MATEMATIKA 3

Ivan Prokić
kabinet 117, F blok
prokic@uns.ac.rs
http://imft.ftn.uns.ac.rs/∼iprokic/

Andrea Karalić
kabinet 215, F blok
andrea.karalic@gmail.com

Novi Sad

Slajdove pripremila prof. dr Jovanka Pantović

Tema 1

Nesvojstveni integral

Intuicija

Kazemo da je $\int\limits_a^b f(x)dx$ nesvojstveni ako je

- $a = -\infty$ ili $b = \infty$ (ili važe oba uslova) prve vrste
- f nije definisana u jednoj ili više tačaka $x \in [a, b]$ druge vrste
- treće vrste = prve vrste + druge vrste

Primer

1. $\int\limits_0^{\infty} e^{-st} dt$ - prve vrste
2. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{x} dx$ - druge vrste
3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^x}{x} dx$ - treće vrste

Definicija - prve vrste

Definicija

Ako je f integrabilna funkcija na $[a, x]$ za svako $x > a$, onda je

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_{a}^{x} f(t)dt$$

Definicija

Ako je f integrabilna funkcija na $[x, a]$ za svako $x < a$, onda je

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{a} f(t)dt$$

Kažemo da nesvojstveni integral konvergira ako data granična vrednost postoji. U suprotnom, integral divergira.

Definicija - prve vrste

Definicija

Ako je f integrabilna funkcija na $\mathbb{R}$, onda je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{a} f(t)dt + \lim_{x \to \infty} \int_{a}^{x} f(t)dt$$

Kažemo da nesvojstveni integral konvergira ako date granične vrednosti postoje. U suprotnom, integral divergira.

Test za konvergenciju i divergenciju

Neka je $0 \leq f(x) \leq g(x)$ za svako $x \geq a$.

1. $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergira $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ konvergira
2. $\int_a^\infty f(x)dx$ divergira $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx$ divergira

Test za konvergenciju (2)

Teorema

Ako nesvojstveni integral $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ *konvergira, onda nesvojstveni integral* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *konvergira.*

Druge vrste - definicija

Definicija

Neka je f funkcija koja je definisana za $x \in [a, c) \cup (c, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Kažemo da nesvojstveni integral konvergira ako date granične vrednosti postoje. U suprotnom, integral divergira.

Tema 2

Laplasove transformacije

Definicija

Definicija

Neka je $s \in \mathbb{C}$ *i neka je* $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$. *Laplasova transformacija funkcije* f *jeste funkcija (kompleksne promenljive)* F *definisana na sledeći način:*

$$\boxed{F(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \to \infty} \int\limits_0^T e^{-st} f(t) dt,} \qquad (1)$$

Pišemo,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s).$$

Kažemo da Laplasova transformacija postoji ako postoji $s \in \mathbb{C}$ za koji integral (1) konvergira.

Tema 3

Tablične Laplasove transformacije

$f(t) = c, c \in \mathbb{C}$

$$\boxed{F(s) = \tfrac{c}{s}, \qquad Re(s) > 0}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c\} &= \int_0^\infty c \cdot e^{-st} dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T c \cdot e^{-st} dt = \lim_{T\to\infty} \left(-\tfrac{c}{s} e^{-st}\right)\Big|_{t=0}^{t=T} \\ &= \tfrac{c}{s}\left(-\lim_{T\to\infty} e^{-sT} + 1\right) = \tfrac{c}{s}\end{aligned}$$

Za $s = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, važi

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} e^{-sT} &= \lim_{T\to\infty} e^{-(\alpha+i\beta)T} = \lim_{T\to\infty} e^{-\alpha T} e^{-i\beta T} \\ &= \lim_{T\to\infty} e^{-\alpha T}(\cos\beta T - i \sin\beta T) \\ &= \lim_{T\to\infty} e^{-\alpha T} \cos\beta T - i \lim_{T\to\infty} e^{-\alpha T} \sin\beta T.\end{aligned}$$

Granične vrednosti $\lim_{T\to\infty} e^{-\alpha T}\cos\beta T$ i $\lim_{T\to\infty} e^{-\alpha T}\sin\beta T$ postoje za $\alpha > 0$ i tada važi

$$\lim_{T\to\infty} e^{-\alpha T}\cos\beta T = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{T\to\infty} e^{-\alpha T}\sin\beta T = 0.$$

Zašto je $\lim\limits_{T\to\infty} e^{-\alpha T}\sin\beta T = 0$?

$$-1 \leq \sin\beta t \leq 1 \;\Big/ \cdot\, e^{-\alpha T} > 0 \iff \overbrace{-e^{-\alpha T}}^{\to 0} \leq e^{-\alpha T}\sin\beta T \leq \overbrace{e^{-\alpha T}}^{\to 0}$$

$$\boxed{\lim_{T\to\infty}\left(-e^{-\alpha T}\right) = \lim_{T\to\infty} e^{-\alpha T} = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{T\to\infty} e^{-\alpha T}\sin\beta T = 0$$

$f(t) = t^n, n \geq 1$ (indukcijom po n)

$$\boxed{F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad Re(s) > 0.}$$

$\underline{n = 1:}$ Pokazaćemo da je $F(s) = \frac{1}{s^2}$.

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty te^{-st}dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T te^{-st}dt.$$

ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА

$u = t \qquad dv = e^{-st}\,dt$

$du = dt \qquad v = -\frac{1}{s}e^{-st}$

$$\mathcal{L}\{t\} = \lim_{T\to\infty} \left(-\frac{1}{s}te^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big|_{t=0}^{t=T} = \frac{1}{s^2} - \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{s}Te^{-sT} + \frac{1}{s^2}e^{-sT}\right) = \frac{1}{s^2}.$$

$$\lim_{T\to\infty} Te^{-sT} = \lim_{T\to\infty}\frac{T}{e^{sT}} \overset{\text{Л.П.}}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{se^{sT}} = \frac{1}{s}\lim_{T\to\infty} e^{-sT} = 0$$

$$s = \alpha + \beta i \Rightarrow \lim_{T\to\infty} e^{-sT} = \lim_{T\to\infty} e^{-\alpha T}(\cos\beta T + i\sin\beta T) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} e^{-\alpha T}\cos\beta T + i\lim_{T\to\infty} e^{-\alpha T}\sin\beta T = 0 + i\cdot 0 = 0$$

$f(t) = t^n, n \geq 1$ (indukcijom po n)

$\underline{T_{n-1} \Rightarrow T_n}$: Pretpostavimo da je $\mathcal{L}\left\{t^{n-1}\right\} = \frac{(n-1)!}{s^n}$.

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T t^n e^{-st} dt$$

ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА

$u = t^n \qquad dv = e^{-st}\,dt$

$du = nt^{n-1}dt \qquad v = -\frac{1}{s}e^{-st}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} &= \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{s}t^n e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=T} + \frac{n}{s}\int_0^T t^{n-1}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{n}{s}\lim_{T\to\infty}\int_0^T t^{n-1}e^{-st}dt = \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}\left\{t^{n-1}\right\}.
\end{aligned}$$

Prema induktivnoj pretpostavci,

$$F(s) = \frac{n}{s}\cdot\frac{(n-1)!}{s^n} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

$f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{C}$

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{s-a}, \quad Re(s) > Re(a)}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = -\frac{1}{s-a} \lim_{T\to\infty} e^{-(s-a)t}\Big|_{t=0}^{t=T} \\
&= \frac{1}{s-a}\left(1 - \lim_{T\to\infty} e^{-(s-a)T}\right) = \frac{1}{s-a}.
\end{aligned}$$

Ako je $Re(s-a) > 0$, onda je $\lim\limits_{T\to\infty} e^{-(s-a)T} = 0$.

Egzistencija

Definicija

Neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija f eksponencijalnog reda γ kada $t \to \infty$ ako postoje realni brojevi $M > 0$ i γ takvi da za svako $t > a$ važi nejednakost

$$|f(t)| < Me^{\gamma t}$$

Teorema

Ako je funkcija f po delovima neprekidna na svakom zatvorenom intervalu $[0, T]$ i eksponencijalnog reda γ za $t \to \infty$, onda postoji Laplasova transformacija funkcije f.

Dokaz za egzistenciju

Primetimo prvo da važi

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^a e^{-st} f(t)dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Kako je po pretpostavci funkcija f po delovima neprekidna na intervalu $[0, T]$, prvi integral sa desne strane jednakosti postoji. Za drugi integral sa desne strane jednakosti važi:

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty |e^{-st} f(t)|dt &= \int_a^\infty e^{-st}|f(t)|dt \\
&\leq \int_a^\infty e^{-st} M e^{\gamma t} dt = M \lim_{T\to\infty} \int_a^T e^{(\gamma - s)t} dt \\
&= \frac{M}{\gamma - s} \lim_{T\to\infty} e^{(\gamma-s)t}\Big|_{t=0}^{t=T} = \frac{M}{s-\gamma}
\end{aligned}$$

Odatle direktno sledi da za svako $Re(s) > \gamma$ dati integral konvergira, čime smo dokazali da postoji Laplasova transformacija funkcije f.

Osobine - linearnost

Teorema

Neka je $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *i* $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$. *Za sve kompleksne brojeve* a *i* b *važi*

$$\boxed{\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}}.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}(af(t) + bg(t))dt \\
&= a\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt \\
&= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}
\end{aligned}$$

Primer

Primer

Izračunati $\mathcal{L}\left\{\operatorname{ch} at\right\}$ *i* $\mathcal{L}\left\{\operatorname{sh} at\right\}$.

Koristeći Ojlerove formule $\operatorname{ch} at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$ i $\operatorname{sh} at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$, dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\operatorname{sh} at\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\operatorname{ch} at\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} + \mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}.\end{aligned}$$

Primer

Primer

Izračunati $\mathcal{L}\left\{\cos t\right\}$ *i* $\mathcal{L}\left\{\sin t\right\}$.

Koristeći Ojlerovu formulu

$$e^{ti} = \cos t + i \sin t.$$

na osnovu osobine linearnosti, sledi

$$\mathcal{L}\left\{e^{ti}\right\} = \mathcal{L}\left\{\cos t\right\} + i\mathcal{L}\left\{\sin t\right\}.$$

Imajući u vidu da smo po definiciji izveli da je $\mathcal{L}\left\{e^{ti}\right\} = \frac{1}{s-i}$, dobijamo

$$\mathcal{L}\left\{e^{ti}\right\} = \frac{1}{s-i}\frac{s+i}{s+i} = \frac{s+i}{s^2-1} = \frac{s}{s^2+1} + i\frac{1}{s^2+1}.$$

odakle je

$$\mathcal{L}\left\{\cos t\right\} + i\mathcal{L}\left\{\sin t\right\} = \frac{s}{s^2+1} + i\frac{1}{s^2+1}.$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova, dobijamo

$$\mathcal{L}\left\{\cos t\right\} = \frac{s}{s^2+1} \quad \text{i} \quad \mathcal{L}\left\{\sin t\right\} = \frac{1}{s^2+1}.$$

Osobine - sličnost

Teorema

Neka je $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *i* $a \in \mathbb{R}^+$. *Tada je*

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(at)\} = \tfrac{1}{a}F\left(\tfrac{s}{a}\right).}$$

Smena: $u = at \Rightarrow du = adt$

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u)du = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Primer

Primer

Naći Laplasovu transformaciju funkcije $\mathcal{L}\{\sin(at)\}$.

Neka je $F(s) = \mathcal{L}\{\sin t\}$, tj. $F(s) = \frac{1}{1+s^2}$. Tada je

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \frac{1}{1 + (\frac{s}{a})^2} = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

Osobine - translacija

Teorema

Neka je $h(t) = \begin{cases} f(t-a) & , t \geq a \\ 0 & , 0 \leq t < a. \end{cases}$ *gde je* f *funkcija sa osobinom* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. *Tada je*

$$\boxed{\mathcal{L}\{h(t)\} = e^{-as}F(s).}$$

Uvodjenjem smene $u = t - a$, dobijamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{h(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}h(t)dt = \int_0^a e^{-st}h(t)dt + \int_a^\infty e^{-st}h(t)dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt = \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)du \\ &= e^{-sa}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du = e^{-sa}F(s). \end{aligned}$$

Primer

Primer

Odrediti Laplasovu transformaciju funkcije

$$h(t) = \begin{cases} (t-3)^2 & , t \geq 3 \\ 0 & , 0 \leq t < 3. \end{cases}$$

$$H(s) = \mathcal{L}\left\{(t-3)^2\right\} = e^{-3s}\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = e^{-3s}\frac{2}{s^3}$$

Osobine - prigušenje

Teorema

Neka je $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. *Tada je*

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a), \quad a \in \mathbb{C}}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a)$$

Primer

Primer

Odrediti Laplasovu transformaciju funkcije $f(t) = e^{-2t}\sin 3t$.

Kako za $f(t) = \sin 3t$ važi

$$F(s) = \mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2+9},$$

dobijamo

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 3t\} = F(s+2) = \frac{3}{(s+2)^2+9} = \frac{3}{s^2+4s+13}$$

Osobine - diferenciranje originala (a)

Teorema

Neka je $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$.

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = sF(s) - f(0)}$$

Koristeći parcijalnu integraciju, sa $u = e^{-st}$, $dv = f'(t)dt$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} &= \int\limits_0^{\infty} e^{-st} f'(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^{T} e^{-st} f'(t)dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \left(e^{-st} f(t)\big|_{t=0}^{t=T} + s \int\limits_0^{T} e^{-st} f(t)dt \right) \\
&= \lim_{T\to\infty} e^{-sT} f(T) - f(0) + s \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^{T} e^{-st} f(t)dt \\
&= sF(s) - f(0).
\end{aligned}$$

Osobine - diferenciranje originala

Teorema

Neka je $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

$$\boxed{\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\
&= s(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)) - f'(0) \\
&= s^2F(s) - sf(0) - f'(0).
\end{aligned}$$

Osobine - diferenciranje originala

Teorema

Neka je $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$.

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), n \geq 1.}$$

Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom po n. Baza indukcije je urađena pod (a). Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n-1$. Koristeći rezultat pod (a) i induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} &= s\mathcal{L}\left\{f^{(n-1)}(t)\right\} - f^{(n-1)}(0) \\
&= s\left(s^{n-1}F(s) - s^{n-2}f(0) - \ldots - f^{n-2}(0)\right) - f^{(n-1)}(0) \\
&= s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{n-2}(0) - f^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

Primer

Primer

Odrediti Laplasovu transformaciju funkcije $f(t) = \cos at$.

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}\left\{\cos at\right\} &= \mathcal{L}\left\{\left(\frac{1}{a}\sin at\right)'\right\} = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left\{(\sin at)'\right\} \\ &= \frac{1}{a}\left(s\frac{a}{s^2+a^2} - 0\right) = \frac{s}{s^2+a^2}. \end{aligned}$$

Osobine - diferenciranje slike (a)

Teorema

Neka je $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$. *Tada je*

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{tf(t)\right\} = -F'(s),}$$

(a) Ako posmatramo izvod slike,

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}f(t)dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt = -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt = -\mathcal{L}\left\{tf(t)\right\}. \end{aligned}$$

Osobine - diferenciranje slike (b)

Teorema

Neka je $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. *Tada je*

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s),\ n \geq 1.}$$

(b) Dokaz ćemo izvesti primenom matematičke indukcije po n. Baza indukcije je rezultat pod (a). Pretpostavimo da je $\mathcal{L}\left\{t^{n-1} f(t)\right\} = (-1)^{n-1} F^{(n-1)}(s)$. Koristeći rezultat pod (a) i induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n f(t)\} &= -\frac{\partial}{\partial s}\left(\mathcal{L}\left\{t^{n-1} f(t)\right\}\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial s}\left((-1)^{n-1} F^{(n-1)}(s)\right) = (-1)^n F^{(n)}(s).
\end{aligned}$$

Primer

Primer

Odrediti Laplasovu transformaciju funkcije $f(t) = te^t$.

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{te^t\right\} = -(\mathcal{L}\left\{e^t\right\})' = -\left(\frac{1}{s-1}\right) = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Osobine - integracija originala

Teorema

Neka je $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$.

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^t f(x)dx\right\} = \frac{1}{s}F(s)}$$

Neka je $h(t) = \int\limits_0^t f(x)dx$. Tada je $h'(t) = f(t)$ i $h(0) = 0$. Primenjujući Laplasovu transformaciju, dobijamo

$$\mathcal{L}\left\{h'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{h(t)\right\} - h(0) = s\mathcal{L}\left\{h(t)\right\} = F(s).$$

Odatle je

$$\mathcal{L}\left\{h(t)\right\} = \frac{F(s)}{s},$$

odnosno

$$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^t f(x)dx\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

Primer

Primer

Odrediti Laplasovu transformaciju funkcije $f(t) = \int\limits_0^t \sin u du$.

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{\int\limits_0^t \sin u du\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\sin t\right\} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$