MATEMATIKA 3

Ivan Prokić
kabinet 117, F blok
prokic@uns.ac.rs
http://imft.ftn.uns.ac.rs/∼iprokic/

Andrea Karalić
kabinet 215, F blok
andrea.karalic@gmail.com

Novi Sad

Slajdove pripremila prof. dr Jovanka Pantović

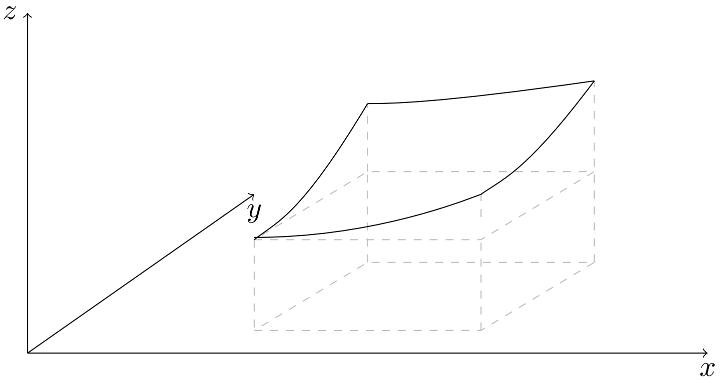
Tema 1

Diferencijalni račun funkcije dve promenljive

Realne funkcije dve realne promenljive

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

Realne funkcije dve realne promenljive



Parcijalni izvodi prvog reda

Neka je (x_1, y_1) unutrašnja tačka skupa D.

Definicija

Ako postoji granična vrednost

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x, y_1) - f(x_1, y_1)}{\Delta x}}$$

onda tu graničnu vrednost nazivamo parcijalni izvod prvog reda funkcije f po promenljivoj x u tački (x_1, y_1) i označavamo je sa

$$\frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial x} \quad \textit{ili} \quad f_x(x_1, y_1).$$

Parcijalni izvodi prvog reda - primer

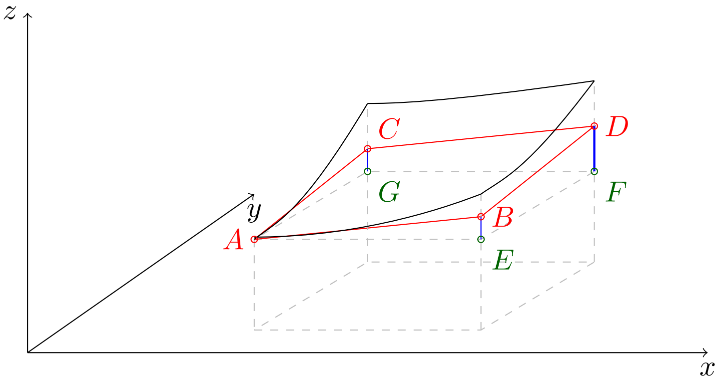
Primer

Neka je $z = x^2 - 3y^3$. *Odrediti, po definiciji, parcijalne izvode prvog reda funkcije* z *u tački* $(1, 1)$.

Rešenje. Primenom definicije dobijamo sledeće:

$$z_x(1,1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 3 - 1 + 3}{\Delta x} = 2$$

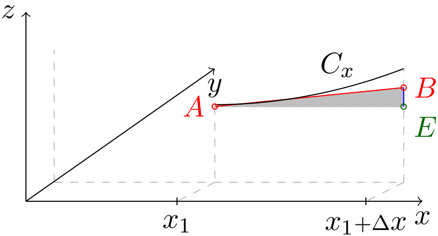
Realne funkcije dve realne promenljive



Parcijalni izvodi 1. reda - geometrijska interpretacija

$(x_1, y_1) \in D$

$C_x = \{(x, y, z) : y = y_1, z = f(x, y), (x, y) \in D\}$



$$\text{tg}(\angle EAB) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_1, y_1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_1, y_1) = \frac{BE}{\Delta x}$$

$$BE = \frac{\partial z}{\partial x}(x_1, y_1) \cdot \Delta x$$

Parcijalni izvodi prvog reda

Neka je (x_1, y_1) unutrašnja tačka skupa D.

Definicija

Ako postoji

$$\boxed{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_1, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1)}{\Delta y}}$$

onda tu graničnu vrednost nazivamo parcijalni izvod prvog reda funkcije f po promenljivoj y u tački (x_1, y_1) i označavamo je sa

$$\frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial y} \quad \textit{ili} \quad f_y(x_1, y_1).$$

Parcijalni izvodi prvog reda - primer

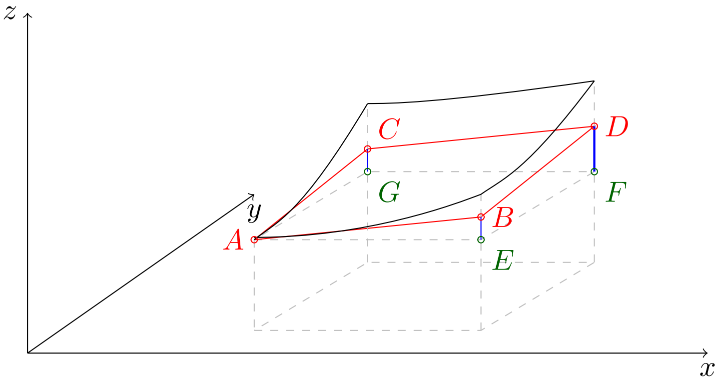
Primer

Neka je $z = x^2 - 3y^3$. Odrediti, po definiciji, parcijalne izvode prvog reda funkcije z u tački $(1,1)$.

Rešenje. Primenom definicije dobijamo sledeće:

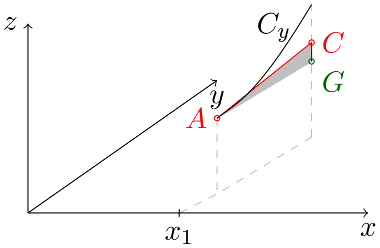
$$z_y(1,1) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1 - 3(1+\Delta y)^3 - 1 + 3}{\Delta x} = -9$$

Parcijalni izvodi 1. reda - geometrijska interpretacija



Parcijalni izvodi 1. reda - geometrijska interpretacija

$(x_1, y_1) \in D$
$C_y = \{(x, y, z) : x = x_1, z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$



$$\mathrm{tg}(\angle GAC) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_1, y_1)$$

$$GC = \frac{\partial z}{\partial y}(x_1, y_1) \cdot \Delta y$$

Izvod u pravcu

Definicija

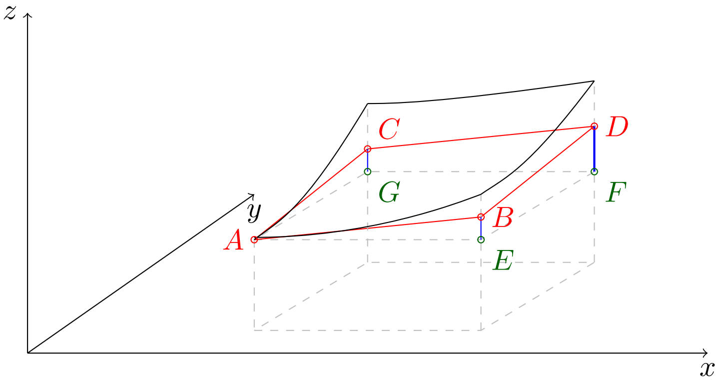
Neka je $z = f(x, y)$ i neka je $\vec{s}_0 = (s_1, s_2)$ jedinični vektor.
Izvod funkcije z u pravcu vektora $\vec{s}_0$ u tački (x_1, y_1) je

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{s}_0}(x_1, y_1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1 + ts_1, y_1 + ts_2) - f(x_1, y_1)}{t}}$$

Specijalni slučajevi:

- Ako je $\vec{s}_0 = (1, 0)$, onda je $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}_0}(x_1, y_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1)$.
- Ako je $\vec{s}_0 = (0, 1)$, onda je $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}_0}(x_1, y_1) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1)$.

Izvod u pravcu - geometrijska interpretacija



Totalni diferencijal prvog reda

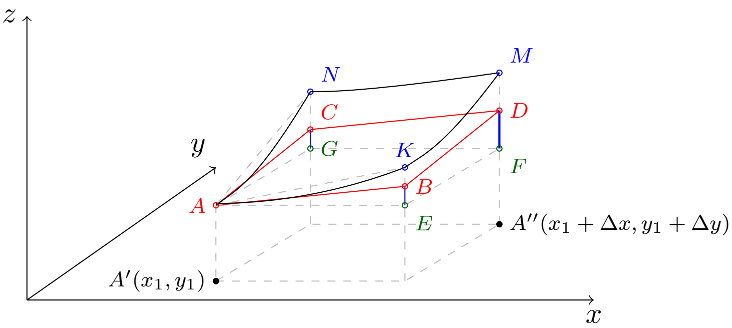
Ako je $(dx, dy) \neq (0,0)$, onda su $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ koplanarni.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (AE, 0, EB) = (dx, 0, z_x dx) \\
\overrightarrow{AC} &= (0, AG, GC) = (0, dy, z_y dy) \\
\overrightarrow{AD} &= (AE, EF, FD) = (dx, dy, FD)
\end{aligned}$$

Tada važi:

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} dx & 0 & z_x dx \\ 0 & dy & z_y dy \\ dx & dy & FD \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad FD = z_x dx + z_y dy \\
&\Leftrightarrow \quad FD = dz
\end{aligned}$$

Totalni diferencijal prvog reda



$$
\begin{aligned}
DF &= dz = z_x(A')dx + z_y(A')dy \quad (dx = \Delta x, dy = \Delta y)\\
MF &= \Delta z(A') = z(A'') - z(A') = z(x_1+\Delta x, y_1+\Delta y) - z(x_1, y_1)\\
EB &= z_x(A')dx\\
GC &= z_y(A')dy
\end{aligned}
$$

Totalni diferencijal prvog reda

Teorema

Neka su $P = P(x, y)$ *i* $Q = Q(x, y)$ *funkcije dve promenljive čiji parcijalni izvodi prvog reda* $P_y(x, y)$ *i* $Q_x(x, y)$ *su neprekidne funkcije na* D. *Tada postoji funkcija* $z = f(x, y)$ *čiji totalni diferencijal je*

$$dz(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

ako i samo ako važi

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y)$$

za sve $(x, y) \in D$.

($\Rightarrow$) Ako je $f_x(x, y) = P(x, y)$ i $f_y(x, y) = Q(x, y)$, tada je

$$P_y(x, y) = f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = Q_x(x, y).$$

Totalni diferencijal prvog reda

Primer

Odrediti funkciju $z = f(x, y)$ *čiji totalni diferencijal je oblika*
$$dz(x, y) = \left(6xy^3 + 5\right) dx + \left(9x^2y^2 + 6\right) dy.$$

Neka je $P(x, y) = 6xy^3 + 5$ i $Q(x, y) = 9x^2y^2 + 6$.

$$P_y(x, y) = 18xy^2 = Q_x(x, y) \Rightarrow \text{postoji takva funkcija z}$$

$$f_x(x, y) = 6xy^3 + 5$$
$$f(x, y) = 3x^2y^3 + 5x + \varphi(y)$$
$$f_y(x, y) = 9x^2y^2 + \varphi'(y)$$

$$f_y(x, y) = 9x^2y^2 + 6$$

$$9x^2y^2 + \varphi'(y) = 9x^2y^2 + 6$$
$$\varphi'(y) = 6$$
$$\varphi(y) = 6y + C$$

$$\boxed{f(x, y) = 3x^2y^3 + 5x + 6y + C.}$$

Totalni diferencijal prvog reda

Primer

Pod pretpostavkom da je $dz \approx \Delta z$, *približno izračunati vrednost*

$$\sqrt[3]{1.9 + 25.02}.$$

Posmatraćemo: $z = \sqrt[3]{x+y}$, $A(2, 25)$, $\Delta x = -0.1$, $\Delta y = 0.02$.

$$\begin{array}{ll} dz(2,25) \approx \Delta z(2,25) & \Rightarrow \\ dz(2,25) \approx z(2 + (-0.1), 25 + 0.02) - z(2,25) & \Rightarrow \\ z(1.9, 25.02) \approx z(2,25) + dz(2,25) & \end{array}$$

$$\boxed{\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x,y)}$$

Totalni diferencijal prvog reda

Primer

Pod pretpostavkom da je $dz \approx \Delta z$, približno izračunati vrednost $\sqrt[3]{1.9 + 25.02}$.

$z = \sqrt[3]{x+y}, \Delta x = -0.1, \Delta y = 0.02$

$$z_x = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+y)^2}}, z_y = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+y)^2}}$$

$$\begin{aligned} dz(2,25) &= z_x(2,25)dx + z_y(2,25)dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} \cdot (-0.1) + \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} \cdot (0.02) \\ &= \frac{1}{27} \cdot (-0.1) + \frac{1}{27} \cdot (0.02) = -\frac{10}{2700} + \frac{2}{2700} = -\frac{8}{2700} \end{aligned}$$

$$\boxed{z(1.9, 25.2) \approx z(2,25) + dz(2,25) = \sqrt[3]{2+25} - \frac{8}{2700} = 3 - \frac{8}{2700} \approx 2.997}$$

Tema 2

Parcijalni izvodi i totalni diferencijali višeg reda

Parcijalni izvodi višeg reda

Definicija

Ako postoje parcijalni izvodi prvog reda funkcija $\frac{\partial f}{\partial x}$ *i* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *na otvorenom skupu* D*, onda te izvode nazivamo drugi parcijalni izvodi i označavamo* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ *(ili* f_{xx}*),* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *(*f_{yx}*),* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *(ili* f_{yy}*) i* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *(ili* f_{xy}*). Važi*

$$\boxed{\begin{array}{lclclcl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) & \quad & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & = & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & = & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) & \quad & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & = & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \end{array}}$$

Mešoviti parcijalni izvodi

Teorema

Parcijalni izvodi višeg reda Ako postoje drugi mešoviti parcijalni izvodi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *i* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *u nekoj okolini tačke* (x_1, y_1) *i neprekidni su u tački* (x_1, y_1), *onda su oni i jednaki u toj tački, tj. važi*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_1, y_1).$$

Parcijalni izvodi drugog reda - primer

Primer

Neka je $z = x^3y^2 - 3x + xy^4$. *Odrediti*

$$z_{xx}(1,1), z_{xy}(1,1), z_{yx}(1,1) \text{ i } z_{yy}(1,1).$$

$$\begin{array}{ll} z_x = 3x^2y^2 - 3 + y^4 & z_y = 2x^3y + 4xy^3 \\ z_x(1,1) = 1 & z_y(1,1) = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} z_{xx} = 6xy^2 & z_{xy} = 6x^2y + 4y^3 & z_{yx} = 6x^2y + 4y^3 & z_{yy} = 2x^3 + 12xy^2 \\ z_{xx}(1,1) = 6 & z_{xy}(1,1) = 10 & z_{yx}(1,1) = 10 & z_{yy} = 14 \end{array}$$

Heseova matrica:

$$\boxed{H(f(1,1)) = \begin{bmatrix} z_{xx}(1,1) & z_{yx}(1,1) \\ z_{xy}(1,1) & z_{yy}(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}}$$

Totalni diferencijal drugog reda

Uvedimo oznake:

$$dx^2 = (dx)^2 = (dx)(dx) \qquad dy^2 = (dy)^2 = (dy)(dy).$$

Ako su parcijalni izvodi drugog reda neprekidni u okolini (x, y), tada je

$$\begin{aligned} d^2 f(x,y) &= d(df) = d(f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy) \\ &= (f_{xx}(x,y)dx + f_{yx}(x,y)dy)dx \\ &+ (f_{xy}(x,y)dx + f_{yy}(x,y)dy)dy \\ &= f_{xx}(x,y)dx^2 + 2f_{xy}(x,y)dxdy + f_{yy}(x,y)dy^2 \end{aligned}$$

Simbolički,

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f.$$

Totalni diferencijal višeg reda

Slično se dobija i totalni diferencijal reda n ($n \geq 2$):

$$d^n f = \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^n f.$$

Primer

Koristimo: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\begin{aligned}
d^3 f &= \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^3 f \\
&= \left(\frac{\partial^3}{(\partial x)^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^2}{(\partial x)^2}(dx)^2\frac{\partial}{\partial y}dy + 3\frac{\partial}{\partial x}dx\frac{\partial^2}{(\partial y)^2}(dy)^2 + \frac{\partial^3}{(\partial y)^3}(dy)^3\right) f \\
&= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx^2dy + 3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3 \\
&= f_{xxx}dx^3 + 3f_{yxx}dx^2dy + 3f_{yyx}dxdy^2 + f_{yyy}dy^3
\end{aligned}$$

Totalni diferencijali višeg reda - primer

Primer

Neka je $z = x^3y^2 - 3x + xy^4$. *Odrediti* $dz(1,1)$ *i* $d^2z(1,1)$.

$$\begin{array}{ll} z_x = 3x^2y^2 - 3 + y^4 & z_y = 2x^3y + 4xy^3 \\ z_x(1,1) = 1 & z_y(1,1) = 6 \end{array}$$

$$\boxed{dz(1,1) = z_x(1,1)dx + z_y(1,1)dy = dx + 6dy.}$$

$$\begin{array}{lll} z_{xx} = 6xy^2 & z_{xy} = 6x^2y + 4y^3 & z_{yy} = 2x^3 + 12xy^2 \\ z_{xx}(1,1) = 6 & z_{xy}(1,1) = 10 & z_{yy} = 14 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} d^2z(1,1) & = & z_{xx}(1,1)dx^2 + 2z_{xy}(1,1)dxdy + z_{yy}(1,1)dy^2 \\ & = & 6dx^2 + 20dxdy + 14dy^2. \end{array}}$$