MATEMATIKA 3

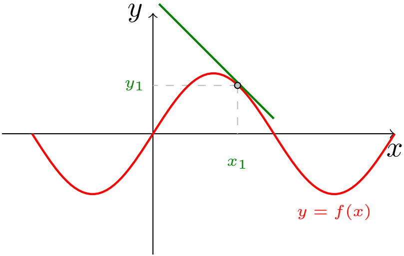
Ivan Prokić
kabinet 117, F blok
prokic@uns.ac.rs
http://imft.ftn.uns.ac.rs/∼iprokic/

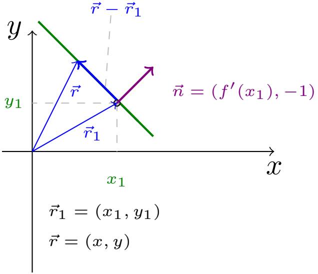
Andrea Karalić
kabinet 215, F blok
andrea.karalic@gmail.com

Novi Sad

Slajdove pripremila prof. dr Jovanka Pantović

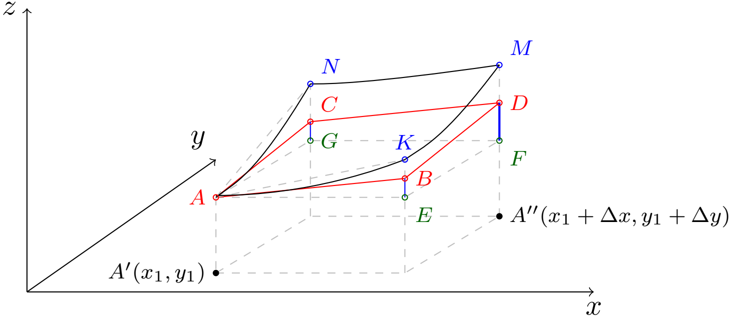
Jednačina tangente na krivu (podsetnik)





$$
\begin{aligned}
t : y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1) \quad &\Leftrightarrow \quad t : y = f'(x_1)(x - x_1) + y_1 \\
&\Leftrightarrow \quad t : f'(x_1)(x - x_1) - (y - y_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t : (f'(x_1), -1) \cdot (x - x_1, y - y_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t : \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t : \vec{n} \perp (\vec{r} - \vec{r}_1)
\end{aligned}
$$

Vektor nomale tangetne ravni



$$\overrightarrow{AB} = (dx, 0, f_x dx) \qquad \overrightarrow{AC} = (0, dy, f_y dy)$$

$$\vec{n} \parallel \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & f_x dx \\ 0 & dy & f_y dy \end{vmatrix} = -dxdy(f_x, f_y, -1)$$

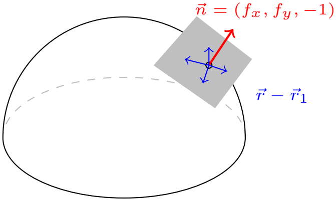
Odatle je vektor normale tangetne ravni $\vec{n} = (f_x, f_y, -1)$.

Jednačina tangentne ravni na površ (eksplicitno)

Odrediti jednačinu tangentne ravni površi

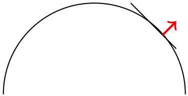
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y), (x,y) \in D\}$$

u tački (x_1, y_1, z_1), gde je $z_1 = f(x_1, y_1)$.



Jednačina ravni koja sadrži tačku $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ je oblika

$$\begin{aligned}
\alpha : \vec{n} \perp (\vec{r} - \vec{r}_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha : \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha : (f_x, f_y, -1) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha : f_x(x - x_1) + f_y(y - y_1) - (z - z_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha : z = f_x(x - x_1) + f_y(y - y_1) + z_1
\end{aligned}$$



$$\boxed{\alpha : z - z_1 = f_x(x_1, y_1)(x - x_1) + f_y(x_1, y_1)(y - y_1)}$$

Primer

Primer

Odrediti jednačinu tangentne ravni površi date jednačinom $z = x^4 + xy + y^2 - 19$ *u tački* $(-2, 3)$.

Vrednost z u $(-2, 3)$:

$$z = x^4 + xy + y^2 - 19 \Rightarrow z(-2,3) = (-2)^4 + (-2) \cdot 3 + 3^2 - 19 = 16 - 6 + 9 - 19 = 0$$

Parcijalni izvodi prvog reda:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$$

Vektor normale:

$$\vec{n} = (f_x(-2,3), f_y(-2,3), -1) = (4 \cdot (-2)^3 + 3, (-2) + 2 \cdot 3, -1) = (-29, 4, -1)$$

$$\alpha : -29(x-2) + 4(y+3) - (z - z_1) = 0 \Leftrightarrow -29x + 4y - z + 70 = 0$$

Jednačina tangentne ravni - implicitno

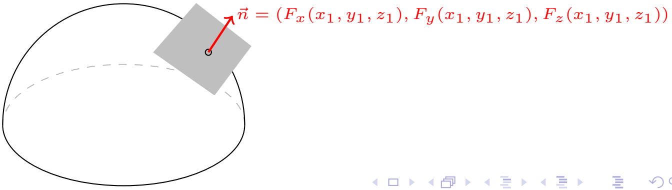
Odrediti jednačinu tangentne ravni površi površi zadate implicitno

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$$

u tački (x_1, y_1, z_1), gde je $z_1 = f(x_1, y_1)$ i $F_z(x_1, y_1, z_1) \neq 0$.

$$\begin{aligned} & z - z_1 = f_x(x_1, y_1)(x - x_1) + f_y(x_1, y_1)(y - y_1) \\ \Leftrightarrow \quad & z - z_1 = -\frac{F_x(x_1, y_1, z_1)}{F_z(x_1, y_1, z_1)}(x - x_1) - \frac{F_y(x_1, y_1, z_1)}{F_z(x_1, y_1, z_1)}(y - y_1). \end{aligned}$$

$$\boxed{(F_x(x_1, y_1, z_1), F_y(x_1, y_1, z_1), F_z(x_1, y_1, z_1)) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0}$$



Jednačina tangentne ravni

Primer

Odrediti jednačinu tangentne ravni na površ datu jednačinom $x^2 + y^2 + z^2 = 30$ *u tački* $(1, -2, z_1)$ *u kojoj je* $z_1 > 0$.

Ako uvrstimo $(1, -2)$ u jednačinu površi, za $z_1 > 0$, dobijamo

$$z_1 = \sqrt{30 - 1 - 4} = 5.$$

$$\vec{n} = (F_x(1, -2, 5), F_y(1, -2, 5), F_z(1, -2, 5)) = (2, -4, 10).$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2(x-1) - 4(y+2) + 10(z-5) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x - 4y + 10z - 60 = 0. \end{aligned}$$

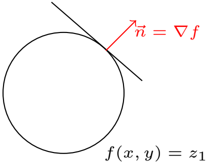
Geometrijska interpretacija gradijenta $\nabla f = (f_x, f_y)$

$S: \quad z = f(x,y)$ data površ

$\alpha: \quad z - z_1 = f_x(x_1,y_1)(x-x_1) + f_y(x_1,y_1)(y-y_1)$ tangentna ravan

$S_1: \quad z = z_1$

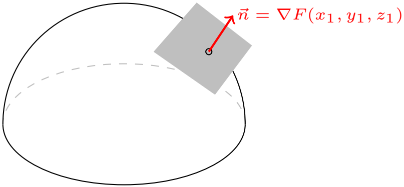
$$
\begin{aligned}
& f_x(x_1,y_1)(x-x_1) + f_y(x_1,y_1)(y-y_1) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (f_x(x_1,y_1), f_y(x_1,y_1)) \cdot (x-x_1, y-y_1) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (f_x(x_1,y_1), f_y(x_1,y_1)) \perp (x-x_1, y-y_1) \\
\Leftrightarrow \quad & \nabla f(x_1,y_1) \perp (x-x_1, y-y_1).
\end{aligned}
$$



Geometrijska interpretacija gradijenta ∇F

$$S: \quad F(x,y,z)=0$$
$$\alpha: \quad (F_x(x_1,y_1,z_1),F_y(x_1,y_1,z_1),F_z(x_1,y_1,z_1)) \perp (x-x_1,y-y_1,z-z_1)$$

$$\nabla F(x_1,y_1,z_1) \perp (x-x_1,y-y_1,z-z_1).$$



Tema 1

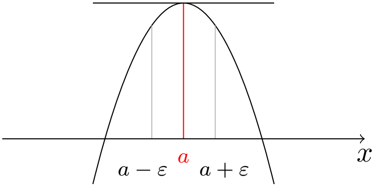
Relativne ekstremne vrednosti

Relativne ekstremne vrednosti

Definicija

Funkcija f *ima (strogi) relativni tj. lokalni maksimum u tački* $(a_1, \ldots, a_n) \in D^o$ *ako postoji* $\epsilon > 0$ *takvo da za sve* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *sa osobinom* $0 < |\Delta x_i| < \epsilon$, *važi*

$$f(a_1, \ldots, a_n) > f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) \quad \textit{tj.} \quad \Delta f(x_1, \ldots, x_n) < 0.$$

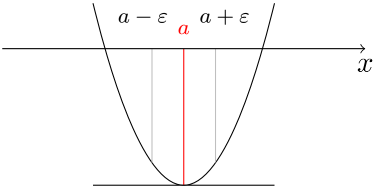


Relativne ekstremne vrednosti

Definicija

Funkcija f ima (strogi) relativni tj. lokalni minimum u tački $(a_1, \ldots, a_n) \in D^o$ ako postoji $\epsilon > 0$ takvo da za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ sa osobinom $0 < |\Delta x_i| < \epsilon$, važi

$$f(a_1, \ldots, a_n) < f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) \quad \text{tj.} \quad \Delta f(x_1, \ldots, x_n) > 0.$$



Potrebni uslovi

Teorema

Ako u tački $A(a_1, \dots, a_n) \in D^o$ postoje parcijalni izvodi prvog reda funkcije f i f ima ekstremnu vrednost u tački A, onda je

$$\boxed{f_{x_1}(A) = 0 \quad \dots \quad f_{x_n}(A) = 0.}$$

$$\nabla f(A) = 0$$

$$df(A) = 0$$

A je stacionarna tačka funkcije f.

Dovoljni uslovi

Teorema

Neka je $A(a_1, \ldots, a_n) \in D^o$ *stacionarna tačka funkcije* f.

(i) *Ako je* $d^2 f(A) < 0$, $(dx_1, \ldots, dx_n) \neq (0, \ldots, 0)$, *funkcija* f *ima relativni maksimum u tački* A.

(ii) *Ako je* $d^2 f(A) > 0$, $(dx_1, \ldots, dx_n) \neq (0, \ldots, 0)$, *funkcija* f *ima relativni minimum u tački* A.

(iii) *Ako* $d^2 f(A)$ *menja znak za razne vrednosti* $(dx_1, \ldots, dx_n) \neq (0, \ldots, 0)$, *funkcija* f *nema ni relativni minimum ni relativni maksimum u tački* A.

Dovoljni uslovi

Neka je $d\vec{x} = (dx_1, \ldots, dx_n)$. Ako funkciju f u tački A aproksimiramo Tejlorovim polinomom drugog reda, onda je

$$f(A + d\vec{x}) \approx f(A) + df(A) + \frac{1}{2}d^2(A) \Leftrightarrow \Delta f(A) \approx df(A) + \frac{1}{2}d^2(A)$$

To znači da u slučaju kada je A stacionarna tačka dobijamo

$$\Delta f(A) \approx \frac{1}{2}d^2z(A)$$

Heseova matrica

Definicija

Neka je $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, *i neka su neprekidni svi njeni parcijalni izvodi drugog reda na* D. *Tada je* *Heseova matrica (ili Hesijan)* *funkcije* f *kvadratna matrica reda* n *definisana sa*

$$\boxed{H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \end{bmatrix}.}$$

Heseova matrica i totalni diferencijal 2. reda

Možemo primetiti da se totalni deferencijal drugog reda funkcije F može predstaviti uz pomoć Heseove matrice na sledeći način:

$$d^2 f = [dx_1 \; dx_1 \;\; \ldots dx_n] \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_2x_1} & \cdots & f_{x_nx_1} \\ f_{x_1x_2} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_nx_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_1x_n} & f_{x_2x_n} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \cdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

tj. u tački A je

$$\boxed{d^2 f(A) = (d\vec{x})^T \cdot H(f(A)) \cdot d\vec{x}}$$

gde je sa $(d\vec{x})^T$ označen vektor $[dx_1 \; dx_2 \ldots dx_n]$.

Pozitivno i negativno definitne matrice

Definicija

Za simetričnu kvadratnu matricu A reda n kažemo da je pozitivno definitna ako je vrednost

$$(\vec{x})^T A\vec{x}$$

strogo pozitivna za sve vektore

$$(\vec{x})^T = [x_1\ x_2 \ldots x_n] \neq [0\ 0 \ldots 0].$$

Ako je ta vrednost nenegativna onda kažemo da je A pozitivno semi-definitna. Slično se definišu negativno definitna i negativno semi-definitna matrica.

Neka funkcija $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda u stacionarnoj tački A.

(i) Ako je $H(f(A))$ pozitivno definitna kada je $d\vec{x} \neq \vec{0}$, onda f u A ima strogi lokalni minimum,

(ii) Ako je $H(f(A))$ negativno definitna kada je $d\vec{x} \neq \vec{0}$, , onda f u A ima strogi lokalni maksimum.

Tema 2

Ekstremne vrednosti funkcije dve promenljive

Stacionarne tačke - potrebni uslovi

Neka je $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka u tački $A(x_1, y_1) \in D^o$ postoje parcijalni izvodi prvog reda funkcije z.

Definicija

Tačka A je stacionarna tačka funkcije f ako važe sledeća dva uslova:

$$\boxed{f_x(x_1, y_1) = 0 \quad \textit{i} \quad f_y(x_1, y_1) = 0.}$$

Stacionarne tačke - potrebni uslovi

Teorema

Ako postoje parcijalni izvodi prvog reda funkcije $z = f(x, y)$ u tački $(x_1, y_1) \in D^o$ i z ima ekstremnu vrednost u tački (x_1, y_1), onda je (x_1, y_1) stacionarna tačka funkcije f.

z ima relativnu ekstremnu vrednost (x_1, y_1)

$\Downarrow$

$$g_1(x) = f(x, y_1) \qquad g_2(y) = f(x_1, y)$$

imaju relativne ekstremne vrednosti u $x = x_1$ odnosno $y = y_1$

$\Downarrow$

$$g_1'(x_1) = 0 \qquad g_2'(y_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_x(x_1, y_1) = 0 \qquad f_y(x_1, y_1) = 0}$$

Dovoljni uslovi

Teorema

Neka je $A(x_1, y_1)$ *stacionarna tačka funkcije* $z = f(x, y)$ *koja ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda i neka je*

$$D_2(A) = |H(z(A)| = \begin{vmatrix} z_{xx}(A) & z_{yx}(A) \\ z_{xy}(A) & z_{yy}(A) \end{vmatrix} = \left(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2\right)(A).$$

(i) $D_2(A) > 0$, $z_{xx}(A) < 0$ *(ili* $z_{yy}(A) < 0$*):* z *ima maksimum u tački* A;

(ii) $D_2(A) > 0$, $z_{xx}(A) > 0$ *(ili* $z_{yy}(A) > 0$*):* z *ima minimum u tački* A;

(iii) $D_2(A) < 0$*:* z *nema ni maksimum ni minimum u tački* A *(sedlasta tačka)*

Dovoljni uslovi - dokaz

$$\begin{aligned} d^2z &= z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2 \qquad (dy \neq 0) \\ &= dy^2\left(z_{xx}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 2z_{xy}\frac{dx}{dy} + z_{yy}\right) \\ f(t) &= z_{xx}t^2 + 2z_{xy}t + z_{yy}, \quad t = \frac{dx}{dy} \end{aligned}$$

$$(f(t) > 0 \vee f(t) < 0) \Leftrightarrow \boxed{z_{xy}^2 - z_{xx}z_{yy} < 0}$$

- $z_{xx} > 0 : d^2z > 0$ (f ima minimum i $f(t) > 0$)
- $z_{xx} < 0 : d^2z < 0$ (f ima maksimum i $f(t) < 0$)

Primer

Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definisane sa*

$$z = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20.$$

Stacionarne tačke:

$$\begin{aligned} z_x &= 3x^2 - 3 & \qquad z_x &= 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1) \\ z_y &= 3y^2 - 12 & \qquad z_y &= 0 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow (y = 2 \vee y = -2) \end{aligned}$$

$$A(1,2) \quad B(1,-2) \quad C(-1,2) \quad D(-1,-2).$$

Totalni diferencijal drugog reda:

$$(z_{xx} = 6x \wedge z_{xy} = z_{yx} = 0 \wedge z_{yy} = 6y) \Rightarrow d^2z(x,y) = 6xdx^2 + 6ydy^2$$

Primer

Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definisane sa*

$$z = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20.$$

$d^2z(x, y) = 6xdx^2 + 6ydy^2$

Znak totalnog diferencijala drugog reda stacionarnim tačkama:

(A) $d^2z(1, 2) = 6dx^2 + 12dy^2 > 0$ $((dx, dy) \neq (0, 0))$: $z_{\min}(1, 2) = -10$

(B) $d^2z(1, -2) = 6dx^2 - 12dy^2$ menja znak: z nema ekstr. vr. u B

(C) $d^2z(-1, 2) = -6dx^2 + 12dy^2$ menja znak: z nema ekstr. vr. u C

(D) $d^2z(-1, -2) = -6dx^2 - 6dy^2 < 0$ $((dx, dy) \neq (0, 0))$: $z_{\max}(-1, -2) = 55.$

Tema 3

Uslovne ekstremne vrednosti

Uslovne ekstremne vrednosti

Uslovne ekstremne vrednosti su tačke u kojima funkcija

$$f = f(x_1, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

ima lokalne ekstremne vrednosti, ali uz dodatne uslove da promenljive $(x_1, \dots, x_n) \in D$ zadovoljavaju ograničenja data jednačinama

$$\begin{gathered} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{gathered}$$

Lagranžov metod množitelja

Definicija

Neka su $f, g_1, \ldots, g_m : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *funkcije koje imaju neprekidne pracijalne izvode prvog reda na* D.

Lagranžova funkcija (ili Lagranžian):

$$\boxed{\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_n) \quad = \quad & f(x_1, \ldots, x_n) \\ & + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ & \ldots \\ & + \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ - *Lagranžovi množitelji*

Lagranžov metod množitelja

Teorema

Neka su $f, g_1, \ldots, g_m : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *funkcije koje imaju neprekidne pracijalne izvode prvog reda na* D. *Ako funkcija* f *ima uslovnu ekstremnu vrednost u tački* $A(a_1, \ldots, a_n)$*, onda je*

$$F_{x_1}(A) = 0 \quad \ldots \quad F_{x_n}(A) = 0 \quad g_1(A) = 0 \quad \ldots \quad g_m(A) = 0$$

Za stacionarnu tačku A *važe sledeće implikacije:*

(i) $d^2F(A) < 0$, $(dx_1, \ldots, dx_n) \neq (0, \ldots, 0)$: f *ima maksimum u tački* A;

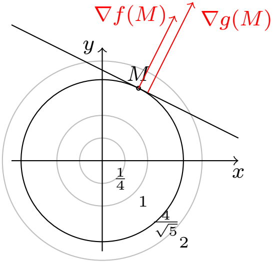
(ii) $d^2F(A) > 0$, $(dx_1, \ldots, dx_n) \neq (0, \ldots, 0)$: f *ima minimum u tački* A;

(iii) $d^2F(A)$ *menja znak za razne vrednosti* $(dx_1, \ldots, dx_n) \neq (0, \ldots, 0)$, f *nema ekstremum u* A.

Primer

Primer

Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije $z = x^2 + y^2$ *ako je* $x + 2y = 4$.



Neka za $M(x_m, y_m)$ važi:

- f u M ima lokalni ekstremum
- $x_m + 2y_m = 4$

Tada je:
$\nabla f(x_m, y_m) \parallel \nabla g(x_m, y_m)$
$\nabla f(x_m, y_m) = -\lambda \cdot \nabla g(x_m, y_m)$

$$
\begin{aligned}
&(2x_m, 2y_m) = -\lambda(1,2) \wedge x_m + 2y_m = 4\\
\Leftrightarrow\ &\left(x_m = -\tfrac{\lambda}{2} \wedge y_m = -\lambda \wedge -5\lambda = 8\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left(x_m = \tfrac{4}{5} \wedge y_m = \tfrac{8}{5} \wedge \lambda = -\tfrac{8}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad f_{\min}(M) = \tfrac{16}{5}.
\end{aligned}
$$

Primer

Primer

Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije $u = xy^2z^3$ *ako je* $x + y + z = 6$ *za* $x, y, z > 0$.

Lagranžova funkcija:

$$F(x, y, z) = xy^2z^3 + \lambda(x + y + z - 6)$$

Parcijalni izvodi prvog reda:

$$F_x(x, y, z) = y^2z^3 + \lambda \wedge F_y(x, y, z) = 2xyz^3 + \lambda \wedge F_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 + \lambda.$$

Stacionarne tačke: $(x, y, z > 0)$

$$\begin{array}{l} y^2z^3 + \lambda = 0 \\ 2xyz^3 + \lambda = 0 \\ 3xy^2z^2 + \lambda = 0 \\ x + y + z = 6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y^2z^3 + \lambda = 0 \\ yz^3(2x - y) = 0 \; /: yz^3 \neq 0 \\ y^2z^2(3x - z) = 0 \; /: y^2z^2 \neq 0 \\ x + y + z = 6 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} y^2z^3 + \lambda = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda = -y^2z^3 \\ y = 2x \\ z = 3x \\ 6x = 6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda = -108 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ x = 1 \end{array}$$

Primer

Parcijalni izvodi drugog reda:

$$\begin{aligned} H(F(x,y,z)) &= \begin{bmatrix} F_{xx}(x,y,z) & F_{yx}(x,y,z) & F_{zx}(x,y,z) \\ F_{xy}(x,y,z) & F_{yy}(x,y,z) & F_{zy}(x,y,z) \\ F_{xz}(x,y,z) & F_{yz}(x,y,z) & F_{zz}(x,y,z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Diferenciranje uslova:

$$x + y + z = 6 \Rightarrow dz = -dx - dy$$

Totalni diferencijal drugog reda:

$$d^2F(x,y,z) \quad = \quad 2xz^3dy^2 + 6xy^2zdz^2 + 4yz^3dxdy + 6y^2z^2dxdz + 12xyz^2dydz$$

Primer

Vrednost d^2F u $A(1,2,3)$:

$$\begin{aligned}
d^2F(1,2,3) &= 54dy^2 + 72dz^2 + 216dxdy + 216dydz + 216dxdz \\
&= 54dy^2 + 72(dx+dy)^2 + 216dxdy + 216dy(-dx-dy) + 216dx(-dx-dy) \\
&= -90dy^2 - 72dxdy - 144dx^2 = -90\left(dy^2 + \frac{4}{5}dxdy\right) - 144dx^2 \\
&= -90\left(dy + \frac{4}{10}dx\right)^2 - 108dx^2
\end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da je

$$d^2F(1,2,3) < 0 \quad (dx, dy, dz) \neq (0,0,0),$$

što znači da funkcija u u tački $(1,2,3)$ ima uslovni lokalni maksimum $u(1,2,3) = 108$.