$$\begin{array}{ccccccccc} C_1y_1(x_0) & + & C_2y_2(x_0) & + & \ldots & + & C_ny_n(x_0) & = & y_0 \\ C_1y_1'(x_0) & + & C_2y_2'(x_0) & + & \ldots & + & C_ny_n'(x_0) & = & y_1 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \ldots & & & \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) & + & C_2y_2^{(n-1)}(x_0) & + & \ldots & + & C_ny_n^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1} \end{array}.$$

Determinanta prethodnog sistema je $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0)$. Kako su $y_1, \ldots, y_n$ linearno nezavisni, važi $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$. U tom slučaju je posmatrani sistem određen i za tako dobijene konstante funkcija $g(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots, C_ny_n(x)$ zadovoljava zadate početne uslove. Zbog jedinstvenosti rešenja zaključujemo da je $y = g$.

Subsection 1

Homogene linearne diferencijalne jednačine reda n sa konstantnim koeficijentima

Homogene linearne diferencijalne jednačine reda n

Opšti oblik homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = 0, \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.} \tag{3}$$

<u>Smena:</u> $y = e^{kx} \Rightarrow y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \ \ldots y^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$

$$k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + \ldots + a_n e^{kx} = 0$$

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \tag{4}$$

Kažemo da je

$$\boxed{k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0}$$

karakteristična jednačina diferencijalne jednačine (3).

Homogene linearne diferencijalne jednačine reda n

Neka su $k_1, \ldots, k_n$ rešenja karakteristične jednačine. Fundamentalni skup rešenja $\{y_1, \ldots, y_n\}$ formiramo na sledeći način:

(1) Ako je k_i realan koren karakteristične jednačine višestrukosti m, $m \geq 1$, onda su funkcije $y_{i_1}, \ldots, y_{i_m}$, definisane sa

$$\begin{array}{lll} y_{i_1} & := & e^{k_i x}, \\ y_{i_2} & := & x e^{k_i x}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{i_m} & := & x^{m-1} e^{k_i x}, \end{array}$$

rešenja jednačine (3).

(2) Ako je $k_i = a + ib$ kompleksni koren karakteristične jednačine višestrukosti m, $m \geq 1$, onda su funkcije $y_{i_1}, \ldots, y_{i_m}, y_{i_{m+1}}, \ldots, y_{2m}$, definisane sa

$$\begin{array}{lllllll} y_{i_1} & := & e^{ax}\cos bx & \qquad & y_{i_{m+1}} & := & e^{ax}\sin bx \\ y_{i_2} & := & x e^{ax}\cos bx & & y_{i_{m+2}} & := & x e^{ax}\sin bx \\ \ldots & & \ldots & & & & \\ y_{i_m} & := & x^{m-1} e^{ax}\cos bx & & y_{i_{2m}} & := & x^{m-1} e^{ax}\sin bx \end{array}$$

rešenja jednačine (3).

Linearna nezavisnost rešenja (za $n = 2$)

(1) Ako su k_1 i k_2 realni i različiti koreni karakteristične jednačine, njima odgovaraju rešenja $y_1 = e^{k_1 x}$ i $y_2 = e^{k_2 x}$. Kako je Vronskijeva determinanta

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = (k_2 - k_1) e^{(k_1 + k_2)x} \neq 0,$$

jer je $k_1 \neq k_2$ i $e^{k_1 k_2 x} > 0$, sledi da su y_1 i y_2 linearno nezavisne.

(2) Ako je $k_1 = k_2$ dvostruki realni koren karakteristične jednačine, rešenja $y_1 = e^{kx}$ i $y_2 = xe^{kx}$ su linearno nezavisna jer je

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & (1 + kx)e^{kx} \end{vmatrix} = e^{2kx} \neq 0.$$

(3) Ako su $k_1 = a + ib$ i $k_2 = a - ib$ kompleksni koreni karakteristične jednačine, rešenja $y_1 = e^{ax} \cos bx$ i $y_2 = e^{ax} \sin bx$ su linearno nezavisna jer je

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{ax} \cos bx & e^{ax} \sin bx \\ e^{ax}(a \cos bx - b \sin bx) & e^{ax}(a \sin bx + b \cos bx) \end{vmatrix} = be^{2ax} \neq 0.$$

Primer

Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' - y' = 0.$

Karakteristična jednačina:

$$k^2 - k = 0 \Leftrightarrow k(k-1) = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0, k_2 = 1.$$

Opšte rešenje:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^x.$$

Primer

Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''' + y = 0.$

Karakteristična jednačina:

$$k^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (k+1)(k^2 - k + 1) = 0 \Leftrightarrow k_1 = -1, k_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Opšte rešenje:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

Primer

Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0.$

Karakteristična jednačina:

$$k^4 + 8k^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow (k^2 + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = 2i, k_{3,4} = -2i.$$

Opšte rešenje:

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 x \sin 2x.$$

Subsection 2

Linearne diferencijalne jednačine reda n sa konstantnim koeficijanetima

Linearne diferencijalne jednačine reda n sa konstantnim koeficijanetima

Opšti oblik linearne diferencijalne jednačine sa kostantnim koeficijentima je

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.} \tag{5}$$

Odgovarajuća homogena diferencijalna jednačina:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0.$$

Rešenje

Teorema

Neka je $y_p(x)$ jedno (partikularno) rešenje jednačine (5). Ako je $y(x)$ rešenje jednačine (5), tada je $y(x) - y_p(x)$ rešenje odgovarajuće homogene tj. postoji rešenje $y_h(x)$ odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine sa osobinom

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Ako su $y_p(x)$ i $y(x)$ rešenja jednačine (5), onda za njih važi

$$\begin{array}{ccccccccc} y^{(n)} & + & a_1 y^{(n-1)} & + & \dots & + & a_n y & = & f(x) \\ y_p^{(n)} & + & a_1 y_p^{(n-1)} & + & \dots & + & a_n y_p & = & f(x) \end{array}$$

Ako od prve jednačine oduzmemo drugu,

$$\begin{array}{ccccccccc} (y - y_p)^{(n)} & + & a_1 (y - y_p)^{(n-1)} & + & \dots & + & a_n (y - y_p) & = & 0 \end{array}$$

odakle je $y(x) - y_p(x)$ rešenje odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine i

$$y_h(x) = y(x) - y_p(x) \Leftrightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Metod varijacije konstanti

Neka je $\{y_1, \ldots, y_n\}$ fundamentalni skup rešenja odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine. Tada je

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$$

opšte rešenje jednačine (5), gde je $(C_1(x), \ldots, C_n(x))$ rešenje sistema jednačina

$$\begin{array}{rcrcccrcr}
y_1(x)C_1'(x) & + & y_2(x)C_2'(x) & + & \ldots & + & y_n(x)C_n'(x) & = & 0 \\
y_1'(x)C_1'(x) & + & y_2'(x)C_2'(x) & + & \ldots & + & y_n'(x)C_n'(x) & = & 0 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \\
y_1^{(n-1)}(x)C_1'(x) & + & y_2^{(n-1)}(x)C_2'(x) & + & \ldots & + & y_n^{(n-1)}(x)C_n'(x) & = & f(x)
\end{array}$$

Primer

Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' - y = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

Odgovarajuća homogena diferencijalna jednačina: $y'' - y = 0$

Karakteristična jednačina: $k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (k+1)(k-1) = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1, k_2 = -1$

Rešenje homogene: $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Primer

Metod varijacije konstanti:

$$\begin{array}{rcrcr} e^xC_1' & + & e^{-x}C_2' & = & 0 \\ e^xC_1' & - & e^{-x}C_2' & = & \frac{1}{1+e^{-x}} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcr} e^xC_1' & + & e^{-x}C_2' & = & 0 \\ 2e^xC_1' & & & = & \frac{1}{1+e^{-x}} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcr} e^xC_1' & + & e^{-x}C_2' & = & 0 \\ C_1' & & & = & \frac{e^{-x}}{2(1+e^{-x})} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcr} e^x\frac{e^{-x}}{2(1+e^{-x})} & + & e^{-x}C_2' & = & 0 \\ C_1 & & & = & \int \frac{e^{-x}}{2(1+e^{-x})}dx \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C_1(x) = \int \frac{e^{-x}}{2(1+e^{-x})}dx = -\frac{1}{2}\ln|1+e^{-x}| + C_1 \\ C_2(x) = -\int \frac{e^{2x}}{2(1+e^{x})}dx = -\frac{1}{2}(e^x+1) + \frac{1}{2}\ln|e^x+1| + C_2. \end{array}$$

Opšte rešenje zadate diferencijalne jednačine je

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\ln|1+e^{-x}| + C_1\right)e^x + \left(-\frac{1}{2}(e^x+1) + \frac{1}{2}\ln|e^x+1| + C_2\right)e^{-x} \\ &= C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}e^x\ln|1+e^{-x}| - \frac{1}{2}(e^{-x}+1) + \frac{1}{2}e^{-x}\ln|e^x+1|. \end{aligned}$$

Subsubsection 1

Metod jednakih koeficijenata

Metod jednakih koeficijenata

$$f(x) = e^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)$$

Tada je partikularno rešenje je oblika

$$y_p(x) = x^l e^{ax}(T(x)\cos bx + R(x)\sin bx),$$

gde su

- T i R polinomi stepena $max\{m, k\}$ sa neodređenim koeficijentima,
- l je višestrukost korena $a + bi$ karakteristične jednačine (ako $a + bi$ nije koren karakteristične jednačine, uzimamo $l = 0$).

Primer

Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''' + 3y'' + 3y' + y = 8e^x$.

Odgovarajuća homogena diferencijalna jednačina: $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

Karakteristična jednačina: $k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k+1)^3 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2,3} = -1$

Rešenje odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine:

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}.$$

Partikularno rešenje:

$$y_p(x) = Ae^x \Rightarrow y_p'(x) = y_p''(x) = y_p'''(x) = Ae^x \Rightarrow 8Ae^x = 8e^x \Leftrightarrow A = 1.$$

Rešenje zadate diferencijalne jednačine:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x} + e^x.$$

Dve funkcije kao slobodni članovi

Teorema

Neka je $L_n[y_1] = f_1(x)$ i $L_n[y_2] = f_2(x)$. Tada je

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

partikularno rešenje jednačine

$$L_n[y] = f_1(x) + f_2(x).$$

Ako je $L_n[y_1] = f_1(x)$ i $L_n[y_2] = f_2(x)$, onda važi

$$\begin{array}{c} y_1^{(n)}(x) + a_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y_1(x) = f_1(x) \\ y_2^{(n)}(x) + a_1(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y_2(x) = f_2(x) \end{array}$$

Sabiranjem prethodnih jednačina (u skraćenom zapisu),

$$\begin{array}{c} (y_1^{(n)} + y_2^{(n)}) + a_1(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)}) + \ldots + a_n(y_1 + y_2) = f_1 + f_2 \\ (y_1 + y_2)^{(n)} + a_1(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + a_n(y_1 + y_2) = f_1 + f_2 \end{array}$$

Primer

Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''' + 2y'' + y' = xe^x + x^2 + 2.$$

Odgovarajuće homogena diferencijalne jednačina: $y''' + 2y'' + y' = 0$

Karakteristična jednačina:
$k^3 + 2k^2 + k = 0 \Leftrightarrow k(k^2 + 2k + 1) = 0 \Leftrightarrow k(k+1)^2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0, k_{2,3} = -1$
Rešenje odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine: $y_h(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$.

Partikularno rešenje: $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$, gde su y_{p_1} i y_{p_2} kao u nastavku. Ako

$$\begin{array}{ll} y_{p_1}(x) = (Ax + B)e^x & y'_{p_1}(x) = (Ax + A + B)e^x \\ y''_{p_1}(x) = (Ax + 2A + B)e^x & y'''_{p_1}(x) = (Ax + 3A + B)e^x \end{array}$$

uvrstimo u jednačinu $y''' + 2y'' + y' = xe^x$

$$(Ax + 3A + B + 2Ax + 4A + 2B + Ax + A + B)e^x = xe^x \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{2}$$

$$y_{p_1}(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right) e^x.$$

Primer

Za drugo partikularno rešenje dobijamo

$$\begin{array}{ll} y_{p_2}(x) = (Ax^2+Bx+C)x & y'_{p_2}(x) = 3Ax^2+2Bx+C \\ y''_{p_2}(x) = 6Ax+2B & y'''_{p_2}(x) = 6A \end{array}$$

i uvrštavanjem u jednačinu

$$y''' + 2y'' + y' = x^2 + 2$$

dobijamo

$$6A + 12Ax + 4B3Ax^2 + 2Bx + C = x^2 + 2 \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{2}, C = 2.$$

Znači,

$$y_{p_2} = x(\frac{1}{3}x^2 + 2).$$

Rešenje zadate diferencijalne jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x} + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right)e^x + \frac{1}{3}x^3 + 2x.$$

Subsection 3

Ojlerova diferencijalna jednačina

Ojlerova diferencijalna jednačina

$$\boxed{(ax+b)^n y^{(n)} + A_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + A_n y = f(x),} \qquad (6)$$

gde su $a, b, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$.

(1) Uvodimo smenu $ax+b=e^t$, odakle je $t=\ln(ax+b)$ i $\frac{dt}{dx}=ae^{-t}$.

(2) Neka je $y(x)=h(t(x))$ i neka je $\dot{h}(t)=\frac{dh}{dt}, \ddot{h}(t)=\frac{d^2h}{dt^2}, \ldots$

(3) Dalje imamo:

$$\begin{array}{rclcl} y'(x) & = & \frac{dh}{dt}\frac{dt}{dx} & = & ae^{-t}\dot{h} \\ y''(x) & = & \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} & = & a^2e^{-2t}(\ddot{h}-\dot{h}) \\ y'''(x) & = & \frac{dy''}{dt}\frac{dt}{dx} & = & a^3e^{-3t}(\dddot{h}-3\ddot{h}+2\dot{h}) \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \end{array}$$

Kada u jednačinu (6) uvedemo ovu smenu, dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu **sa konstantnim koeficijentima** (gde je nepoznata funkcija $h(t)$).