Teorija izračunljivosti

Ivan Prokić
kabinet 117, F blok
prokic@uns.ac.rs
http://imft.ftn.uns.ac.rs/∼iprokic/

Novi Sad

Tema 1

Rekurzivni i rekurzivno nabrojivi skupovi

Prosto rekurzivni i rekurzivni skupovi

Definicija ((Prosto) rekurzivni skupovi)

Za skup $A \subseteq \mathbb{N}$ kažemo da je **(prosto) rekurzivan** *ako je njegova karakteristična funkcija*

$$C_A(x) = \begin{cases} 1 & \textit{ako } x \in A \\ 0 & \textit{ako } x \notin A, \end{cases}$$

(prosto) rekurzivna. Skup svih prosto rekurzivnih skupova obeležavamo sa **PR**, *a skup svih rekurzivnih skupova sa* **R**.

A je (prosto) rekurzivan unarni predikat na $\mathbb{N}$.

Primer

Skup svih prostih brojeva je prosto rekurzivan jer je njegova karakteristična funkcija $Pr(x)$ prosto rekurzivna.

Rekurzivno nabrojivi skupovi

Definicija (Rekurzivno nabrojivi skupovi)

Za skup $A \subseteq \mathbb{N}$ kažemo da je **rekurzivno nabrojiv** *ako postoji prosto rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$a \in A \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in \mathbb{N}) f(a, x) = 0.$$

Skup svih rekurzivno nabrojivih skupova obeležavamo sa **RE**.

Rekurzivno nabrojiv skup je skup brojeva koji neku prosto rekurzivnu jednačinu čine rešivom.

Odnos **PR** i **RE** skupova

Lema

Važi $\mathbf{PR} \subset \mathbf{RE} \subset P(\mathbb{N})$.

Dokaz

Neka je A *prosto rekurzivan skup i neka je*

$$f(a, x) = \overline{sg}(C_A(a)).$$

Tada je $f(a, b)$ *prosto rekurzivna funkcija i* $f(a, x) = 0$ *je ekvivalentno sa* $\overline{sg}(C_A(a)) = 0$*, tj.* $a \in A$ *(za svako* $x \in \mathbb{N}$*).*

Jasno je da važi $\mathbf{PR} \subseteq \mathbf{R}$: ako je A prosto rekurzivan takva je i njegova karakteristična funkcija $C_A(x)$, a kako je svaka prosto rekurzivna funkcija takođe rekurzivna funkcija, sledi da je A rekurzivan skup.

Kasnije ćemo videti da važi $\mathbf{PR} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{RE}$.

Rekurzivno nabrojivi skupovi

Teorema

Neka je A neprazan podskup od $\mathbb{N}$. Skup A je rekurzivno nabrojiv ako i samo ako je A skup slika neke prosto rekurzivne funkcije $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Dokaz

Pokazaćemo samo smer $(\Leftarrow)$. Neka je $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ prosto rekurzivna funkcija čiji je skup slika A. Posmatrajmo prosto rekurzivnu funkciju $f(a, x) = \overline{sg}(eq(\varphi(x), a)))$. Tada je $(\exists x \in \mathbb{N}) f(a, x) = 0$ ekvivalentno sa $\varphi(x) = a$, što je dalje ekvivalentno sa $a \in A$, pa je A rekurzivno nabrojiv skup.

Jasno je da je komplement $\overline{A} = \mathbb{N} \backslash A$ (prosto) rekuzivnog skupa A (prosto) rekurzivan jer je $C_{\overline{A}}(x) = \overline{sg}(C_A(x))$. Za rekurzivno nabrojive skupove ovo ne važi.

Postova teorema

Teorema (Postova teorema)

Neka je $A \neq \emptyset$. Ako su A i $\overline{A}$ oba rekurzivno nabrojivi, onda je A rekurzivan.

Dokaz. Iz pretpostavke da su A i $\overline{A}$ iz **RE** sledi da postoje prosto rekurzivne funkcije $f(a, x)$ i $g(a, x)$ takve da $f(a, x) = 0$ (resp. $g(a, x) = 0$) ima rešenje po x ako i samo ako $a \in A$ (resp. $a \in \overline{A}$, tj. $a \notin A$). Sada za rekurzivnu funkciju

$$h(a) = \mu_x(f(a, x) \cdot g(a, x) = 0),$$

tvrdimo da je $C_A(x) = \overline{sg}(f(a, h(a)))$.

- za $a \in A$: $(\exists x) f(a, x) = 0$ i $(\forall x) g(a, x) \neq 0$, pa kako je $h(a)$ najmanja vrednost x za koju je $f(a, x) \cdot g(a, x) = 0$ sledi $f(a, h(a)) = 0$, pa je $\overline{sg}(f(a, h(a))) = 1$.
- za $a \notin A$: $(\exists x) g(a, x) = 0$ i $(\forall x) f(a, x) \neq 0$ sledi $f(a, h(a)) \neq 0$, pa je $\overline{sg}(f(a, h(a))) = 0$.

Primeri

Primer

Skup $A = \{p^n \mid p$ *je prost* $, n > 0\}$ *je prosto rekurzivan.*

Broj prostih delitelja broja x može se izračunati prosto rekurzivnom funkcijom

$$d(x) = \sum_{i=2}^{x} Pr(x) \cdot div(x, i).$$

Zato se prosto rekurzivna karakteristična funkcija skupa A svih stepena prostih brojeva može izraziti kao

$$C_A(x) = eq(d(x), 1).$$

Primeri

Primer

Pokazati da je svaka aritmetička progresija prirodnih brojeva:

- *rekurzivno nabrojiv;*
- *prosto rekurzivan skup.*

Neka je aritmetička progresija $A(a,b) = \{a + kb \mid k \in \mathbb{N}\}$.

- Pošto je $f(x) = a + xb$ prosto rekurzivna funkcija i skup slika od f je baš $A(a,b)$, sledi da je $A(a,b)$ rekurzivno nabrojiv skup.
- Sledi iz
$$C_{A(a,b)}(x) = div(x \dot{-} a, b) \cdot geq(x, a).$$

Primeri

Primer

Pokazati da je svaka geometrijska progresija prirodnih brojeva:

- *rekurzivno nabrojiv;*
- *prosto rekurzivan skup.*

Neka je geometrijska progresija $G(a,b) = \{ab^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

- Pošto je $f(x) = ab^x$ prosto rekurzivna funkcija i skup slika od f je baš $G(a,b)$, sledi da je $G(a,b)$ rekurzivno nabrojiv skup.
- Prvo definišemo prosto rekurzivni predikat "x je stepen od b" sa karakterističnom funkcijom

$$h(x,b) = \sum_{i=0}^{x} eq(x, b^i).$$

Odatle je: $C_{G(a,b)}(x) = h(\lfloor x/a \rfloor, b) \cdot div(x,a).$

Zadaci

Zadatak

Dokazati da su sledeći skupovi prosto rekurzivni.

1. $A = B \cup C$, *ako su* B *i* C *prosto rekurzivni;*
2. $A = B \cap C$, *ako su* B *i* C *prosto rekurzivni;*
3. *Svaki* $A \subset \mathbb{N}$ *koji ima konačno monogo elemenata;*
4. $A = \{2 + 3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$*;*
5. A *- skup svih prirodnih brojeva deljivih sa* 5 *i* 7*.*

Tema 2

Rekurzivno nabrojivi skupovi i parcijalno rekurzivne funkcije

Kantorova enumeracija

Kantorova enumeracija: je bijekcija $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ koja parove iz $\mathbb{N}^2$ broji dijagonalno:

$$\begin{array}{cccc} (0,0) & (0,1) & (0,2) & \dots \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & \dots \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

tako da je $c(0,0) = 0, c(0,1) = 1, c(1,0) = 2, c(0,2) = 3, c(1,1) = 4 \dots$.
Može se pokazati da je $c(x,y) = \lfloor (x+y)(x+y+1)/2 \rfloor + x$.

Ovaj postupak možemo indukcijom uopšiti da dobijemo bijekciju $c^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ sa

$$c^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = c^{n-1}(c(x_1, x_2), x_3, \dots, x_n).$$

Rekurzivno nabrojivi podskupovi od $\mathbb{N}^n$

Definicija (Rekurzivni i rekurzivno nabrojivi poskupovi od $\mathbb{N}^n$)

Za $A \subseteq \mathbb{N}^n$ kažemo da je rekurzivan/rekurzivno nabrojiv ako je skup njegovih Kantorovih indeksa $c^n(A)$ rekurzivan/rekurzivno nabrojiv.

Lema

Neka je $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}^n$. Skup A je rekurzivno nabrojiv ako i samo ako postoji prosto rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{n+m} \to \mathbb{N}$, pri čemu je $m \geqslant 1$, takva da

$$(a_1, \ldots, a_n) \in A \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x_1, \ldots, x_m) F(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Parametarski oblik parcijalno rekurzivne funkcije

Lema

Neka je $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}^n$*. Skup* A *je rekurzivno nabrojiv ako i samo ako postoje prosto rekurzivne funkcije* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, takve da je* $A = \{(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \mid t \in \mathbb{N}\}$*.*

Dokaz

$(\Rightarrow)$ *Neka je skup* $c^n(A)$ *rekurzivno nabrojiv, tj. postoji prosto rekurzivna funkcija* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *takva da joj je* $c^n(A)$ *skup slika, tj. za* $x \in A$ *postoji* $t \in \mathbb{N}$ *takvo da je* $c^n(x) = \varphi(t)$*. Odatle je* A *skup slika funkcije* $(c^n)^{-1}(\varphi)$*, odnosno* $A = \{(c_{n,1}(\varphi(t)), \ldots, c_{n,n}(\varphi(t))) \mid t \in \mathbb{N}\}$*, gde su* $c_{n,i}(c^n(x_1, \ldots, x_n)) = x_i$*, za* $i \in \{1, \ldots, n\}$*.*
$(\Leftarrow)$ *Imamo* $c^n(A) = \{c^n(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \mid t \in \mathbb{N}\}$ *je skup vrednosti unarne prosto rekurzivne funkcije* $f(t) = c^n(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$*, odakle je* A *rekurzivno nabrojiv.*

Rekurzivna nabrojivost i parcijalno rekurzivne funkcije

Teorema

$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ je parcijalno rekuzivna ako i samo ako je f rekurzivno nabrojiv podskup od $\mathbb{N}^{n+1}$.

Teorema

Za svaku parcijalno rekurzivnu funkciju njen domen i skup slika su rekurzivno nabrojivi skupovi.

Dokaz

Ako je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ parcijalno rekurzivna, po prethodnoj lemi i teoremi sledi da postoje prosto rekurzivne funkcije $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takve da je

$$f = \{(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), \varphi_{n+1}(t)) \mid t \in \mathbb{N}\},$$

pri čemu je domen od f jednak sa $\{(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \mid t \in \mathbb{N}\}$, a skup slika sa $\{(\varphi_{n+1}(t)) \mid t \in \mathbb{N}\}$ (i oba su rekurzivno nabrojivi).

R⊂RE

Teorema

Svaki rekurzivan skup je i rekurzivno nabrojiv.

Dokaz

Neka je A rekurzivan skup. Pošto je funkcija

$$\alpha(x) = \sum_{i=0}^{x} C_A(i),$$

(koja broji elemente skupa A koji su $\leqslant x$) rekurzivna, onda je i funkcija

$$f(x) = \mu_y(\alpha(y) \geqslant x + 1),$$

parcijalno rekurzivna. Pošto je A jednak skupu slika funkcije $f(x)$, po prethodnoj teoremi sledi da je A rekurzivno nabrojiv.

Rekurzivni jezici

- Posmatramo proizvoljan konačan skup slova Σ koji zovemo **azbuka**.
- Konačan niz simbola iz Σ zovemo **reč**, tu spada i **prazna reč**, koju obeležavamo sa λ. Sa Σ^* obeležavamo **skup svih reči**.
- **Jezik** L nad Σ je proizvoljan skup reči (tj. $L \subseteq \Sigma^*$).
- Ako je $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$, definišemo bijekciju $||\cdot|| : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ sa

$$||a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_k}|| = \alpha_1 n^{k-1} + \alpha_2 n^{k-2} + \ldots + \alpha_k.$$

  Zapravo reč $a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_k}$ predstavimo kao prirodan broj (gde indeksi slova reči predstavljaju cifre broja u n-arnom pozicionom sistemu).
- Za jezik $L \subseteq \Sigma^*$ kažemo da je **PR**/**R**/**RE** ako je podskup skupa prirodnih brojeva $\{||w|| \mid w \in L\}$ **PR**/**R**/**RE**.

Primeri

Primer

Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ prosto rekurzivna i $f(x) \geqslant x$, za sve $x \in \mathbb{N}$. Tada je skup $A = \{f(x) \,:\, x \in \mathbb{N}\}$ prosto rekurzivan.

Kako je $x \leqslant f(x)$ za $f(x) = t$ imamo da važi $x \in \{0, \ldots, t\}$, pa sledi

$$C_A(t) = sg\left(\sum_{i=0}^{t} eq(f(i), t)\right).$$

Primeri

Primer

Skup $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ je rekurzivan ako i samo ako postoji neopadajuća rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takva da je A skup slika od f.

($\Rightarrow$) Ako je A rekurzivan f možemo definisati šemom proste rekurzije

$$\begin{aligned} f(0) &= \mu_t(\overline{sg}(C_A(t)) = 0) \\ f(x+1) &= \begin{cases} x+1 & \text{ako } C_A(x+1) = 1 \\ f(x) & \text{inače.} \end{cases} \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Neka je A skup slika od f. Posmatrajmo dva slučaja.

- A konačan: onda je prosto rekurzivan (zadatak od ranije), pa je i rekurzivan.
- A beskonačan: tada $x \in A$ akko $(\exists t) f(t) = x$, pa karakterističnu funkciju skupa A možemo definisati sa

$$C_A(x) = eq(f(\mu_t(f(t) \geqslant x)), x).$$

Zadaci

Zadatak

1. *Neka su* $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *i* $f(x) \leqslant g(x)$. *Ako je* g *prosto rekurzivna mora li* f *biti rekurzivna?*
2. *Ako je* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *takva da je* $f(x) \leqslant x$, *da li* f *mora biti rekurzivna?*
3. *Ako je* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *takva da je* $f(x) \leqslant 2022 \dot{-} x$, *da li* f *mora biti rekurzivna?*
4. *Neka su* $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *i* $f(x) \cdot g(x) = 0$. *Da li bar jedna od* f *i* g *mora biti rekurzivna?*
5. *Ako je* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *takva da je* $f(x)$ *neparan broj, da li* f *mora biti rekurzivna?*