Teorija izračunljivosti

Ivan Prokić
kabinet 117, F blok
prokic@uns.ac.rs
http://imft.ftn.uns.ac.rs/∼iprokic/

Novi Sad

Tema 1

Master metoda

Master metoda

Daje tesnu granicu za (”skoro sve”) rekurentne relacije oblika

$$T(n) = aT(n/b) + f(n), \tag{1}$$

gde su $a \geq 1, b > 1$ i $f(n)$ je data funkcija.

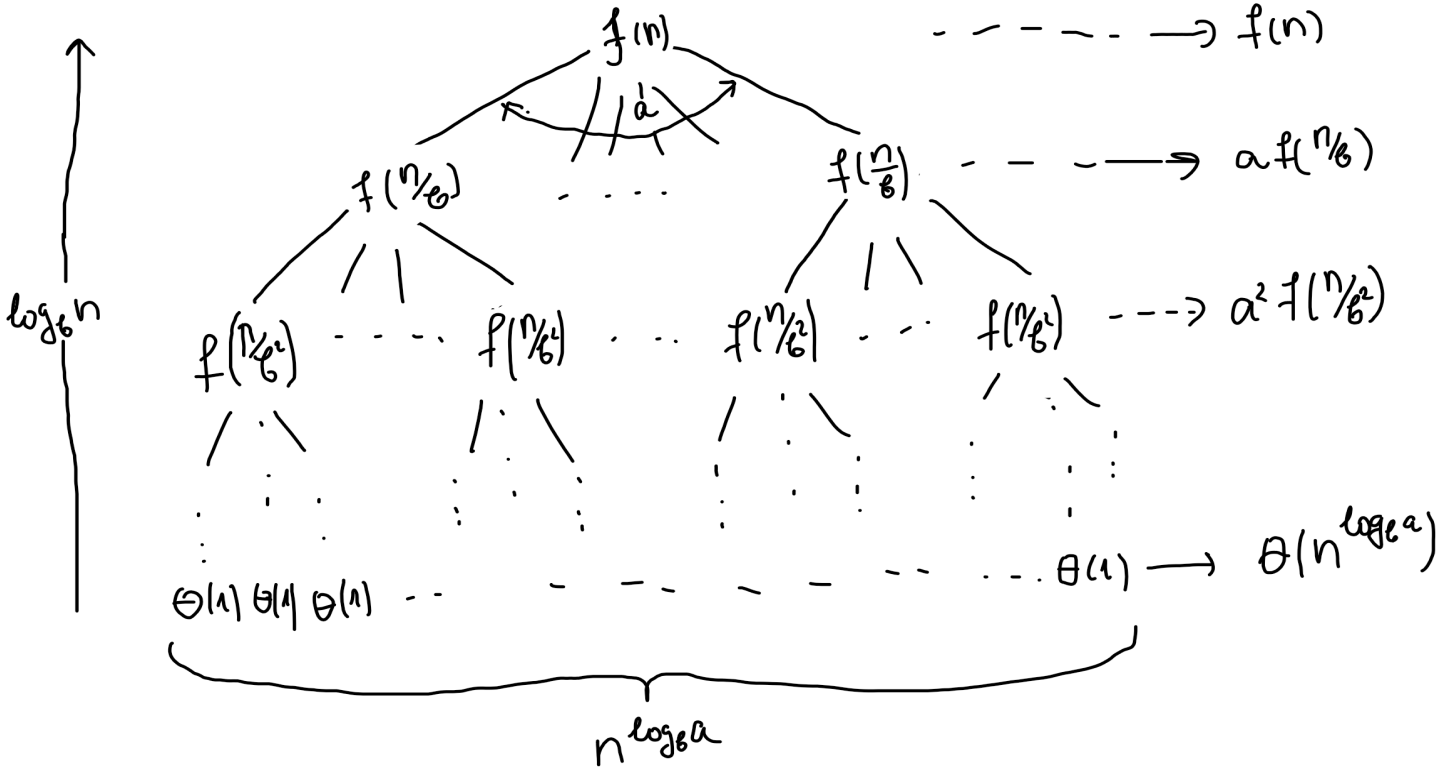
Teorema (Master teorema)

Ako je $T(n)$ *zadato rekurentnom relacijom* (1)*, tada važi:*

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$*, ako je* $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$*, za neku konstantu* $\epsilon > 0$*;*
2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$*, ako je* $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$*;*
3. $T(n) = \Theta(f(n))$*, ako je* $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$*, za neku konstantu* $\epsilon > 0$ *i ako postoji* $n_o > 0$ *takvo da je* $af(n/b) \leq cf(n)$ *za neko* $c < 1$ *i sve* $n \geq n_0$*;*

Master teorema: skica dokaza za $n = b^m$

Neka je $n = b^m$. Tada je rekurzivno stablo oblika:



Master teorema: skica dokaza za $n = b^m$

Na i-tom nivou:

- veličina argumenta u čvoru je $\frac{n}{b^i}$ - pa je na posledenjem nivou $\frac{n}{b^i} = 1$, odakle je $i = \log_b n$, a broj nivoa je $\log_b n + 1$;
- broj čvorova je a^i i svaki čvor vredi $f\left(\frac{n}{b^i}\right)$- pa je cena za čitav nivo $a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$. Na poslednjem nivou ima $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$ čvorova. Kako je $T(1)$ konstana cena poslednjeg nivoa je $\Theta(n^{\log_b a})$.

Dakle, vredi

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right). \tag{2}$$

Prvo treba da odredimo složenost za $g(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$.

Master teorema: skica dokaza za $n = b^m$

Lema

Neka je $a \geq 1$ *i* $b > 1$ *konstante i neka je* $g(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$. *Tada važe sledeće ocene:*

1. $g(n) = O(n^{\log_b a})$, *ako je* $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, *za neko* $\epsilon > 0$;
2. $g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$, *ako je* $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;
3. $g(n) = \Omega(f(n))$, *ako postoji* $n_0 > 0$ *takvo da je* $af(n/b) \leq cf(n)$, *za neko* $c < 1$ *i svako* $n \geq n_0$.

Prvi slučaj. Iz $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ sledi $f(n/b^i) = O((n/b^i)^{\log_b a - \epsilon})$, pa imamo

$$\begin{aligned} g(n) &\leq d \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a - \epsilon} = dn^{\log_b a - \epsilon} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} \left(\frac{ab^\epsilon}{b^{\log_b a}}\right)^i \\ &= dn^{\log_b a - \epsilon} \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} (b^\epsilon)^i = \frac{b^{\epsilon \log_b n} - 1}{b^\epsilon - 1} dn^{\log_b a - \epsilon} = \frac{n^\epsilon - 1}{b^\epsilon - 1} dn^{\log_b a - \epsilon}. \end{aligned}$$

Pošto su b i ϵ konstante, iz poslednjeg imamo $g(n) = O(n^\epsilon) \cdot O(n^{\log_b a - \epsilon}) = O(n^{\log_b a})$, tj. $g(n) = O(a^{\log_b n})$.

Nastavak dokaza leme

Drugi slučaj. Iz $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ sledi $f(n/b^i) = \Theta((n/b^i)^{\log_b a})$, odakle sledi

$$\begin{aligned} g(n) &= \Theta\left(\sum_{i=0}^{\log_b n-1} a^i (n/b^i)^{\log_b a}\right) = \Theta\left(n^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\log_b n-1} 1\right) \\ &= \Theta\Big(n^{\log_b a} \log_b n\Big) = \Theta\Big(n^{\log_b a} \lg n\Big). \end{aligned}$$

Treći slučaj. Pošto je $g(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n-1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$, i svi sabirci sa desne strane su pozitivni možemo zaključiti $g(n) = \Omega(f(n))$. Iz uslova $af(n/b) \leq cf(n)$, za neko $c < 1$ i sve $n \geq n_0$, imamo $f(n/b) \leq (c/a)f(n)$, odnosno $f(n/b^i) \leq (c/a)f(n/b^{i-1}) \leq \ldots \leq (c/a)^i f(n)$, odakle je $a^i f(n/b^i) \leq c^i f(n)$. Iz poslednjeg sledi

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{i=0}^{\log_b n-1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \leq \sum_{i=0}^{\log_b n-1} c^i f(n) + O(1) \\ &\leq f(n) \sum_{i=0}^{\infty} c^i + O(1) = \frac{1}{1-c} f(n) + O(1) = O(f(n)), \end{aligned}$$

gde je $O(1)$ ograničenje za sve članove sume za koje je $i \leq n_0$ (jer za njih $a^i f(n/b^i) \leq c^i f(n)$ ne mora da važi). Iz $g(n) = \Omega(f(n))$ i $g(n) = O(f(n))$ sledi $g(n) = \Theta(f(n))$.

Master teorema: skica dokaza za $n = b^m$ - kraj

Za izvedeno $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$, na osnovu prethodne leme možemo zaključiti:

1. Ako je $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, za neku konstantu $\epsilon > 0$, tada važi
$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + O(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_b a});$$
2. Ako je $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, tada
$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \Theta(n^{\log_b a} \lg n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n);$$
3. Ako je $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$, za neku konstantu $\epsilon > 0$ i ako postoji $n_o > 0$ takvo da je $af(n/b) \leq cf(n)$ za neko $c < 1$ i sve $n \geq n_0$, tada
$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \Theta(f(n)) = \Theta(f(n)).$$

Master metod: primeri

Koristeći Master metod dati tesne granice za:

1. $T(n) = 4T(n/2) + n$;
   - Ovde je $a = 4$ i $b = 2$, pa imamo $n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = \Theta(n^2)$. Kako je $f(n) = n = O(n^{\log_2 4 - \epsilon})$, za $\epsilon = 1$, možemo primeniti 1. slučaj Master teoreme i rešenje je $T(n) = \Theta(n^2)$.
2. $T(n) = T(3n/4) + 2$;
   - Ovde je $a = 1$ i $b = 4/3$, pa imamo $n^{\log_b a} = n^{\log_{4/3} 1} = \Theta(1)$. Kako je $f(n) = 2 = \Theta(1) = \Theta(n^{\log_b a})$, možemo primeniti 2. slučaj Master teoreme i rešenje je $T(n) = \Theta(\lg n)$.
3. $T(n) = 2T(n/3) + n \lg n$;
   - Ovde je $a = 2$ i $b = 3$, pa imamo $n^{\log_b a} = n^{\log_3 2}$. Kako je $f(n) = n \lg n = \Omega(n^{\log_3 2 + \epsilon})$, za $\epsilon = 0,3$ (jer je $\log_3 2 \approx 0,63$), i za svako n (veće od $n_0 = 3$) važi uslov regularnosti $af(n/b) = 2(n/3)\lg(n/3) \leq (2/3)n \lg n = cf(n)$, za $c = 2/3$, možemo primeniti 3. slučaj Master teoreme i rešenje je $T(n) = \Theta(n \lg n)$.

Master metod: ”rupe”

Između 1. i 2, kao i između 2. i 3. slučaja Master teoreme postoje ”rupe”, tj. Master metod ne daje rešenje za sve rekurentne relacije oblika $T(n) = aT(n/b) + f(n)$. Razlog je što $f(n)$ i $n^{\log_b a}$ moraju da se bar ”polinomno” razlikuju da bi primenili 1. ili 3. slučaj Master teoreme.

Primer

Na rekurentnu relaciju $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \lg n$ ne možemo primeniti Master teoremu jer $n^{\log_b a} = n^2$, a $f(n) = n^2 \lg n$.

Pošto je $f(n) = n^2 \lg n$ brže rastuća od n^2 možemo pomisliti da možemo primeniti 3. slučaj Master teoreme. Međutim, to nije slučaj jer ne možemo naći $\epsilon > 0$ takvo da je $f(n) = n^2 \lg n = \Omega(n^{\log_2 4+\epsilon}) = \Omega(n^{2+\epsilon})$ jer je $\lg n$ sporije rastuća funkcija od n^ϵ za svako $\epsilon > 0$.

Master metod: zadaci

Zadatak

Koristeći Master metod dati tesne granice za sledeće rekurentne relacije:

1. $T(n) = 4T(n/2) + 1$;
2. $T(n) = 4T(n/2) + n\sqrt{n}$;
3. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$;
4. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$;
5. $T(n) = T(n/2) + 1$;
6. $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$.

Rešenje. Na času. $\diamond$

Tema 2

Linearne rekurentne relacije

Linearne rekurentne relacije: primer

Problem: Izračunati n-ti član Fibonačijevog niza
$f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = f_2 + f_1, \ldots, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Pretpostavimo da je $n \geq 1$. Rešenje:

Algorithm 1: $F(n)$

if $n \leq 2$ **then**
  return 1
else
  return $F(n-1) + F(n-2)$

Vreme rada algoritma (u univerzalnom sistemu) je:

$$T(n) = \Theta(1) + T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1).$$

Kako dati dobru ocenu za ovakvu rekurentnu relaciju?

Domaći: Napisati iterativni algoritam za računanje Fibonačijevog n-tog broja koji radi u vremenu $O(n)$.

Linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima: oblik

Definicija

Linearna rekurentna relacija k-tog reda sa konstantnim koeficijentima je oblika:

$$T(n) = a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \ldots + a_k T(n-k) + f(n),$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ realne konstante i $k \leq n$.

Uz početne uslove $T(0) = t_0, T(1) = t_1, \ldots, T(k-1) = t_{k-1}$ čini početni problem.

- Ako je $f(n) = 0$ linearna rekurentna relacija se zove homogena.
- Ako je $f(n) \neq 0$ linearna rekurentna relacija se zove nehomogena.

Pitanje: Podseća na nešto? Pogledajte gradivo iz linearnih diferencijalnih jednačina višeg reda.

Tema 3

Homogena linearna rekurentna relacija

Homogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Opšti oblik:

$$T(n) = a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \ldots + a_k T(n-k).$$

Rešenje tražimo uvodeći smenu $T(i) = x^i$, pa dobijamo:

$$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_k x^{n-k} = 0.$$

Nakon deljenja sa $x^{n-k} \neq 0$ dobijamo **karakteristični polinom**:

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \ldots - a_k = 0.$$

Sledi: Radi lakšeg razumevanja u nastavku ćemo prvo obraditi homogene linearne rekurentne relacije drugog reda.

Homogena linearna rekurentna relacija drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Opšti oblik:

$$T(n) = a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2),$$

gde su $a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0$ realne konstante i sa $T(0) = t_0, T(1) = t_1$ su dati početni uslovi. Smenom $T(i) = x^i$, od rekurentne relacije dobijamo karakteristični polinom $x^2 - a_1 x - a_2 = 0$.

Teorema

Ako su koreni karakterističnog polinoma z_1 i z_2, razlikujemo dva slučaja:

- $z_1 \neq z_2$*: rešenje je* $T(n) = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n$*, gde su konstante* C_1 *i* C_2 *(koje mogu biti i kompleksne, ako su* z_1 *i* z_2 *kompleksni) jedinstveno određene početnim uslovima;*
- $z_1 = z_2$*: rešenje je* $T(n) = C_1 z_1^n + C_2 n z_1^n$*, gde su (realne) konstante* C_1 *i* C_2 *jedinstveno određene početnim uslovima.*

Dokaz teoreme

- $z_1 \neq z_2$: Pokažimo da je $T(n) = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n$ rešenje za $T(n) = a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2)$ za sve (potencijalno kompleksne) konstante C_1 i C_2.

$$\begin{aligned}
&a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) \\
&= a_1 \left(C_1 z_1^{n-1} + C_2 z_2^{n-1} \right) + a_2 \left(C_1 z_1^{n-2} + C_2 z_2^{n-2} \right) \\
&= C_1 z_1^{n-2} (a_1 z_1 + a_2) + C_2 z_2^{n-2} (a_1 z_2 + a_2) \\
&= C_1 z_1^{n-2} z_1^2 + C_2 z_2^{n-2} z_2^2 = T(n).
\end{aligned}$$

- $z_1 = z_2$: Pokažimo da je $T(n) = C_1 z_1^n + C_2 n z_1^n$ rešenje za $T(n) = a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2)$ za sve konstante C_1 i C_2 (iz $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}
&a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) \\
&= a_1 \left(C_1 z_1^{n-1} + C_2 (n-1) z_1^{n-1} \right) + a_2 \left(C_1 z_1^{n-2} + C_2 (n-2) z_1^{n-2} \right) \\
&= C_1 z_1^{n-2} (a_1 z_1 + a_2) + C_2 n z_1^{n-2} (a_1 z_1 + a_2) - C_2 z_1^{n-2} (a_1 z_1 + 2a_2) \\
&= C_1 z_1^{n-2} z_1^2 + C_2 n z_1^{n-2} z_1^2 + 0 = T(n).
\end{aligned}$$

Gde smo u oba slučaja koristili $a_1 z_i + a_2 = z_i^2$, $i = 1, 2$, na osnovu karakterističnog polinoma. U drugom slučaju imamo $z^2 - a_1 z - a_2 = (z - z_1)^2 = z^2 - 2z_1 z + z_1^2$, odakle je $a_1 = 2z_1$ i $a_2 = -z_1^2$, te je $a_1 z_1 + 2a_2 = 2z_1^2 - 2z_1^2 = 0$.

Dokaz teoreme - nastavak

Pokazujemo da su konstante C_1, C_2 jedinstveno određene početnim uslovima $T(0) = t_0, T(1) = t_1$.

- $z_1 \neq z_2$: Zamenom početnih uslova u opšte rešenje $T(n) = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n$ dobijamo sistem

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & + & C_2 & = & t_0 \\ z_1 C_1 & + & z_2 C_2 & = & t_1 \end{array}$$

  čija je determinanta $D_s = z_2 - z_1 \neq 0$, odakle sledi da sistem ima jedinstveno rešenje po C_1 i C_2.

- $z_1 = z_2$: Zamenom početnih uslova u opšte rešenje $T(n) = C_1 z_1^n + C_2 n z_1^n$ dobijamo sistem

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & + & & = & t_0 \\ z_1 C_1 & + & z_1 C_2 & = & t_1 \end{array}$$

  čija je determinanta $D_s = z_1 \neq 0$ (jer $a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0$), odakle sledi da sistem ima jedinstveno rešenje po C_1 i C_2.

Dokaz teoreme - kompleksni koreni

Pošto je karakteristični polinom sa realnim koeficijentima znamo da važi: ako je $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ koren polinoma tada je $\overline{z}_1$ takođe koren. U tom slučaju važi $z_1 \neq \overline{z}_1$, tj. opšte rešenje je oblika $T(n) = C_1 z_1^n + C_2 \overline{z}_1^n$. Neka je $z_1 = \alpha + i\beta = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Sledi:

- Važi $C_1 = \overline{C}_2$, jer iz $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ i sistema

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & + & C_2 & = & t_0 \\ z_1 C_1 & + & \overline{z}_1 C_2 & = & t_1 \end{array}$$

  koji dobijamo iz početnih uslova, imamo $Im(C_1 + C_2) = 0$, tj. $Im(C_2) = -Im(C_1)$ (iz prve jednačine). Iz druge jednačine imamo

$$\begin{aligned} & Im(z_1 C_1 + \overline{z}_1 C_2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha Im(C_1) + \beta Re(C_1) - \alpha Im(C_1) - \beta Re(C_2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \beta(Re(C_1) - Re(C_2)) = 0, \end{aligned}$$

  a pošto je $\beta \neq 0$ (jer $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$), sledi $Re(C_1) = Re(C_2)$.
- Neka je $C_1 = E - iF$. Iz Moavrove formule imamo $z_1^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. Opšte rešenje se sada oblika

$$\begin{aligned} T(n) &= C_1 z_1^n + \overline{C}_1 \overline{z}_1^n = 2Re(C_1 z_1^n) \\ &= \rho^n(2E\cos n\varphi + 2F\sin n\varphi). \end{aligned}$$

Homogena linearna rekurentna relacija drugog reda sa konstantnim koeficijentima

$$T(n) = a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) \quad \Rightarrow \quad x^2 - a_1 x - a_0 = 0.$$

Da rezimiramo:

- Ako su koreni z_1, z_2 **realni i različiti**, opšte rešenje je oblika

$$T(n) = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n.$$

- Ako su koreni z_1, z_2 **jednaki** (samim tim i realni), opšte rešenje je oblika

$$T(n) = C_1 z_1^n + C_2 n z_1^n.$$

- Ako su koreni z_1, z_2 **kompeksni** i $z_1 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, opšte rešenje je oblika

$$T(n) = \rho^n (E' \cos(n\varphi) + F' \sin(n\varphi)).$$

Fibonačijeva linearna rekurentna relacija

Primer

Rešiti Fibonačijevu rekurentnu relaciju $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$*, uz početne uslove* $F(0) = 0$ *i* $F(1) = 1$*.*

Karakteristični polinom je $x^2 - x - 1 = 0$, čiji su **koreni** $z_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (brojevi "zlatnog preseka"). Pošto su koreni realni i različiti opšte rešenje je

$$F(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Zamenom početnih uslova dobijamo $F(0) = C_1 + C_2 = 0$, tj. $C_2 = -C_1$, pa je $F(1) = C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} - C_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = C_1 \sqrt{5} = 1$, odakle imamo $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Rešenje početnog problema je

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Homogena linearna rekurentna relacija drugog reda sa konstantnim koeficijentima - još primera

Zadatak

Rešiti početne probleme:

1. $T(n) = 4T(n-1) - 4T(n-2)$, $T(0) = 1$, $T(1) = 4$;
2. $T(n) = -9T(n-2)$, $T(0) = 1, T(1) = 6$.

Rešenje.

1. **Karakteristični polinom** je $x^2 - 4x + 4 = 0$, čiji su **koreni** $z_{1/2} = 2$. Pošto imamo dvostruki koren opšte rešenje je $T(n) = C_1 2^n + C_2 n 2^n$. Iz početnih uslova dobijamo $T(0) = C_1 = 1$, pa iz $T(1) = 2C_1 + 2C_2 = 4$ imamo $C_2 = 1$. Rešenje je
$$T(n) = 2^n + n2^n.$$
2. **Karakteristični polinom** je $x^2 + 9 = 0$, čiji su **koreni** $z_{1/2} = \pm 3i = 3(\cos(\pi/2) \pm i \sin(\pi/2))$. Pošto su koreni kompleksni, opšte rešenje je $T(n) = 3^n(C_1 \cos(n\pi/2) + C_2 \sin(n\pi/2))$. Iz početnih uslova dobijamo $T(0) = C_1 = 1$ i $T(1) = 3C_2 = 6$. Rešenje je
$$T(n) = 3^n(\cos(n\pi/2) + 2\sin(n\pi/2)).$$

◇

Homogene linearne rekurentne relacije n-tog reda sa konstantnim koeficijentima (bez dokaza)

$$\begin{aligned} T(n) &= a_1T(n-1) + a_2T(n-2) + \ldots + a_kT(n-k) \\ \Rightarrow & \quad x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \ldots - a_k = 0. \end{aligned}$$

Ako su $z_1, z_2, \ldots, z_k$ svi koreni karakterističnog polinoma, opšte rešenje je oblika

$$C_1f_1(z_1) + C_2f_2(z_2) + \ldots + C_kf_k(z_k) = 0,$$

pri čemu

- ako je $z_{i_1} = z_{i_2} = \ldots = z_{i_m}$ **realan koren višestrukosti** $m \geq 1$ tada

$$f_{i_1}(z_{i_1}) = z_{i_1}^n, f_{i_2}(z_{i_2}) = nz_{i_1}^n, \ldots, f_{i_m}(z_{i_m}) = n^{m-1}z_{i_1}^n;$$

- ako je $z_{i_1} = \ldots = z_{i_m} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ **kompleksan koren višestrukosti** $m \geq 1$ tada je i $z_{j_1} = \ldots = z_{j_m} = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ i važi

$$f_{i_1}(z_{i_1}) = \rho^n\cos(n\varphi), \ldots, f_{i_m}(z_{i_m}) = n^{m-1}\rho^n\cos(n\varphi);$$

$$f_{j_1}(z_{j_1}) = \rho^n\sin(n\varphi), \ldots, f_{j_m}(z_{j_m}) = n^{m-1}\rho^n\sin(n\varphi).$$

Tema 4

Nehomogena linearna rekurentna relacija

Nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Opšti oblik **nehomogene** jednačine

$$T(n) = a_1T(n-1) + a_2T(n-2) + \ldots + a_kT(n-k) + f(n),$$

gde su $a_1, \ldots, a_k$ realne konstante i $f(n) \neq 0$ realna funkcija.

Ovoj nehomogenoj jednačini odgovara **homogena**

$$T(n) = a_1T(n-1) + a_2T(n-2) + \ldots + a_kT(n-k).$$

Nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Teorema

Neka je $T_p(n)$ jedno (partikularno) rešenje nehomogene jednačine. Ako je $T(n)$ opšte rešenje nehomogene jednačine, tada je

$$T_h(n) = T(n) - T_p(n)$$

opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine.

Ako su $T_p(n)$ i $T(n)$ rešenja nehomogene rekurentne relacije, onda za njih važi

$$\begin{array}{rcccccccc} T(n) & = & a_1T(n-1) & + & \dots & + & a_kT(n-k) & + & f(n) \\ T_p(n) & = & a_1T_p(n-1) & + & \dots & + & a_kT_p(n-k) & + & f(n) \end{array}$$

Ako od prve jednačine oduzmemo drugu,

$$T(n) - T_p(n) \quad = \quad a_1(T(n-1) - T_p(n-1)) \quad + \quad \dots \quad + \quad a_k(T(n-k) - T_p(n-k))$$

odakle je $T(n) - T_p(n)$ rešenje odgovarajuće homogene rekurentne relacije i

$$T_h(n) = T(n) - T_p(n) \quad \Leftrightarrow \quad T(n) = T_h(n) + T_p(n).$$

Nehomogena: pogađanje oblika partikularnog rešenja

Neka je nehomogeni deo linearne jednačine oblika

$$f(n) = t^n(b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \ldots + b_0),$$

gde su $b_m, \ldots, b_0$ realne konstante.
Tada je partikularno rešenje je oblika

$$T_p(n) = n^l t^n (d_m n^m + d_{m-1} n^{m-1} + \ldots + d_0),$$

gde je

- $d_m n^m + d_{m-1} n^{m-1} + \ldots + d_0$ polinom m-tog stepena (istog kao u nehomogenom delu) sa neodređenim koeficijentima;
- l je višestrukost korena t karakteristične jednačine (ako t nije koren onda uzimamo $l = 0$).

Složenost algoritma za računanje n-tog Fibonačijevog broja

Za vreme rada tog algoritma (u univerzalnom sistemu) imali smo:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1).$$

Zadatak

Rešiti rekurentnu relaciju $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + d$.

Opšte rešenje tražimo u obliku $T(n) = T_h(n) + T_p(n)$, gde smo ranije već odredili rešenje odgovarajuće homogene rekurentne relacije $T_h(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Kako je $f(n) = d$ sledi da je partikularno rešenja oblika $T_p(n) = A$, pa zamenom u početnu rekurentnu relaciju dobijamo $A = A + A + d$, odakle je $A = -d$. Opšte rešenje početne rekurentne relacije je

$$T(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - d.$$

Napomena: Ovaj algoritam je **eksponencijalne složenosti**, jer je $T(n) = \Theta\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima: primeri

Zadatak

Odrediti rešenje rekurentne relacije
$T(n) = 4T(n-1) - 4T(n-2) + 2^n$, $T(0) = 1$, $T(1) = 4$.

Rešenje je oblika $T(n) = T_h(n) + T_p(n)$, gde smo ranije odredili $T_h(n) = C_1 2^n + C_2 n 2^n$. Kako je nehomogeni deo $f(n) = 2^n$, imamo da je partikularno rešenje oblika $T_p(n) = An^2 2^n$ (imamo član n^2 jer je 2 dvostruki koren karakterističnog polinoma homogenog dela). Zamenom u početnu rekurentnu relaciju imamo

$$An^2 2^n = 4A(n-1)^2 2^{n-1} - 4A(n-2)^2 2^{n-2} + 2^n,$$

gde nakon deljenja sa 2^{n-2} i sređivanja dobijamo $A = 1/2$. Dakle, opšte rešenje je

$$T(n) = C_1 2^n + C_2 n 2^n + n^2 2^{n-1}.$$

Iz početnih uslova dobijamo $T(0) = C_1 = 1$, pa iz $T(1) = 2C_1 + 2C_2 + 1 = 4$ imamo $C_2 = 1/2$. Rešenje je

$$T(n) = 2^n + n2^{n-1} + n^2 2^{n-1}.$$

Nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima: zadaci

Zadatak

Odrediti opšta rešenja sledećih rekurentnih relacija:

1. $T(n) = 3T(n-1) + n$;
2. $T(n) = 3T(n-1) + n^2 + 1$;
3. $T(n) = 3T(n-1) + n3^n$;
4. $T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + 2$;
5. $T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + n + 2$;
6. $T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + 5^n$.

Rešenje. Na času. $\diamond$