Teorija izračunljivosti

Ivan Prokić
kabinet 117, F blok
prokic@uns.ac.rs
http://imft.ftn.uns.ac.rs/∼iprokic/

Novi Sad

Tema 1

Teorija algoritama

Izračunljivost

Pitanje 1: Šta je to algoritam? Ovaj put tražimo preciznu matematičku definiciju.
Pitanje 2: Da li za svaki matematički problem možemo da napravimo algoritam koji ga rešava?

David Hilbert je mislio: DA! U ovkiru svake aksiomatske teorije za svako tvrđenje možemo mehanički proveriti da li je tačno ili ne.

Međutim, **Kurt Gedel** je pokazao da u okviru svake aksiomatske teorije koja u sebi sadrži aksiome prirodnih brojeva (odnosno Peanove aksiome) postoji formula koja važi na $\mathbb{N}$ ali nije posledica posmatranih aksioma. Tj. teorija prirodnih brojeva nije **kompletna**, pa ni **odlučiva** jer ne postoji algoritam koji bi za datu formulu uvrđivao da li ona važi na $\mathbb{N}$ ili ne.

Pogledati prvih 9 min predavanja prof. Filipa Vadlera:
`https://www.youtube.com/watch?v=IOiZatlZtGU`

Izračunljivost - Čerčova teza

Tri modela izračunljivosti:

- **Rekurzivne funkcije** - Kurt Gedel;
- **Tjuringove mašine** - Alan Tjuring;
- λ **račun** - Alonzo Čerč.

Sva tri modela su ekvivalenta!!!

Čerčova teza: Klasa izračunljivih funkcija se poklapa sa klasom λ-definabilnih/Tjuring-izračunljivih/rekurzivnih funkcija.

Kasnije su se pojavili i drugi modeli izračunljivosti: Postovi sistemi, algoritmi Markova, gramatike Čomskog, mašine Minskog, **while** programi, itd.

Tema 2

Prosto rekurzivne funkcije

Prosto (primitivno) rekurzivne funkcije

Definicija (Osnovne funkcije)

1. **Nula funkcija**: $N(x) = 0$, *za sve* $x \in \mathbb{N}$.
2. **Sledbenička funkcija**: $S(x) = x + 1$, *za sve* $x \in \mathbb{N}$.
3. **Projekcije**: $I_k^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, *za* $k \in \{1, \ldots, n\}$, *date sa* $I_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k$.

Definicija (Kompozicija i šema proste rekurzije)

1. *Za date funkcije* $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *i* $h_1, \ldots, h_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, **kompozicija** $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *je definisana sa* $f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n))$.
2. *Za date* $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *i* $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ *kažemo da je* $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *dobijena* **šemom proste rekurzije** *ako za sve* $x_1, \ldots, x_n, y \in \mathbb{N}$:
   - $f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$;
   - $f(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$.

Prosto rekurzivne funkcije

Napomena: u šemi proste rekurzije $x - 1, \ldots, x_n$ se zovu parametri rekurzije, a y glavna promenljiva po kojoj je rekurzija i definisana.

Prosto rekurzivne funkcije su one koje možemo dobiti od osnovnih konačnom primenom pravila za kompoziciju i šemu proste rekurzije.

Prosto rekurzivne funkcije predstavljaju značajnu klasu Gedelovih **rekurzivnih funkcija**.

Teorema (Teorema rekurzije)

Za date funkcije $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *i* $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ *postoji jedinstvena funkcija* $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *koja zadovoljava uslove:*

- $f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$;
- $f(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$.

Dokaz nećemo raditi. Zainteresovani mogu naći ovaj dokaz u knjizi prof. Dolinke.

Prosto rekurzivne funkcije: primeri

- Sabiranje $+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} +(x,0) &= x = g(x) \\ +(x,y+1) &= x+(y+1) = (x+y)+1 = h(x,y,+(x,y)) \end{aligned}$$

gde je $g(x) = I_1^1(x)$ i $h(x,y,z) = S(I_3^3(x,y,z))$.

Na primer:

$$\begin{aligned} +(3,2) &= h(3,1,+(3,1)) = h(3,1,h(3,0,+(3,0))) \\ &= h(3,1,h(3,0,3)) = h(3,1,4) = 5 \end{aligned}$$

Primetimo: Ako su f i g prosto rekurzivne funkcije, tada je $+(f,g) = f+g$ takođe prosto rekurzivna (jer je u pitanju kompozicija prosto rekurzivnih funkcija $+$ i f,g).

Prosto rekurzivne funkcije: primeri

- Množenje $\cdot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \cdot(x,0) &= 0 = g(x) \\ \cdot(x,y+1) &= x \cdot (y+1) = x \cdot y + x = h(x,y,\cdot(x,y)) \end{aligned}$$

gde je $g(x) = N(x)$ i
$h(x,y,z) = +(z,x) = +(I_3^3(x,y,z), I_1^3(x,y,z))$.

Na primer:

$$\begin{aligned} \cdot(3,2) &= h(3,1,\cdot(3,1)) = h(3,1,h(3,0,\cdot(3,0))) \\ &= h(3,1,h(3,0,0)) = h(3,1,3) = 6. \end{aligned}$$

Primetimo: Ako su f i g prosto rekurzivne funkcije, tada je $\cdot(f,g) = f \cdot g$ takođe prosto rekurzivna (jer je u pitanju kompozicija prosto rekurzivnih funkcija $\cdot$ i f, g).

Prosto rekurzivne funkcije: primeri

- Unarna funkcija prethodnik $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definisana sa:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x = 0 \\ x - 1 & \text{za } x > 0, \end{cases}$$

je prosto rekurzivna jer je

$$\begin{aligned} P(0) &= 0 = g(x), \\ P(y+1) &= y = h(y, P(y)), \end{aligned}$$

za $g(x) = N(x)$ i $h(x, y) = I_1^2(x, y)$.

Prosto rekurzivne funkcije: primeri

- Operacija monus $\dot{-} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

$$\dot{-}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \leqslant y \\ x - y & \text{za } x > y, \end{cases}$$

je prosto rekurzivna jer

$$\begin{aligned} \dot{-}(x,0) &= x = g(x), \\ \dot{-}(x,y+1) &= h(x,y,\dot{-}(x,y)), \end{aligned}$$

gde je $g(x) = I_1^1(x)$ i $h(x,y,z) = P(I_3^3(x,y,z))$.

Na primer:

$$\begin{aligned} \dot{-}(3,2) &= h(3,1,\dot{-}(3,1)) = h(3,1,h(3,0,\dot{-}(3,0))) \\ &= h(3,1,h(3,0,3)) = h(3,1,2) = 1. \end{aligned}$$

Primetimo: Oduzimanje $x - y$ nije (totalna) funkcija $- : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, pa nije ni prosto rekurzivna.

Eksplicitna transfomacija

Direktno iz definicije kompozicije imamo sledeće tvrđenje.

Teorema

Ako je $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *prosto rekurzivna funkcija i* $h_1, \ldots, h_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *su ili projekcije ili konstantne funkcije. Tada je* $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *je definisana sa*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n)),$$

takođe prosto rekurzivna.

Primer

Ako je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *prosto rekurzivna, tada su* $f(x, y) = g(y, x, 0)$, $h(x, y, z) = g(y, z, x)$ $i(x, y, z, u) = g(x, x, z)$ *takođe prosto rekurzivne.*

Prosto rekurzivne funkcije: još primera

- Unarna funkcija signum $sg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definisana sa:

$$sg(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x = 0 \\ 1 & \text{za } x > 0, \end{cases}$$

je prosto rekurzivna jer je

$$\begin{aligned} sg(0) &= 0 = g(x), \\ sg(y+1) &= 1 = h(y, sg(y)), \end{aligned}$$

za $g(x) = N(x)$ i $h(x, y) = S(N(I_1^2(x, y)))$.

Prosto rekurzivne funkcije: još primera

- Unarna funkcija antisignum $\overline{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definisana sa:

$$\overline{sg}(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x = 0 \\ 0 & \text{za } x > 0, \end{cases}$$

je prosto rekurzivna jer je

$$\begin{aligned} \overline{sg}(0) &= 1 = g(x), \\ \overline{sg}(y+1) &= 0 = h(y, \overline{sg}(y)), \end{aligned}$$

za $g(x) = S(N(x))$ i $h(x, y) = N(I_1^2(x, y))$.

Prosto rekurzivne funkcije: predikati

Unarni predikat je neki podskup od $\mathbb{N}$. Kažemo da je unarni predikat ρ prosto rekurzivan ako je prosto rekuzivna njegova karakteristična funkcija

$$C_\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako važi } \rho(x) \\ 0 & \text{ako ne važi } \rho(x). \end{cases}$$

Za unarni predikat "je veće od nule" karakteristična funkcija je sg, pa je predikat prosto rekurzivan.

Binarni predikat je neki podskup od $\mathbb{N}^2$. Kažemo da je binarni predikat ρ prosto rekurzivan ako je prosto rekuzivna njegova karakteristična funkcija

$$C_\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ako važi } \rho(x, y) \\ 0 & \text{ako ne važi } \rho(x, y). \end{cases}$$

Za binarni predikat "je manje jednako od" karakteristična funkcija je $C_\leqslant(x, y) = leq(x, y) = \overline{sg}(x \dot{-} y)$, pa je predikat prosto rekurzivan.

Analogno za n-arne predikate (tj. n-arne realcije na skupu $\mathbb{N}$).

Prosto rekurzivni predikati: primeri

Sledeći binarni predikati su prosto rekurzivni.

- "$=$": jer je $C_=(x,y) = eq(x,y) = \overline{sg}(|x-y|) = \overline{sg}((x \dot{-} y) + (y \dot{-} x))$;
- "$\neq$": jer je $C_\neq(x,y) = neq(x,y) = sg(|x-y|)$;
- "$<$": jer je $C_<(x,y) = le(x,y) = \overline{sg}(x \dot{-} y) \cdot sg(|x-y|)$;
- "$\geqslant$": $C_\geqslant(x,y) = geq(x,y) =$ domaći;
- "$>$": $C_>(x,y) = ge(x,y) =$ domaći.

Sledeće funkcije su prosto rekurzivne.

- $min(x,y)$: jer je $min(x,y) = le(x,y) \cdot x + geq(x,y) \cdot y$;
- $max(x,y)$: domaći.

Funkcija zadata po slučajevima

Teorema

Neka su $g_1, \ldots, g_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ *prosto rekurzivne funkcije iz* $\mathbb{N}^n$ *u* $\mathbb{N}$ *i neka važi da u svakoj tački iz* $\mathbb{N}^n$ *vrednost najviše jedne od funkcija* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ *je jednaka nuli. Tada je prosto rekurzivna i*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) & \textit{za } \alpha_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots & \ldots \\ g_{k-1}(x_1, \ldots, x_n) & \textit{za } \alpha_{k-1}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ g_k(x_1, \ldots, x_n) & \textit{inače.} \end{cases}$$

Dokaz sledi direktno iz:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) \quad = \quad & \overline{sg}(\alpha_1(x_1, \ldots, x_n)) \cdot g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ & + \ldots + \overline{sg}(\alpha_{k-1}(x_1, \ldots, x_n)) \cdot g_{k-1}(x_1, \ldots, x_n) \\ & + sg(\alpha_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot \ldots \cdot \alpha_{k-1}(x_1, \ldots, x_n)) \\ & \cdot g_k(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Primetimo da $\alpha_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$ definiše jedan (n-aran) predikat na $\mathbb{N}^n$ čija je karakteristična funkcija $\overline{sg}(\alpha_1(x_1, \ldots, x_n))$.

Funkcija zadata po slučajevima: posledica

Teorema

Neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ prosto rekurzivna i $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Ako se vrednosti funkcija f i g ne poklapaju samo na konačno mnogo tačaka iz domena, tada je i g prosto rekurzivna.

Dokaz sledi iz

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} c_1 & \text{ako } (x_1, \ldots, x_n) = (a_1^1, \ldots, a_n^1) \\ \ldots & \ldots \\ c_k & \text{ako } (x_1, \ldots, x_n) = (a_1^k, \ldots, a_n^k) \\ f(x_1, \ldots, x_n) & \text{inače,} \end{cases}$$

ako su $(a_1^1, \ldots, a_n^1), \ldots, (a_1^k, \ldots, a_n^k)$ jedine tačke iz domena u kojima f i g uzimaju različite vrednosti (i g uzima vrednosti $c_1 \ldots, c_k$, redom). Primetimo da je $(x_1, \ldots, x_n) = (a_1^1, \ldots, a_n^1)$ prosto rekurzivni predikat na $\mathbb{N}^n$, jer je njegova karakteristična funkcija $h_1(x_1, \ldots, x_n) = eq(x_1, a_1^1) \cdot \ldots \cdot eq(x_n, a_n^1)$, a karakteristična funkcija predikata "inače" je $i(x_1, \ldots, x_n) = sg(\overline{eq}(x_1, a_1^1) + \ldots + \overline{eq}(x_n, a_n^1)) \cdot \ldots \cdot sg(\overline{eq}(x_1, a_1^k) + \ldots + \overline{eq}(x_n, a_n^k))$.

Iteracija je specijalan slučaj rekurzije: o zbiru

Teorema (Teorema o zbiru)

Neka je $u : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *prosto rekurzivna funkcija. Tada je prosto rekurzivna i* $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *definisana sa*

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{i=0}^{x_n} u(x_1, \ldots, x_{n-1}, i).$$

Dokaz. Šema proste rekurzije za f je

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) &= g(x_1, \ldots, x_{n-1}), \\ f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + 1) &= h(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)), \end{aligned}$$

za $g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ i

$h(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, y) = y + u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + 1)$, jer je

$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + 1) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) + u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + 1)$.

Iteracija je specijalan slučaj rekurzije: o proizvodu

Teorema (Teorema o proizvodu)

Neka je $u : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *prosto rekurzivna funkcija. Tada je prosto rekurzivna i* $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *definisana sa*

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \prod_{i=0}^{x_n} u(x_1, \ldots, x_{n-1}, i).$$

Dokaz ide analogno dokazu Teoreme o zbiru.

Podestimo se: ako su $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ prosto rekurzivne tada su to i $\sum_{i=1}^n f_i$ i $\prod_{i=1}^n f_i$ po definiciji kompozicije (recimo, važi $\sum_{i=1}^n f_i = +(f_1, +(\ldots, +(f_{n-1}, f_n)\ldots))$).

Primeri

Prosto rekurzivne su:

- kompletiranje celobrojnog deljenja dato sa

$$q(x,y) = \begin{cases} \lfloor x/y \rfloor & \text{ako je } y > 0 \\ x & \text{ako je } y = 0, \end{cases}$$

  jer možemo da brojimo koliko puta dodajemo y sve dok suma ne postane veća od x, tj. $q(x,y) = \sum_{i=1}^{x} geq(x, iy)$.
- ostatak pri deljenju $rest(x,y)$, jer je $rest(x,y) = x \dot{-} q(x,y) \cdot y$. Za ovako definisano, važi $rest(x,0) = 0$.
- predikat "x je deljivo sa y", jer je karakteristična funkcija

$$div(x,y) = sg(y) \cdot \overline{sg}(rest(x,y)),$$

  koje za $y = 0$ vraća vrednost 0.

Primeri

Prosto rekurzivne su:

- broj delitelja broja x, jer ga možemo definisati kao

$$\gamma(x) = \sum_{i=1}^{x} div(x, i).$$

- predikat "x je prost", jer je karakteristična funkcija

$$Pr(x) = eq(\gamma(x), 2).$$

- broj prostih brojeva $\leqslant x$, jer ga možemo definisati sa

$$\pi(x) = \sum_{i=2}^{x} Pr(i).$$

- $NZD(x, y)$ i $NZS(x, y)$ (bez dokaza).

Zadaci

Zadatak

Dokazati da su sledeće funkcije/predikati prosto rekurzivni.

1. $x!$;
2. x^y;
3. *broj prostih delitelja broja* x;
4. *predikat "*x *je paran";*
5. $x!!$.

Rešenje. Na času. $\diamond$

Tema 3

Rekurzivne i parcijalno rekurzivne funkcije

Minimalizacija

Do sada smo videli da prosto rekurzivne funkcije modeluju osnovne gradivne elemente algoritama: **rekuziju** i **iteraciju**. Jedan takav element je i **pretraživanje**.

Minimalizacija modeluje pretraživanje: intutivno, minimalizacija omogućava da od svih mogućih rešenja neke jednačine odaberemo ”minimalno” (direktnom pretragom po svim rešenjima).

Ako je $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ jednačina koja po y ima rešenja - mi tražimo minimalno rešenje.

Ograničena minimalizacija

Definicija (Ograničena minimalizacija)

Neka je $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *takva da za sve* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ *postoji* $y \in \mathbb{N}$ *takvo da je* $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$. *Pišemo da je*

$$\mu_y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0) = a,$$

ako je $g(x_1, \ldots, x_n, a) = 0$ *i* $g(x_1, \ldots, x_n, b) \neq 0$ *za sve* $b < a$. *Za funkciju*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu_y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0),$$

kažemo da je dobijena od g *primenom ograničenog operatora minimalizacije.*

Primer

Ako je $g(x, y) = x \dot{-} y$, *tada možemo definisati funkciju* f *primenom ograničenog operatora minimalizacije po* y *sa* $f(x) = \mu_y(g(x, y) = 0)$.

Pošto je $x \dot{-} y = 0$ za sve $y \geqslant x$, važi $f(x) = x$.

Ograničena minimalizacija i rekurzivne funkcije

Primetimo da u $\mu_y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$ jednačina $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ određuje jedan predikat G na $\mathbb{N}^{n+1}$:

- G je **definisan** za sve elemente skupa $\mathbb{N}^{n+1}$;
- ako za fiksirano $(x_1, \ldots, x_n)$ važi $\mu_y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0) = a$, tada je u $(x_1, \ldots, x_n, c)$, za sve $c \geqslant a$ predikat G **tačan**, i za sve $c < a$ predikat G je **netačan**.
- za fiksirano $(x_1, \ldots, x_n)$, G **mora da bude tačan** barem za jednu vrednost argumenta y.

Sledi, $C_G(x_1, \ldots, x_n, y) = \overline{sg}(g(x_1, \ldots, x_n, y))$ i za fiksno $(x_1, \ldots, x_n)$ mi zapravo tražimo najmanju vrednost argumetna y za koju je G tačan (i takva mora da postoji).

Definicija (Rekurzivne funkcije)

Funkcija $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ se zove **rekurzivna** *ako se može dobiti od osnovnih funkcija konačnom primenom kompozicije, šeme proste rekurzije i ograničenog operatora minimalizacije.*

Minimalizacija - ograničena?

Šta to ograničava ograničenu minimalizaciju $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu_y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$?

- Funkcija g mora da bude **totalna** na $\mathbb{N}^{n+1}$, tj. definisana za sve $(x_1, \ldots, x_n, y)$ (odnosno, predikat G je definisan na $\mathbb{N}^{n+1}$);
- Za fiksirano $(x_1, \ldots, x_n)$, jednačina $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ mora da bude tačna bar za jedno y (G mora da bude tačan za bar jedno y).
- Iz prethodne tačke sledi da rezultujuća funkcija $f(x_1, \ldots, x_n)$ mora da bude **totalna** na $\mathbb{N}^n$.

Podsećanje: Za funkciju $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ kažemo da je **parcijalna** ako je njen domen $D \subseteq \mathbb{N}^n$.

Minimalizacija i parcijalno rekurzivne funkcije

Definicija (Minimalizacija (neograničena))

Neka je $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ **parcijalna**. *Pišemo da je*

$$\mu_y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0) = a,$$

ako je $g(x_1, \ldots, x_n, a) = 0$ *i* $g(x_1, \ldots, x_n, b)$ *definisano i različito od* 0 *za sve* $b < a$. *Ako ne postoji takvo* a, *operator* $\mu_y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$ *je* **nedefinisan**. *Za* **parcijalnu** *funkciju*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu_y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0),$$

kažemo da je dobijena od g *primenom operatora minimalizacije.*

Definicija (Parcijalno rekurzivne funkcije)

Parcijalna funkcija $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *se zove* **parcijalno rekurzivna** *ako se može dobiti od osnovnih funkcija konačnom primenom kompozicije, šeme proste rekurzije i (neograničenog) operatora minimalizacije.*

Rekurzivne i parcijalno rekurzivne funkcije

Za totalne funkcije ograničeni operator minimalizacije je ”jednako ekspresivan” kao neograničeni.

Teorema

Totalna funkcija je parcijalno rekurzivna ako i samo ako je rekurzivna.

Ako je funkcija rekurzivna onda je totalna i parcijalno rekurzivna jer je ograničeni operator minimalizacije specijalni slučaj neograničenog operatora minimalizacije. Dokaz obrnute implikacije u gornjoj teoremi nije tako trivijalan (zainteresovani ga mogu naći u knjizi prof. Dolinke).

Jasno, ”prava” parcijalna rekurzivna funkcija nije rekurzivna (jer su sve rekurzivne funkcije totalne).

Važi inkluzija između skupova svih funkcija:
”prosto rekurzivnih” $\subset$ ”rekurzivnih” $\subset$ ”parcijalno rekurzivnih”.

Rekurzivne i parcijalno rekurzivne funkcije: primeri

Rekurzivna:

- je funkcija $f(x) = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$, jer ako posmatramo jednačinu $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = a$, ona je ekvivalentana sa $a^2 \leqslant x < (a+1)^2$. Dakle, za fiksirano x tražimo najmanju vrednost promenljive y za koju je $x < (y+1)^2$, te je $f(x) = \mu_y(geq(x, (y+1)^2) = 0)$.

Parcijalno rekurzivna:

- je funkcija $D(x_1, x_2) = \lfloor x_1/x_2 \rfloor$, definisana za $x_2 \neq 0$, jer ako posmatramo jednačinu $\lfloor x_1/x_2 \rfloor = a$, ona je ekvivalentna sa $a \leqslant x_1/x_2 < a+1$, što je dalje ekvivalentno sa $ax_2 \leqslant x_1 < (a+1)x_2$. Dakle, za fiksirano (x_1, x_2) tražimo najmanju vrednost promenljive y za koju je $x_1 < (y+1)x_2$, te je $D(x_1, x_2) = \mu_y(geq(x_1, (y+1)x_2) = 0)$.
- su funkcije $f(x_1, x_2) = \lfloor \sqrt[x_1]{x_2} \rfloor$ (za $x_1 > 0$), $g(x) = \lfloor \lg x \rfloor$ (za $x > 0$) - domaći.

Teorema o majorizaciji

Ograničena minimalizacija često nije neophodna - neke rekurzivne funkcije mogu se dobiti bez minimalizacije, tj. one su prosto rekurzivne.

Teorema (Teorema o majorizaciji)

Neka je $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *prosto rekurzivna funkcija i neka je* $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *dobijena od* g *primenom ograničenog operatora minimalizacije*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu_y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0).$$

Rekurzivna funkcija f *je prosto rekurzivna ako postoji prosto rekurzivna funkcija* $h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$*, takva da je*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant h(x_1, \ldots, x_n).$$

Dakle, svaka rekurzivna funkcija koju od gore ograničava prosto rekurzivna funkcija je i sama prosto rekurzivna. Odnosno, rekurzivna funkcija koja nije prosto rekurzivna, mora da raste brže od svih prosto rekurzivnih funkcija.

Teorema o majorizaciji: dokaz

Definišemo funkciju

$$l(x_1, \ldots, x_n, z) = \prod_{i=0}^{z} g(x_1, \ldots, x_n, i).$$

Funkcija l je prosto rekurzivna po teoremi o proizvodu. Ako je $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ onda je $l(x_1, \ldots, x_n, z) = 0$ ako i samo ako je $z \geqslant a$, jer je $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu_y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$ (a je najmanja vrednost za y za koju je $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$). Kako po uslovu teoreme $f(x_1, \ldots, x_n) = a \leqslant h(x_1, \ldots, x_n)$, sledi

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a = \sum_{i=0}^{h(x_1,\ldots,x_n)} sg\left(\prod_{j=0}^{i} g(x_1, \ldots, x_n, j)\right),$$

pa zaključujemo da je f prosto rekurzivna.

Teorema o majorizaciji: primer

Niz prostih brojeva je prosto rekurzivan. Odnosno:
Funkcija $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definisana sa $p(n)$ je n-ti prost broj, pri čemu je $p(0) = 2, p(1) = 3$ itd, je prosto rekurzivna. Pisaćemo $p(0) = p_0, p(1) = p_1 \ldots$

- Setimo se funkcije $\pi(x)$ koja je davala broj svih prostih brojeva koji su $\leqslant x$, za koju smo utvrdili da je prosto rekurzivna.
- Primetimo da je $\pi(x+1) - \pi(x) = 0$ ako $x+1$ nije prost broj, dok je $\pi(x+1) - \pi(x) = 1$ ako $x+1$ jeste prost.
- Dakle, $\pi(p_x) = x + 1$ i $\pi(p_x - 1) = x$.
- Zato, p_x je minimalno rešenje jednačine $\pi(y) = x + 1$.
- Konačno, $p_x = \mu_y(|\pi(y) - (x+1)| = 0)$, te je p rekurzivna funkcija.

Po teoremi o majorizaciji, treba samo da pronađemo prosto rekurzivnu funkciju $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ za koju važi $p_x \leqslant h(x)$, pa će p biti prosto rekurzivna. Indukcijom po x može se pokazati da je da je $p_x \leqslant p_0 \cdot \ldots \cdot p_{x-1} + 1 \leqslant h(x) = 2^{2^x}$.

Teorema o majorizaciji: primer

Prosto rekurzivna je funkcija

$$exp_y x = \begin{cases} \text{najveći stepen kojim prosti broj } p_y \text{ deli } x & \text{ako je } x > 0 \\ 0 & \text{ako je } x = 0. \end{cases}$$

Po osnovnoj teoremi aritmetike znamo da važi

$$x = p_0^{exp_0 x} \cdot p_1^{exp_1 x} \cdot \ldots,$$

a kako je $exp_y x = k$ ako važi $p_y^k \mid x$ i još $p_y^{k+1} \nmid x$ (tj. najmanji k takav da $p_y^{k+1} \nmid x$), možemo zapisati

$$exp_y x = \mu_k(x \cdot div(x, p_y^{k+1}) = 0),$$

gde je množenje sa x ubačeno samo da bismo imali $exp_x 0 = 0$. Odatle je $exp_y x$ rekurzivna funkcija, a kako je $exp_y x \leqslant x$, po teoremi o majorizaciji, $exp_y x$ je prosto rekurzivna.

Rekurzije višeg reda

Problem: Da li prosto rekurzivne funkcije dozvoljavaju samo rekurzije koraka jedan? Da li je $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ Fibonačijeva funkcija prosto rekurzivna?

Odgovor je da. Ali, da bi pokazali uvešćemo kodiranje konačnog niza brojeva jednim brojem (pomoću osnovne teoreme aritmetike i niza prostih brojeva).

Za Fibonačijevu funkciju uvodimo $\psi(x) = 2^{F(x)}3^{F(x+1)}$ pomoćnu funkciju, odakle je $F(x) = exp_0(\psi(x))$ i $F(x+1) = exp_1(\psi(x))$. Funkcija ψ jeste prosto rekurzivna jer je $\psi(0) = 6$ i

$$\begin{aligned}\psi(x+1) &= 2^{F(x+1)}3^{F(x+2)} = 2^{F(x+1)}3^{F(x+1)+F(x)} \\ &= 2^{exp_1\psi(x)}3^{exp_1(\psi(x))+exp_0(\psi(x))}.\end{aligned}$$

Pošto je ψ prosto rekurzivna (ranije smo pokazali da je $exp_y x$ prosto rekurzivna) sledi da je i $F(x)$ prosto rekurzivna.

Rekurzije višeg reda: dubinska rekurzija

Sledi generalizacija postupka sa prethodnog slajda.

Teorema (O dubinskoj rekurziji)

Ako su $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *i* $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ *prosto rekurzivne, tada je prosto rekurzivna i* $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *definisana uslovima*

- $f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$;
- $f(x_1, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, \prod_{i=0}^{y} p_i^{f(x_1,\ldots,x_n,i)})$.

Kako je $\prod_{i=0}^{0} p_i^{f(x_1,\ldots,x_n,i)} = 2^{f(x_1,\ldots,x_n,0)} = 2^{g(x_1,\ldots,x_n)}$ i

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{y+1} p_i^{f(x_1,\ldots,x_n,i)} &= p_{y+1}^{f(x_1,\ldots,x_n,y+1)} \prod_{i=0}^{y} p_i^{f(x_1,\ldots,x_n,i)} \\
&= p_{y+1}^{h(x_1,\ldots,x_n,y,\prod_{i=0}^{y} p_i^{f(x_1,\ldots,x_n,i)})} \prod_{i=0}^{y} p_i^{f(x_1,\ldots,x_n,i)},
\end{aligned}$$

i kako je niz prostih brojeva prosto rekurzivan, sledi da je $\prod_{i=0}^{y} p_i^{f(x_1,\ldots,x_n,i)}$ prosto rekurzivna funkcija. Odatle je i $f(x_1, \ldots, x_n, y) = exp_y\left(\prod_{i=0}^{y} p_i^{f(x_1,\ldots,x_n,i)}\right)$ prosto rekurzivna.

Akermanova funkcija

Teorema o majorizaciji pokazuje zašto nije lako naći rekurzivnu funkciju koja nije prosto rekurzivna (jer mora da raste brže od svih prosto rekurzivnih). Sledi jedan takav primer.

Definicija (Akermanova funkcija)

Akermanova funkcija $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *je definisana sa*

- $A(0, y) = y + 1$;
- $A(x + 1, 0) = A(x, 1)$;
- $A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$.

Teorema

Akermanova funkcija nije prosto rekurzivna ali jeste rekurzivna.

Zadatak

Izračunaj $A(1, 1)$ *i* $A(2, 1)$.