MATEMATIKA 3

Ivan Prokić
kabinet 117, F blok
prokic@uns.ac.rs
http://imft.ftn.uns.ac.rs/∼iprokic/

Andrea Karalić
kabinet 215, F blok
andrea.karalic@gmail.com

Novi Sad

Slajdove pripremila prof. dr Jovanka Pantović

Tema 1

Diferencijalne jednačine

Primena

INŽENJERSKI PROBLEM → MATEMATIČKI MODEL → REŠAVANJE MODELA → INŽENJERSKA INTERPRETACIJA

Program

Teme:

(i) postavljanje matematičkih modela,
(ii) klasifikacija diferencijalnih jednačina,
(iii) rešavanje nekih klasa običnih diferencijalnih jednačina.

Pojam

Jednačina koja sadrži bar jedan izvod nepoznate funkcije koja zavisi od jedne ili više promenljivih se naziva diferencijalna jednačina.

Diferencijalne jednačine se dele na:

1. obične - kod kojih nepoznata funkcija zavisi samo od jedne promenljive, i
2. parcijalne - kod kojih nepoznata funkcija zavisi od više promenljivih.

Red jednačine je red najvišeg izvoda koji se pojavljuje u toj jednačini.

Primeri

Primer

Sledeće jednačine su diferencijalne:

(a) $y'(x) = \frac{y}{x}$ *(obična prvog reda)*

(b) $y''(x) - xy'(x) + 2py(x) = 0$ *(obična drugog reda)*

(c) $\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2} = 0$ *(parcijalna drugog reda)*

(d) $\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0,\ \ \omega-$*const. (obična drugog reda)*

(e) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\ a - const.$ *(obična drugog reda)*

Primeri - sistem

Konjukcija dve ili više diferencijalnih jednačina se naziva sistem diferencijalnih jednačina.

Primer

Primer sistema dve diferencijalne jednačine sa dve nepoznate funkcije:

$$\begin{array}{rcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & - & 3y(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & 5y(t) \end{array}$$

Definicija

Implicitni (ili opšti) oblik obične diferencijalne jednačine n-tog reda je

$$\boxed{G(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0,} \tag{1}$$

Eksplicitni (ili normalni) oblik je

$$\boxed{y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).} \tag{2}$$

Rešenje diferencijalne jednačine

Funkcija $y = \varphi(x)$ je rešenje diferencijalne jednačine (1) na (a, b) ako važi:

- φ je definisana na (a,b),
- n puta je diferencijabilna na (a, b) i
- φ identički zadovoljava jednačinu (1) tj. za svako $x \in (a, b)$ važi

$$\varphi^{(n)}(x) = F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Tema 2

Obične diferencijalne jednačine prvog reda

Obične diferencijalne jednačine prvog reda

Implicitni oblik diferencijalne jednačine prvog reda je

$$\boxed{G(x, y, y') = 0}$$

a eksplicitno oblik je

$$\boxed{y' = F(x, y).}$$

Geometrijska interpretacija

Linijski segment je uredjena trojka

$$(x, y, y'),$$

gde je y' u svakoj tački (x, y) odredjen tom diferencijalnom jednačinom.

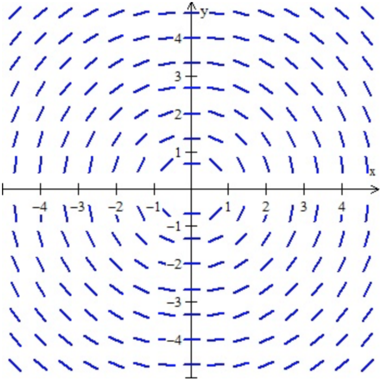
Skup svih linijskih segmenata se naziva polje pravaca.

Kaže se da je kriva saglasna sa poljem pravaca: koeficijent pravca tangente na grafik rešenja diferencijalne jednačine $y = \psi(x)$ u tački $(x, \psi(x))$ je dat sa $\psi'(x) = F(x, \psi(x))$.

Primer

Primer

Neka je $y' = -\frac{x}{y}$.



$$x^2 + y^2 = C \Leftrightarrow (y = \sqrt{C - x^2} \vee y = -\sqrt{C - x^2})$$

Košijev početni problem

Kriva koja prolazi kroz tačku (x_0, y_0), tj. zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$, je partikularno rešenje.

Kaže se da je sa

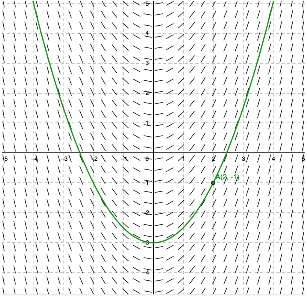
$$y' = F(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{3}$$

zadat početni (Cauchyev) problem.

Primer

Primer

Neka je $y' = x$ *i* $y(2) = -1.$



$$\left(y = \frac{1}{2}x^2 + C \wedge y(2) = -1\right) \Leftrightarrow \left(y = \frac{1}{2}x^2 + C \wedge -1 = \frac{1}{2} \cdot 4 + C\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 3$$

Neki tipovi običnih diferencijalnih jednačina prvog reda

1. jednačina sa razdvojenim promenljivim
2. homogena diferencijalna jednačina
3. linearna diferencijalna jednačina
4. Bernulijeva diferencijalna jednačina
5. jednačina totalnog diferencijala

Jednačina sa razdvojenim promenljivim

Jednačina oblika

$$\boxed{g(y) \cdot y' = f(x)} \tag{4}$$

ili

$$\boxed{y' = f(x)\, g(y),} \tag{5}$$

Ako integralimo levu i desnu stranu (4) po x, dobijamo

$$\int g(y) \cdot y' dx = \int f(x) dx + C \text{ odakle je}$$

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx + C.$$

Primer

Primer

Rešiti početni problem $y' = 2y$, $y(0) = 3$.

Ako, za $y \neq 0$, razdvojimo promenljive i integralimo, dobijamo

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = 2y \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \\ \Leftrightarrow \quad & \ln|y| = 2x + C' \Leftrightarrow y = \pm e^{2x+C'} \Leftrightarrow y = Ce^{2x}. \end{aligned}$$

Iz početnog uslova sledi

$$y(0) = 3 \Rightarrow Ce^{2\cdot 0} = 3 \Rightarrow C = 3,$$

odakle je rešenje početnog problema $y(x) = 3e^{2x}$.

Jednačina u kojoj se mogu razdvojiti promenljive

Neka je

$$\boxed{y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \quad \text{i} \quad (a_2,b_2) = k(a_1,b_1).} \tag{6}$$

Smena:

$$t = a_1x + b_1y \Rightarrow t' = a_1 + b_1y'$$

$$\frac{t' - a_1}{b_1} = f\left(\frac{t + c_1}{kt + c_2}\right)$$

Homogena jednačina

Neka je f neprekidna funkcija nad (a, b). Za jednačinu oblika

$$\boxed{y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)} \tag{7}$$

kažemo da je homogena diferencijalna jednačina prvog reda.

Uvedimo smenu:

$$t(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow y(x) = x \cdot t(x) \Rightarrow y'(x) = t(x) + xt'(x).$$

Jednačina

$$t(x) + xt'(x) = f(t(x)) \Rightarrow xt'(x) = f(t(x)) - t(x) \Rightarrow \frac{t'(x)}{f(t(x)) - t(x)} = \frac{1}{x}$$

koja razdvaja promenljive.

Primer

Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xyy' = x^2 + y^2$.

Ako jednačinu podelim sa xy, dobijamo

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Uvodjenjem smene $t = \frac{y}{x}$

$$\begin{aligned} & t'x + t = \frac{1}{t} + t \\ \Leftrightarrow \qquad & t'x = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \int t dt = \int \frac{dx}{x} \\ \Leftrightarrow \qquad & \frac{1}{2}t^2 = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y^2 = 2x^2 \ln|Cx|. \end{aligned}$$

Jednačina koja se svodi na homogenu

Neka je

$$\boxed{y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.} \tag{8}$$

Smena:

$$x = X + \alpha, y = Y + \beta$$

Polazna jednačina postaje

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2X + b_2Y + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right),$$

i ako je (α, β) rešenje sistema jednačina

$$\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 &= 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

dobijamo homogenu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right), \text{ tj. } \frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right).$$

Primer

Primer

Rešiti diferencijalnu jednačinu $\frac{dy}{dx} = \frac{4x-4y}{-4x+y+3}$.

Kako sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcr} 4\alpha & - & 4\beta & = & 0 \\ -4\alpha & + & \beta & = & -3 \end{array} \Leftrightarrow (\alpha = 1 \wedge \beta = 1)$$

Smena1: $x = X + 1$, $y = Y + 1$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{4X - 4Y}{-4X + Y} \quad \text{(homogena diferencijalna jednačina)}$$

Primer

Primer

Rešiti diferencijalnu jednačinu $\frac{dy}{dx} = \frac{4x-4y}{-4x+y+3}$.

$$\frac{dY}{dX} = \frac{4X-4Y}{-4X+Y}$$

Smena2: $t = \frac{Y}{X}$, $Y' = t'X + t$

$$\begin{aligned} t'X + t = \frac{4-4t}{-4+t} \quad &\Leftrightarrow \quad t'X = \frac{4-t^2}{t-4} \Leftrightarrow \int \frac{t-4}{4-t^2} = \int \frac{dX}{X} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{2-t} + 3\int \frac{dt}{2+t}\right) = \ln|X| + \ln C \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(2+t)^3}{t-2}\right| = \ln|CX| \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\left|\frac{\frac{Y}{X}-2}{(2+\frac{Y}{X})^3}\right|} = CX \Leftrightarrow Y - 2X = C^2(2X+Y)^3. \end{aligned}$$

Smena1: $X = x-1, Y = y-1 \Rightarrow -2x + y + 1 = C^2(2x+y-3)^2$.

Linearna diferencijalna jednačina

Diferencijalna jednačina oblika

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x),} \tag{9}$$

se kaže da je linearna diferencijalna jednačina prvog reda.

Linearna jednačina - NE UČITI NAPAMET FORMULU

Teorema

Neka su f i g neprekidne nad intervalom (a, b). Tada postoji jedinstveno rešenje jednačine (9) koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = x_0$ i definisano je na (a, b). Rešenje je dato sa

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt}\left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} g(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} f(u)du}dt\right) \tag{10}$$

Smena: $y(x) = u(x)v(x)$, $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$\begin{aligned}
&u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + f(x)u(x)v(x) = g(x)\\
&u'(x)v(x) + u(x)(v'(x) + f(x)v(x)) = g(x)\\
&v'(x) + f(x)v(x) = 0 \quad \wedge \quad u'(x)v(x) = g(x)\\
&\frac{dv(x)}{v(x)} = -f(x)dx \quad \wedge \quad u'(x)v(x) = g(x)
\end{aligned}$$

Linearna jednačina

$$\ln|v(x)| = -\int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad \wedge \qquad u'(x)v(x) = g(x)$$

$$v(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt} \qquad \wedge \qquad u'(x) = g(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}$$

$$v(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt} \qquad \wedge \qquad u(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(u)du} dt + C$$

$$y(x) = u(x)v(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt} \int_{x_0}^{x} g(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(u)du} dt + C$$

Iz početnog uslova $y(x_0) = y_0$ sledi da je $C = y_0$. Dakle,

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt} \Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(u)du} dt \Big).$$

Primer

Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' + \frac{3}{x}y = 9x^3$.

$$u'v + uv' + \frac{3}{x}uv = 9x^3$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{3}{x}v\right) = 9x^3$$

$$\begin{aligned} & v' + \tfrac{3}{x}v = 0 \\ & \tfrac{dv}{dx} + \tfrac{3}{x}v = 0 \\ & \tfrac{dv}{dx} = -\tfrac{3}{x}v \\ & \tfrac{dv}{v} = -3\tfrac{dx}{x} \\ & \ln|v| = -3\ln|x| \\ & v = \tfrac{1}{x^3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & u'v = 9x^3 \\ & u'\tfrac{1}{x^3} = 9x^3 \\ & u' = 9x^6 \\ & u = \tfrac{9}{7}x^7 + C \end{aligned}$$

$$y = uv = \frac{1}{x^3}\left(\frac{9}{7}x^7 + C\right) = \frac{9}{7}x^4 + \frac{C}{x^3}.$$

Bernoullijeva diferencijalna jednačina

To je diferencijalna jednačina oblika

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}, \ \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.} \tag{11}$$

Smena:

$$z(x) = (y(x))^{1-\alpha}, \qquad z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x),$$

Jednačina

$$z'(x) + (1-\alpha)f(x)z(x) = (1-\alpha)g(x).$$

je linearna diferencijalna jednačina.

Primer

Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' + \frac{1}{x}y = xy^2$.

Ako jednačinu podelimo sa y^2, dobijamo

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} = x.$$

Smena1: $z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{1}{y^2}y'$

$$z' - \frac{1}{x}z = -x,$$

Smena2: $z = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = -x \Rightarrow u'v + u(v' - \frac{1}{x}v) = -x$$

Primer - nastavak

Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' + \frac{1}{x}y = xy^2$.

$$\begin{array}{ll} v' - \frac{1}{x}v = 0 & \qquad u'v = -x \\ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} & \qquad u'x = -x \\ \ln|v| = \ln|x| & \qquad u' = -1 \\ v = x & \qquad u = -x + C \end{array}$$

$$z = uv = x(-x + C) = -x^2 + Cx$$

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{-x^2 + Cx}.$$

Jednačina totalnog diferencijala

Jednačina

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0} \tag{12}$$

je **jednačina totalnog diferencijala** ako postoji funkcija $F = F(x,y)$ čiji je totalni diferencijal jednak levoj strani te jednačine, tj. za koju u nekoj oblasti važi

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

tj.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y).$$

Ako postoji takva funkcija, onda iz $dF(x,y) = 0$ sledi da je rešenje jednačine (12)

$$F(x,y) = C.$$

Jednačina totalnog diferencijala

Teorema

Neka su $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ *i* $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ *neprekidne u jednostruko povezanoj oblasti* G.
Jednačina (12) je jednačina totalnog diferencijala ako i samo ako za svako $(x,y) \in G$ *važi*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \tag{13}$$

Primer

Primer

Pokazati da je

$$(3x^2y - 6x)dx + (x^3 + 2y)dy = 0$$

jednačina totalnog diferencijala i rešiti je.

Ako uvedemo oznake $P = 3x^2y - 6x$ i $Q = x^3 + 2y$, onda je $P_y = 3x^2 = Q_x$, odakle sledi da je zadata jednačina totalnog diferencijala i postoji funkcija $F(x, y) = C_1$ za koju je

$$F_x(x,y) = 3x^2y - 6x \qquad F_y(x,y) = x^3 + 2y$$
$$F(x,y) = x^3y - 3x^2 + \varphi(y)$$
$$F_y(x,y) = x^3 + \varphi'(y)$$

$$\begin{gathered} x^3 + \varphi'(y) = x^3 + 2y \\ \varphi'(y) = 2y \\ \varphi(y) = y^2 + C_2 \\ F(x,y) = x^3y - 3x^2 + y^2 = C. \end{gathered}$$

Integracioni množitelj

Ako nije ispunjen uslov $P_y = Q_x$, postavlja se pitanje da li postoji funkcija $h = h(x, y)$ za koju

$$h(x, y)P(x, y)dx + h(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

jeste jednačina totalnog diferencijala.

Ako postoji takva funkcija, onda se kaže da je izraz $h(x, y)$ **integracioni množitelj.**

Primer

Primer

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(2x + x^2y + y^3)dx + (2y + x^3 + xy^2)dy = 0,$$

ako ona ima integracioni množitelj oblika $f(t)$ *gde je* $t = xy$.

Neka je $h(x, y) = f(t(x, y))$, gde je $t = xy$. Tada je, koristeći lančana pravila

$$h_x(x, y) = \frac{df}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{f}(t) \cdot y \text{ i } h_y(x, y) = \frac{df}{dt}\frac{dt}{dy} = \dot{f}(t) \cdot x.$$

$$t = xy \Rightarrow t_x = y, t_y = x$$

Neka je

$$P_1 = f(t)(2x + x^2y + y^3) \qquad Q_1 = f(t)(2y + x^3 + xy^2)$$

Primer

$$
\begin{aligned}
& P_y = Q_x \\
\Leftrightarrow \quad & \dot{f}(t)x(2x + x^2y + y^3) + f(t)(x^2 + 3y^2) = \dot{f}(t)y(2y + x^3 + xy^2) + f(t)(3x^2 + y^2) \\
\Leftrightarrow \quad & \dot{f}(t)(2x^2 - 2y^2) = f(t)(2x^2 - 2y^2) \\
\Leftrightarrow \quad & \dot{f}(t) = f(t) \Leftrightarrow \frac{df(t)}{f(t)} = dt \\
\Leftrightarrow \quad & \ln f(t) = t \\
\Leftrightarrow \quad & f(t) = e^t
\end{aligned}
$$

Znači, integracioni množitelj je e^{xy} i zadata diferencijalna jednačina je ekvivalentna jednačini

$$(2x + x^2y + y^3)e^{xy}dx + (2y + x^3 + xy^2)e^{xy}dy = 0.$$

Primer

Primer

Rešiti jednačinu totalnog diferencijala

$$(2x + x^2y + y^3)e^{xy}dx + (2y + x^3 + xy^2)e^{xy}dy = 0.$$

$$\begin{aligned}
F_x &= (2x + x^2y + y^3)e^{xy} \\
F &= 2\int xe^{xy}dx + y\int (x^2 + y^2)e^{xy}dx + \varphi(y) \\
F &= 2\int xe^{xy}dx + y\left(\frac{1}{y}(x^2 + y^2)e^{xy} - \frac{2}{y}\int xe^{xy}dx\right) + \varphi(y) \\
F &= (x^2 + y^2)e^{xy} + \varphi(y) \\
F_y &= 2ye^{xy} + (x^3 + xy^2)e^{xy} + \varphi'(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_y &= (2y + x^3 + xy^2)e^{xy} \\
F_y &= 2ye^{xy} + (x^3 + xy^2)e^{xy} \\
F_y &= 2ye^{xy} + (x^3 + xy^2)e^{xy}
\end{aligned}$$

$$2ye^{xy} + (x^3 + xy^2)e^{xy} + \varphi'(y) = 2ye^{xy} + (x^3 + xy^2)e^{xy}$$

$$\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C$$

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)e^{xy} + C$$

Rešenje zadate diferencijalne jednačine je

$$(x^2 + y^2)e^{xy} + C = 0.$$