MATEMATIKA 3

Ivan Prokić
kabinet 117, F blok
prokic@uns.ac.rs
http://imft.ftn.uns.ac.rs/∼iprokic/

Andrea Karalić
kabinet 215, F blok
andrea.karalic@gmail.com

Novi Sad

Slajdove pripremila prof. dr Jovanka Pantović

Tema 1

Krivolinijski integrali

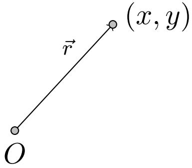
Vektor položaja tačke

Svakoj tački u prostoru $\mathbb{R}^2$ ili $\mathbb{R}^3$ možemo pridružiti njen vektor položaja $\vec{r}$. U prostoru $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{r} = (x, y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

U prostoru $\mathbb{R}^3$:

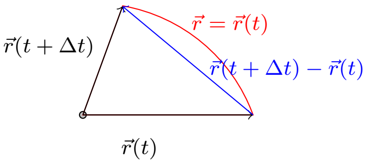
$$\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$



Izvod vektorske funkcije

Neka je $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ili $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ vektorska funkcija data sa:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b] \quad \text{tj.} \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b].$$



Izvod vektorske funkcije $\vec{r}(t)$

Neka je $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ tj. $\vec{r} = \vec{r}(t)$ za $t \in [a,b]$.

$$
\begin{aligned}
\Delta\vec{r}(t) &= \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \\
&= (x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t)) - (x(t), y(t), z(t)) \\
&= (x(t+\Delta t) - x(t), y(t+\Delta t) - y(t), z(t+\Delta t) - z(t)) \\
\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{(x(t+\Delta t) - x(t), y(t+\Delta t) - y(t), z(t+\Delta t) - z(t))}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right) \\
(\vec{r}(t))' &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \\
d\vec{r}(t) &= (\vec{r}(t))' dt = (\dot{x}(t)dt, \dot{y}(t)dt, \dot{z}(t)dt) = (dx(t), dy(t), dz(t)).
\end{aligned}
$$

Glatke krive

Neka je $i \in \{2, 3\}$.

Definicija

Za skup $L \subset \mathbb{R}^i$ kažemo da je prosta glatka kriva (ili gladak Žordanov luk) ako postoji interval $[a, b]$ i vektorska funkcija $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^i$ za koje važi

(i) $L = \{\vec{r}(t) : t \in [a, b]\}$;

(ii) *$\vec{r}$ bijektivno preslikava skupa (a, b) na $L \setminus \{\vec{r}(a), \vec{r}(b)\}$;*

(iii) *$\vec{r}$ je neprekidno diferencijabilna funkcija na (a, b);*

(iv) *$(\vec{r}(t))' \neq \vec{0}$ za svako $t \in (a, b)$.*

Ako je $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ kažemo da je kriva L zatvorena.

Kažemo da je tada sa

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(t), \qquad t \in [a, b]}$$

data glatka parametrizacija krive L.

Krivolinijski integral skalarne funkcije - vektorski

Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ i neka je $L \subset D$ glatka kriva data parametrizacijom

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad t \in [a,b].$$

Definicija

Ako je funkcija $h(t) = (f(\vec{r}(t)))|(\vec{r}(t))'|$ integrabilna na intervalu $[a,b]$ onda je krivolinijski integral skalarne funkcije $f = f(\vec{r})$ duž krive L, u oznaci $\int\limits_L f(\vec{r})dr$, definisan sa

$$\int\limits_L f(\vec{r})dr = \int\limits_a^b (f(\vec{r}(t)))\,|d\vec{r}(t)| = \int\limits_a^b (f(\vec{r}(t)))\left|(\vec{r}(t))'\right| dt$$

Definicija

Ako je $L = L_1 \cup \ldots \cup L_n$ po delovima glatka kriva, onda je

$$\int\limits_L f(\vec{r})dR = \int\limits_{L_1} f(\vec{r})dr + \ldots + \int\limits_{L_n} f(\vec{r})dr.$$

Krivolinijski integral skalarne funkcije - skalarno

$$\int_L f(\vec{r})dr = \int_a^b (f(\vec{r}(t))) \left|(\vec{r}(t))'\right| dt$$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\ |(\vec{r}(t))'| &= |(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_L f(\vec{r})dr = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}dt.}$$

Krivolinijski integral skalarne funkcije - osobine

(1) Neka za funkcije $f, g : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^3$ i $L \subset D$ postoje integrali $\int\limits_L f(\vec{r})dr$ i $\int\limits_L g(\vec{r})dr$.

Tada važi:

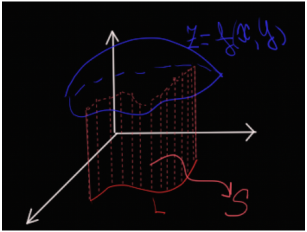
$\int\limits_L (\alpha f(\vec{r}) + \beta g(\vec{r}))dr = \alpha \int\limits_L f(\vec{r})dr + \beta \int\limits_L g(\vec{r})dr, \alpha, \beta \in \mathbb{R};$

(2)

Neka je $f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^2$, nenegativna neprekidna funkcija na $L \subset D$ i neka je $f(x, y) \geq 0,\ (x, y) \in L$. Za površ

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in L,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

$$\Delta S = \int\limits_L f(x, y)dr.$$



Krivolinijski integral skalarne funkcije - osobine

(3) Dužina Δl putanje $L \subset \mathbb{R}^3$: $\Delta l = \int\limits_L dr$.

(4) Ako je $L \subset \mathbb{R}^3$ komad žice i ako je linearna gustina $\mu = \mu(\vec{r})$ žice L poznata u svakoj tački $\vec{r}$ te krive, onda je masa žice L :

$$m = \int\limits_L \mu(\vec{r}) dr$$

(5) Težište $T(x_T, y_t, z_t)$:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{m} \int\limits_L x\mu(\vec{r}) dr \\ y_T &= \frac{1}{m} \int\limits_L y\mu(\vec{r}) dr \\ z_T &= \frac{1}{m} \int\limits_L z\mu(\vec{r}) dr \end{aligned}$$

Primer

Primer

Izračunati dužinu dela cikloide

$$L=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x=2(t-\sin t),\ y=2(1-\cos t),\ t\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{3}\right]\right\}.$$

Kako je $\dot{x}(t)=2(1-\cos t)$, $\dot{y}(t)=2\sin t$ to je

$$\begin{aligned}\Delta l &= \int\limits_L dr=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}}\sqrt{2^2(1-\cos t)^2+2^2\sin^2 t}\,dt\\ &= 2\sqrt{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}}\sqrt{1-\cos t}\,dt=4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}}|\sin\tfrac{t}{2}|\,dt\\ &= 8\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{6}}\sin u\,du=-8\cos u\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{6}}=8(\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos\tfrac{\pi}{8}).\end{aligned}$$

Primer

Primer

Izračunati dužinu dela cilindrične zavojnice
$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = 2t,\ 0 \le t \le 4\pi\}.$

Iz $\dot{x}(t) = -3\sin t$, $\dot{y}(t) = 3\cos t$ i $\dot{z}(t) = 2$ sledi

$$\Delta l = \int\limits_L dr = \int\limits_0^{4\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4}dt = \sqrt{13}\int\limits_0^{4\pi} dt = 4\pi\sqrt{13}.$$

Primer

Primer

Izračunati $I = \int\limits_L (x-y)dr$, *po dužini polukružnice*

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = 4,\ x \geq 0\}.$$

Jedna glatka parametirzacija kružnice je

$$L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\cos t,\ y = 2\sin t + 1, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Za datu parametrizaciju je

$$\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2.$$

$$\int\limits_L (x-y)dr = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t - 2\sin t - 1)2dt = 2\Big(2\sin t + 2\cos t - t\Big)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 8 - 2\pi.$$

Krivolinijski integral vektorske funkcije

Definicija

Neka je $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, $\vec{r} \subseteq D$, *vektorska funkcija i* $L \subseteq D$ *orijentisana glatka kriva data sa* $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$. *Ako je funkcija*

$$h(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{r}(t))'$$

integrabilna na intervalu $[a, b]$, *tada određeni integral*

$$\int\limits_L \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int\limits_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{r}(t))' dt$$

zovemo **krivolinijski integral vektorskog polja** $\vec{F}$ **(druge vrste)** *po* L *od tačke* $A = \vec{r}(a)$ *do tačke* $B = \vec{r}(b)$.

Ako je $L = L_1 \cup \ldots \cup L_n$ po delovima glatka kriva, onda je

$$\int\limits_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{L_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \ldots + \int\limits_{L_n} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

gde su glatke krive $L_1, \ldots, L_n$ saglasno orijentisane.

Krivolinijski integral vektorske funkcije

U ravni.
Ako je $\vec{F}(\vec{r}) = (P(\vec{r}), Q(\vec{r}))$ vektorsko polje i $L \subseteq D$ orijentisana glatka kriva data sa

$$L = \{\vec{r} : \vec{r} = (x(t), y(t)) : t \in [a, b]\}$$

onda je

$$\begin{aligned}
\int\limits_L \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int\limits_L \Big(P(x,y), Q(x,y)\Big) \cdot (dx, dy) \\
&= \int\limits_a^b (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))) \cdot (\dot{x}(t)dt, \dot{y}(t)dt) \\
&= \int\limits_a^b \Big(P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)\Big) dt.
\end{aligned}$$

Osobine krivolinijskog integrala

Neka je $L \subseteq D$ orijentisana glatka kriva, $\vec{F}$ i $\vec{G}$ su vektorska polja definisana na D i postoje integrali $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$ i $\int_L \vec{G} \cdot d\vec{r}$. Tada važi

$$\int_L \left(\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r} + \beta \vec{G} \cdot d\vec{r}\right) = \alpha \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} + \beta \int_L \vec{G} \cdot d\vec{r}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Krivolinijski integral druge vrste zavisi od orijentacije krive, tj.

$$\int_{L(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{L(BA)} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Rad polja $\vec{F}$ duž luka L je krivolinijski integral $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Rad polja $\vec{F}$ duž zatvorene krive L naziva se **cirkulacija** vektorskog polja $\vec{F}$.

Nezavisnost od putanje integracije

Definicija

Krivolinijski integral vektorske funkcije *ne zavisi od putanje integracije* *ako je njegova vrednost ista za sve putanje koje povezuju početnu i krajnju tačku.*

Definicija

Za vektorsko polje $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}), \vec{r} \subseteq D$, *kažemo da je konzervativno u oblasti* D *ako je za svaku zatvorenu krivu* $L \subseteq D$ *integral jednak nuli,*

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Nezavisnost od putanje integracije

Teorema

Ako je $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ konzervativno vektorsko polje u oblasti D, onda za sve krive $L_1, L_2 \subseteq D$ važi

$$\int\limits_{L_1(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{L_2(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Posmatrajmo sa proizvoljne dve tačke $A, B \in D$ i proizvoljne po delovima glatke krive $L_1(AB), L_2(AB) \subseteq D$. Kako je kriva $L = L_1(AB) \cup L_2(BA)$ zatvorena, a $\vec{F}$ konzervativno, sledi

$$\begin{aligned}
\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{L_1(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{L_2(BA)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int_{L_1(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{L_2(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int_{L_1(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L_2(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r}.
\end{aligned}$$

Potencijalna polja

Definicija

Vektorsko polje $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}), \vec{r} \in D$, *je potencijalno ako postoji skalarno polje* $f : D \to \mathbb{R}$ *sa osobinom*

$$\vec{F} = \nabla f.$$

U tom slučaju je f *potencijal polja* $\vec{F}$.

Potencijalna polja - primer

Primer

Gravitaciono polje tačke $M(x,y,z)$, mase m, $\vec{G} = g \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \vec{r}_0$ gde je g gravitaciona konstanta, $r = |\vec{r}|$ i $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$, je potencijalno polje sa potencijalom $f = -g\frac{m}{r}$.

Primetimo prvo da za $\vec{r} = (x,y,z)$ imamo

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Neka je $f(\vec{r}) = -gm \cdot \frac{1}{r}$, tj. $f(x,y,z) = -gm\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Gradijent funkcije f je

$$\begin{aligned} \nabla f &= gm \cdot \frac{(2x,2y,2z)}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = gm \cdot \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= g \cdot \frac{m}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2} \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = g \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \vec{r}_0. \end{aligned}$$

Potencijalno akko konzervativno

Teorema

Vektorsko polje je potencijalno ako i samo je konzervativno.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ potencijalno polje nad D sa potencijalom $f = f(\vec{r})$, $\vec{F} = \nabla f$. Izaberimo proizvoljno po delovima glatku krivu $L(AB) \subseteq D$. Tada važi

$$\begin{aligned}\int_{L(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{r}(t))' dt = \int_a^b h'(t) dt = h(b) - h(a) \\ &= f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) = f(B) - f(A).\end{aligned}$$

gde je $h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ ($h = f(x, y, z)$, gde je $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$). Primetimo da je ove korišćen izvod složene funkcije tj. lančani izvod:

$$\begin{aligned}h'(t) &= \frac{dh(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{y}(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{z}(t) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}(t)), \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}(t)) \right) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \\ &= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{r}(t))'\end{aligned}$$

Ekvivalentne osobine

Teorema

Neka je D jednostruko povezana oblast i neka je $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, $\vec{r} \subseteq D$ neprekidno diferencijalno vektorsko polje na D. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(a) *integral* $\displaystyle\int_{L(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ *ne zavisi od putanje integracije*

(b) $\vec{F}$ *je potencijalno polje*

(c) $\vec{F}$ *je konzervativno polje*

(d) (d_1) *Ako je* $D \subseteq \mathbb{R}^2$, *onda je* $P_y = Q_x$.
(d_2) *Ako je* $D \subseteq \mathbb{R}^3$, *onda je* $P_y = Q_x$ *i* $P_z = R_x$ *i* $Q_z = R_y$ *tj.* $\nabla \times \vec{F} = 0$.

Divergencija i rotor

Definicija

Neka je $\vec{F} = (P(\vec{r}), Q(\vec{r}), R(\vec{r}))$, $\vec{r} = (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$. *Divergencija vektorskog polja* $\vec{F}$, *u oznaci* `div` $\vec{F}$ *ili* $\nabla \cdot \vec{F}$, *je skalarno polje* $D \to \mathbb{R}$ *definisano sa*

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \vec{F})(x, y, z) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z).\end{aligned}$$

Definicija

Neka je $\vec{F} = (P(\vec{r}), Q(\vec{r}), R(\vec{r}))$, $\vec{r} = (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$. *Rotor vektorskog polja* $\vec{F}$, *u oznaci* `rot` $\vec{F}$ *ili* $\nabla \times \vec{F}$, *je vektorsko polje* $D \to \mathbb{R}^3$ *definisano sa*

$$(\nabla \times \vec{F})(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(\vec{r}) & Q(\vec{r}) & R(\vec{r}) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\vec{r}) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\vec{r}), \frac{\partial P}{\partial z}(\vec{r}) - \frac{\partial R}{\partial x}(\vec{r}), \ \frac{\partial Q}{\partial x}(\vec{r}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\vec{r})\right).$$

Osobine

1. Vektorsko polje $\vec{F}$ je bezvrtložno ako je $\nabla \times \vec{F} = 0$.
2. Vektorsko polje $\vec{F}$ je solenoidalno ako je $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.

Reč solenoidalno vodi poreklo od grčke reči za solenoid, a ima značenje "u obliku cevi". Jedan primer solenoidalnog polja je magnetno polje.

Primer

Primer

Ako se materijalna tačka rotira oko ose brzinom $\vec{F}$*, onda je*

$$\frac{1}{2}\left(\nabla \times \vec{F}\right)$$

ugaona brzina kretanja te tačke. To znači da u slučaju kada je $\nabla \times \vec{F} \neq 0$ *postoji vrtložno kretanje.*

Formula Grina

Prosta (jednostruko) povezana oblast $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je povezana oblast u $\mathbb{R}^2$ sa osobinom da za svaku zatvorenu, prostu (bez tačaka samopresecanja) krivu L iz D važi da je oblast koju ograničava L takođe u D.

Teorema

Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena oblast ograničena zatvorenom po delovima glatkom prostom krivom L. Ako su funkcije P, Q, P_y i Q_x neprekidne nad D i ako je kriva L orijentisana tako da tačke oblasti D ostaju sa leve strane kada se L obilazi u zadatom smeru, tada važi

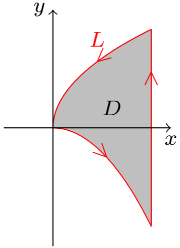
$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_\sigma (Q_x - P_y)dxdy.$$

Primer

Primer

Izračunati $\int\limits_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$, *ako je* L *pozitivno orijentisan rub oblasti*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x, y \geq -x^2, x \leq 1\}.$$



$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D (1 - 2x)dxdy = \int_0^1 dx \int_{-x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)dy \\ &= \int_0^1 (1 - 2x)y\Big|_{y=-x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} + x^2)dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^1 = -\frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Formula Grina 2

Teorema

Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena višestruko povezana oblast ograničena unijom zatvorenih po delovima glatkih prostih $L_1 \cup \ldots \cup L_n$. Ako su funkcije P, Q, P_y i Q_x neprekidne na D i ako je kriva L orijentisana tako da tačke oblasti D ostaju sa leve strane kada se L obilazi u datom smeru, tada važi jednakost

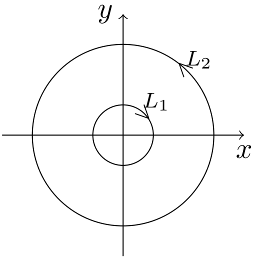
$$\sum_{i=1}^{n} \oint_{L_i} Pdx + Qdy = \iint_{\sigma} (Q_x - P_y)dxdy.$$

Primer

Primer

Izračunati $I = \int\limits_{L_1} (y^3 dx - x^3 dy) + \int\limits_{L_2} (y^3 dx - x^3 dy)$, *ako je*

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\ L_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\} \end{aligned}$$

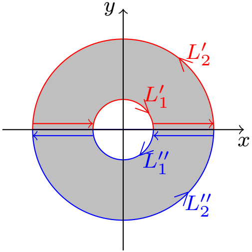


i L_1 *je orijentisana pozitivno, a* L_2 *je orijentisana negativno.*

Primer

Neka je $A(1,0)$, $B(\sqrt{3},0)$, $C(-1,0)$ i $D(-\sqrt{3},0)$ i podelimo krive L_1 i L_2 na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
L_1' &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1, y\geq 0\}\\
L_1'' &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1, y\leq 0\}\\
L_2' &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=3, y\geq 0\}\\
L_2'' &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=3, y\leq 0\}
\end{aligned}
$$



Primenom formule Grina, za $Q_x=-3x^2$ i $P_y=3y^2$, dobijamo

$$
I = -3\iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy - 3\iint_{D_2}(x^2+y^2)dxdy = -3\iint_{D}(x^2+y^2)dxdy.
$$

Prelaskom na polarne koordinate,

$$
I = -3\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_1^{\sqrt{3}}\rho^3d\rho = -3\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_1^{\sqrt{3}} = -3\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}(9-1) = -12\pi.
$$