MATEMATIKA 3

Ivan Prokić
kabinet 117, F blok
prokic@uns.ac.rs
http://imft.ftn.uns.ac.rs/∼iprokic/

Andrea Karalić
kabinet 215, F blok
andrea.karalic@gmail.com

Novi Sad

Slajdove pripremila prof. dr Jovanka Pantović

Tema 1

Realne funkcije više realnih promenljivih
- neka uopštenja -

Realne funkcije više realne promenljive

$$z = f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 2$$

Realne funkcije više realnih promenljivih - parcijalni izvodi

Neka je $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. Parcijali izvod prvog reda po x_i, $1 \leq i \leq n$, definisan je sa

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Tako dobijamo

$$f_{x_1}, \ldots, f_{x_n} \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Realne funkcije više realnih promenljivih - totalni diferencijal

Neka je $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ diferencijabilna na D. Tada je totalni diferencijal prvog reda funkcije z

$$dz = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \ldots + f_{x_n} dx_n.$$

Realne funkcije više realnih promenljivih

Primer

Odrediti parcijalne izvode i totalni diferencijal prvog reda funkcije $u = 4x^5y^2z + 4x - 5y^2z + xz.$

$$\begin{aligned} u_x &= 20x^4y^2z + 4 + z \\ u_y &= 8x^5yz - 10yz \\ u_z &= 4x^5y^2 - 5y^2 + x \end{aligned}$$

$$du = (20x^4y^2z + 4 + z)dx + (8x^5yz - 10yz)dy + (4x^5y^2 - 5y^2 + x)dz$$

Realne funkcije više realnih promenljivih

Neka je $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $d\vec{x} = (dx_1, \ldots, dx_n)$.
Uvedimo simboličku oznaku

$$\boxed{\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)}$$

Tada je gradijent od u, u iznaci $\texttt{grad}\,u$ ili ∇u,

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

i dalje je

$$\begin{aligned} du &= u_{x_1} dx_1 + u_{x_2} dx_2 + \ldots + u_{x_n} dx_n \\ &= (u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}) \cdot (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) \\ &= \nabla u \cdot d\vec{x} \end{aligned}$$

Tema 2

Izvod složene funkcije

Izvod složene funkcije

Teorema

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ *(tj.* $f : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*) diferencijabilna i*

$$x = x(t), y = y(t), \quad t \in D \subseteq \mathbb{R}, \quad (x, y) : D \to D_1.$$

Tada važi lančano pravilo

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Izvod složene funkcije

Primer

Odrediti prvi izvod funkcije $z(t) = \sqrt{e^{2t} + \sin t} + e^t + 2\sin t$

Uvedimo smenu $x(t) = e^t$ i $y(t) = \sin t$. Tada je

$$z(t) = \sqrt{(x(t))^2 + y(t)} + x(t) + 2y(t).$$

Primenom lančanog pravila, dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{x(t)}{\sqrt{(x(t))^2+y(t)}} + 1 & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{2\sqrt{(x(t))^2+y(t)}} + 2 \\ \frac{dx}{dt} &= e^t & \frac{dy}{dt} &= \cos t \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{x(t)}{\sqrt{(x(t))^2+y(t)}} + 1\right) \cdot e^t + \left(\frac{1}{2\sqrt{(x(t))^2+y(t)}} + 2\right) \cdot \cos t$$

Izvod složene funkcije

Teorema

Neka je funkcija $z = f(u,v)$, $(u,v) \in D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ *i*

$$(u,v) : D \to D_1, D \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y)$$

Ako f *ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda po* u *i* v, *a* u *i* v *imaju parcijalne izvode prvog reda po* x *i* y, *tada važi*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Izvod složene funkcije

Primer

Neka je data funkcija $z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$, *gde je*

$$x(u,v) = \frac{u^2-v^2}{2} \qquad y(u,v) = uv.$$

Odrediti z_u *i* z_v.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial z}{\partial y} = y \quad \frac{\partial x}{\partial u} = u \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -v \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= 2x(u,v)\cdot u + y(u,v)\cdot v = 2\cdot\frac{u^2-v^2}{2}\cdot u + uv^2 = u^3 \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= 2x(u,v)\cdot(-v) + y(u,v)\cdot u = 2\cdot\frac{u^2-v^2}{2}\cdot(-v) + u^2v = v^3 \end{aligned}$$

Izvod složene funkcije

Primer

Neka je data funkcija $z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$, *gde je*

$$x(u,v) = \frac{u^2-v^2}{2} \qquad y(u,v) = uv.$$

Odrediti z_u *i* z_v.

Ako zamenimo izraze koji definišu funkcije x i y u izraz za z, dobijamo

$$z(u,v) = \frac{(u^2-v^2)^2}{4} + \frac{1}{2}u^2v^2 = \frac{1}{4}(u^4+v^4).$$

Sada je

$$z_u(u,v) = u^3 \quad \text{i} \quad z_v(u,v) = v^3.$$

Tema 3

Izvod implicitno zadate funkcije

Izvod implicitno zadate funkcije

Neka je $F : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Kažemo da je jednačinom

$$\boxed{F(x, y, z) = 0}$$

implicitno zadata funkcija $z = f(x, y)$ ako je z jedinstvena funkcija sa osobinom da za svaki element (x, y) nekog skupa $\emptyset \neq D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ važi

$$F(x, y, z(x, y)) = 0 \text{ i } (x, y, z(x, y)) \in D.$$

Izvod implicitno zadate funkcije

Teorema

Neka je funkcija $z = f(x,y)$ *data implicitno jednačinom*

$$F(x,y,z) = 0$$

za koju postoje parcijalni izvodi F_x, F_y, F_z *i važi* $F_z(x_1,y_1,f(x_1,y_1)) \neq 0$ *za svako* $(x_1,y_1) \in D_1$ *Tada je*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,y_1) = -\frac{F_x(x_1,y_1,z_1)}{F_z(x_1,y_1,z_1)} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_1) = -\frac{F_y(x_1,y_1,z_1)}{F_z(x_1,y_1,z_1)}}$$

$(z_1 = f(x_1,y_1))$

Izvod implicitno zadate funkcije

Ako je $F(x, y, z) = 0$ onda je $dF(x, y, z) = 0$. U jednačinu

$$dF = 0 \quad \text{tj.} \quad F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$$

uvrstimo

$$dz = f_x dx + f_y dy.$$

Tako dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned} & F_x dx + F_y dy + F_z(f_x dx + f_y dy) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (F_x + F_z f_x)dx + (F_y + F_z f_y)dy = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & F_x + F_z f_x = 0 \wedge F_y + F_z f_y = 0 \end{aligned}$$

Za $F_z(x_1, y_1, z(x_1, y_1)) \neq 0$,

$$f_x(x_1, y_1) = -\frac{F_x(x_1, y_1, z_1)}{F_z(x_1, y_1, z_1)}, \quad f_y(x_1, y_1) = -\frac{F_y(x_1, y_1, z_1)}{F_z(x_1, y_1, z_1)}.$$

Izvod implicitno zadate funkcije

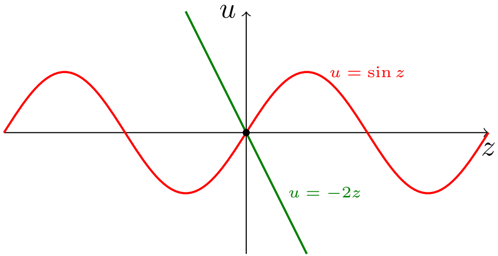
Primer

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ *data implicitno jednačinom*

$$x^2y + 2x^2yz + \sin z - 1 = 0.$$

Izračunati $z_x(1, 1)$ *i* $z_y(1, 1)$.

Za $x = y = 1 : 2z + \sin z = 0 \Leftrightarrow \sin z = -2z \Leftrightarrow z = 0.$



Izvod implicitno zadate funkcije

Primer

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ *data implicitno jednačinom*

$$x^2y + 2x^2yz + \sin z - 1 = 0.$$

Izračunati $z_x(1, 1)$ *i* $z_y(1, 1)$.

Diferenciranjem zadate jednačine po x i po y,

$$2xy+4xyz+2x^2yz_x+z_x\cos z = 0 \quad \text{i} \quad x^2+2x^2z+2x^2yz_y+z_y\cos z = 0.$$

$$z_x = -\frac{2xy + 4xyz}{2x^2y + \cos z} \qquad \text{i} \qquad z_y = -\frac{x^2 + 2x^2z}{2x^2y + \cos z}$$

$$z_x(1, 1) = -\frac{2}{3} \qquad \text{i} \qquad z_y(1, 1) = -\frac{1}{3}.$$