Teorija izračunljivosti

Ivan Prokić
kabinet 117, F blok
prokic@uns.ac.rs
http://imft.ftn.uns.ac.rs/∼iprokic/

Novi Sad

Tema 1

Tjuringove mašine

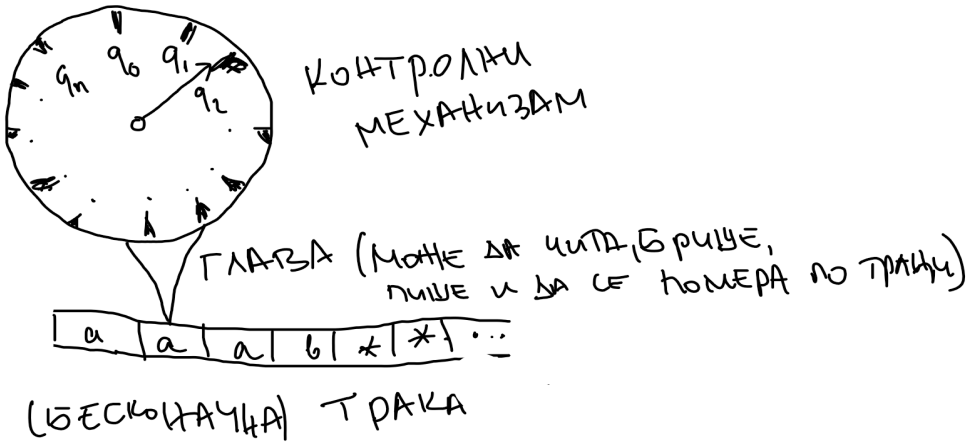
Tjuringova mašina: postupak izračunavanja

- Parcijalno rekurzivne funkcije daju odgovor na pitanje postojanja algoritma koji rešava neki problem, međutim ne daju nikakav odgovor na pitanje o **postupku izračunavanja**.
- Tjuringova mašina daje apstraktni model računarske mašine - tj. daje formalni opis za **osnovne korake izračunavanja** (a samim tim daje mogućnost da govorimo o složenosti izračunavanja - mogućnost koju smo u prvom delu kursa iskoristili).

Tjuringova mašina: neformalni opis

$a, b, *, \ldots$ - СИМБОЛИ ТРАКЕ

$q_0, \ldots, q_n$ - СТАЊА (КОНТРОЛНОГ МЕХАНИЗМА)



Tjuringova mašina: formalni opis

Definicija (Tjuringova mašina)

Tjuringova mašina je uređena sedmorka $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$, *gde je:*

- Q - *(konačan)* **skup stanja** *kontrolnog mehanizma;*
- Σ - *(konačna)* **ulazna azbuka** *(pomoću koje su zapisani ulazni podaci);*
- $\Gamma \supseteq \Sigma$ - **azbuka trake** *koja sadrži sve ulazne simbole, ali i neke pomoćne koji nisu u* Σ*, npr. simbol* **blanko** $*$*;*
- $q_0 \in Q$ - **početno stanje**, q_a - **stanje prihvatanja** *(eng. accept),* q_r - **stanje odbijanja** *(eng. reject);*
- δ - **funkcija prelaza** *(program)*

$$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\},$$

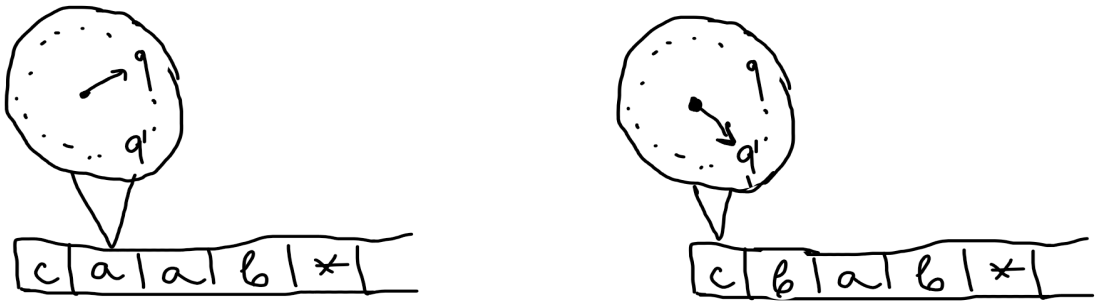
gde simboli imaju značenje L*-levo,* R*-desno.*

Program Tjuringove mašine: funkcija prelaza

$\delta(q, a) = (q', b, L)$ - ako je kontrolni mehanizam u stanju q, a glava sa trake čita a, tada:

- glava treba da umesto a napiše b;
- kontrolni mehanizam treba da pređe u stanje q';
- glava se pomera jedno polje ulevo.

$\delta(q, a) = (q', b, L)$



Tjuringova mašina: trenutna konfiguracija

Ako je Γ azbuka (tj. skup slova), onda sa Γ^* označavamo skup svih reči nad azbukom Γ.

- **Trenutna konfiguracija** se obeležava sa $wqw' \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^*$ ako je kontrolni mehanizam Tjuringove mašine u stanju q, za $w = a_1 \dots a_n$ i $w' = b_1 \dots b_m$, traka je oblika

$$a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m * * * \dots$$

  i glava mašine čita b_1 (prvi simbol reči w').
- **Početna konfiguracija** je oblika $q_0 w$, gde je q_0 početno stanje i w ulazna reč (traka je oblika $w * * * \dots$ i glava čita prvi simbol ulazne reči);
- **Zaustavljajuća konfiguracija** ako je mašina u **stanju prihvatanja** q_a ili u **stanju odbijanja** q_r.

Generalno, Tjuringova mašina može nikada da ne uđe u stanje prihvatanja ili odbijanja i tada kažemo da je mašina u **mrtvoj petlji** (eng. loop - does not halt).

Relacija na konfiguracijama

Jedan korak u radu Tjuringove mašine definišemo kao relaciju među konfiguracijama (tj. prelazak sa jedne konfiguracije na drugu).

Definicija

Neka su w i w' reči (iz Γ^*) i a i b slova (iz Γ^*). Relacija $\vdash$ na konfiguracijama je definisana sa:

- **levo**: $waqbw' \vdash wq'acw'$, *ako je* $\delta(q, b) = (q', c, L)$;
- **desno**: $waqbw' \vdash wacq'w'$, *ako je* $\delta(q, b) = (q', c, R)$;
- **skroz levo**: $qbw' \vdash q'cw'$, *ako je* $\delta(q, b) = (q', c, L)$;

Relacija $\vdash^*$ predstavlja refleksivno-tranzitivno zatvorenje relacije $\vdash$.

Relacija $wqw' \vdash^* w_1q'w_1'$ kaže da se od konfiguracije wqw' u nekom konačnom broju koraka (nula ili više) stiže u konfiguraciju $w_1q'w_1'$.

Jezik Tjuringove mašine i problemi odlučivanja

- **Jezik Tjuringove mašine** M je skup svih reči koje mašinu dovode u stanje prihvatanja, tj. za koje važi

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \ : \ q_0 w \vdash^* w_1 q_a w_2, \text{ za neke } w_1, w_2 \in \Gamma^*\};$$

- Tjuringove mašine M_1 i M_2 su **ekvivalentne** ako je $L(M_1) = L(M_2)$.

Definicija

Ako postoji Tjuringova mašina M takva da je $L(M) = L$ za jezik L kažemo da je **Tjuring prepoznatljiv** *(eng. Turing-recognizable).*

Teorema

Jezik je Tjuring prepoznatljiv ako i samo ako je **rekurzivno nabrojiv**.

Problemi odlučivanja i totalne Tjuringove mašine

- Generalno, Tjuringova mašina ulaznu reč w može da ne prihvati jer nikad ne stigne u konfiguraciju $w_1 q_a w_2$ ili $w_1 q_r w_2$, tj. mašina odbija reč jer upadne u mrtvu petlju (nikada ne staje);
- Zato definišemo posebnu klasu Tjungovih mašina koje zovemo **totalne** (eng. decider) koje za svaku ulaznu reč u konačno mnogo koraka dolaze u stanje prihvatanja ili odbijanja.

Definicija

Ako postoji totalna Tjuringova mašina M takva da je $L(M) = L$ za jezik L kažemo da je **odlučiv** *(eng. Turing-decidable).*

Teorema

Jezik je odlučiv ako i samo ako je **rekurzivan**.

Problemi odlučivanja: primeri

Primer

Napisati Tjuringovu mašinu M nad azbukom $\Sigma = \{0, 1\}$ koja odlučuje jezik $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Neformalno, Tjuringova mašina bi mogla da radi sledeće:
$M =$ "Za ulaz w:

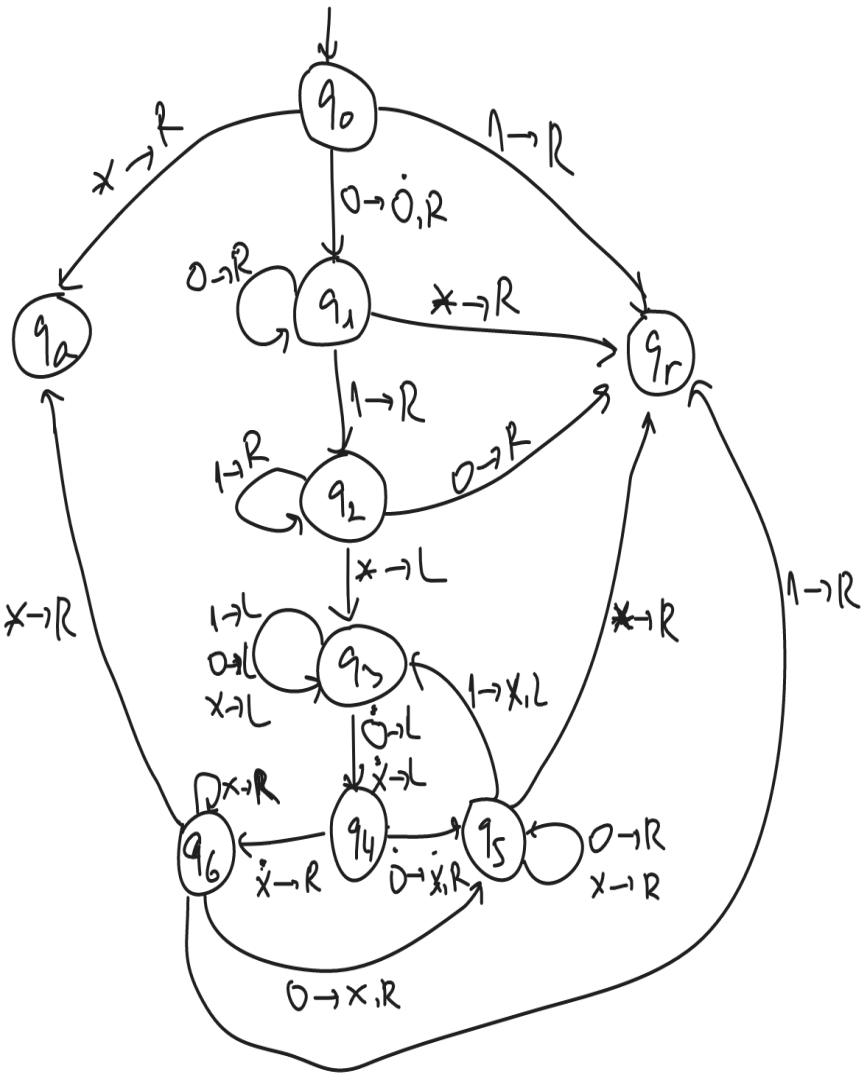
1. Pređi sleva na desno kroz slova w i proveri da li je oblika 0^*1^* (tj. niz nula praćen nizom jedinica), ako nije odbaci;
2. Vrati glavu levo na početak trake;
3. Precrtaj prvu 0, skeniraj ulevo do prvog 1 pa precrtaj i njega. Ako ne nađeš 1, odbaci.
4. Ponavljaj drugi i treći korak sve dok svi simboli 0 nisu precrtani, tada proveri da li su i svi 1 precrtani. Ako jesu, prihvati, ako nisu odbaci."

Primer: $0^n 1^n$

Formalno:

- skup stanja $Q = \{q_0, \ldots, q_6, q_a, q_r\}$, gde je q_0 početno stanje, a q_a i q_r stanja prihvatanja i odbijanja;
- ulazna azbuka $\Sigma = \{0, 1\}$;
- azbuka trake $\Gamma = \{0, 1, *, \times, \dot{0}, \dot{\times}\}$, gde je $*$ simbol blanko, $\times$ simbol koji koristimo za "precrtavanje", a simbole $\dot{0}$ i $\dot{\times}$ koristimo da obeležimo početak trake;
- funkcija prelaza δ data je sledećim dijagramom (a dat je i rad mašine za ulaz $w = 0011$).

Primer: $0^n 1^n$



$w = 0011$

$q_0 0011$	$\dot{x} q_5 011$	$q_3 \dot{x} x x x$
$\dot{0} q_1 011$	$\dot{x} 0 q_5 11$	$q_4 \dot{x} x x x$
$\dot{0} 0 q_1 11$	$\dot{x} q_3 0 x 1$	$\dot{x} q_6 x x x$
$\dot{0} 0 1 q_2 1$	$q_3 \dot{x} 0 x 1$	$\dot{x} x q_6 x x$
$\dot{0} 0 1 1 q_2 x$	$q_4 \dot{x} 0 x 1$	$\dot{x} x x q_6 x$
$\dot{0} 0 1 q_3 1$	$\dot{x} q_6 0 x 1$	$\dot{x} x x x q_6 *$
$\dot{0} 0 q_3 11$	$\dot{x} x q_5 x 1$	$\dot{x} x x x x q_a$
$\dot{0} q_3 011$	$\dot{x} x x q_5 1$	
$q_3 \dot{0} 011$	$\dot{x} x q_3 x x$	
$q_4 \dot{0} 011$	$\dot{x} q_3 x x x$	

Problemi odlučivanja: primeri

Primer

Napisati Tjuringovu mašinu M nad azbukom $\Sigma = \{0, 1\}$ koja odlučuje jezik L koji sadrži sve palindrome nad Σ.

Neformalno, Tjuringova mašina bi mogla da radi sledeće:
$M =$ "Za ulaz w:

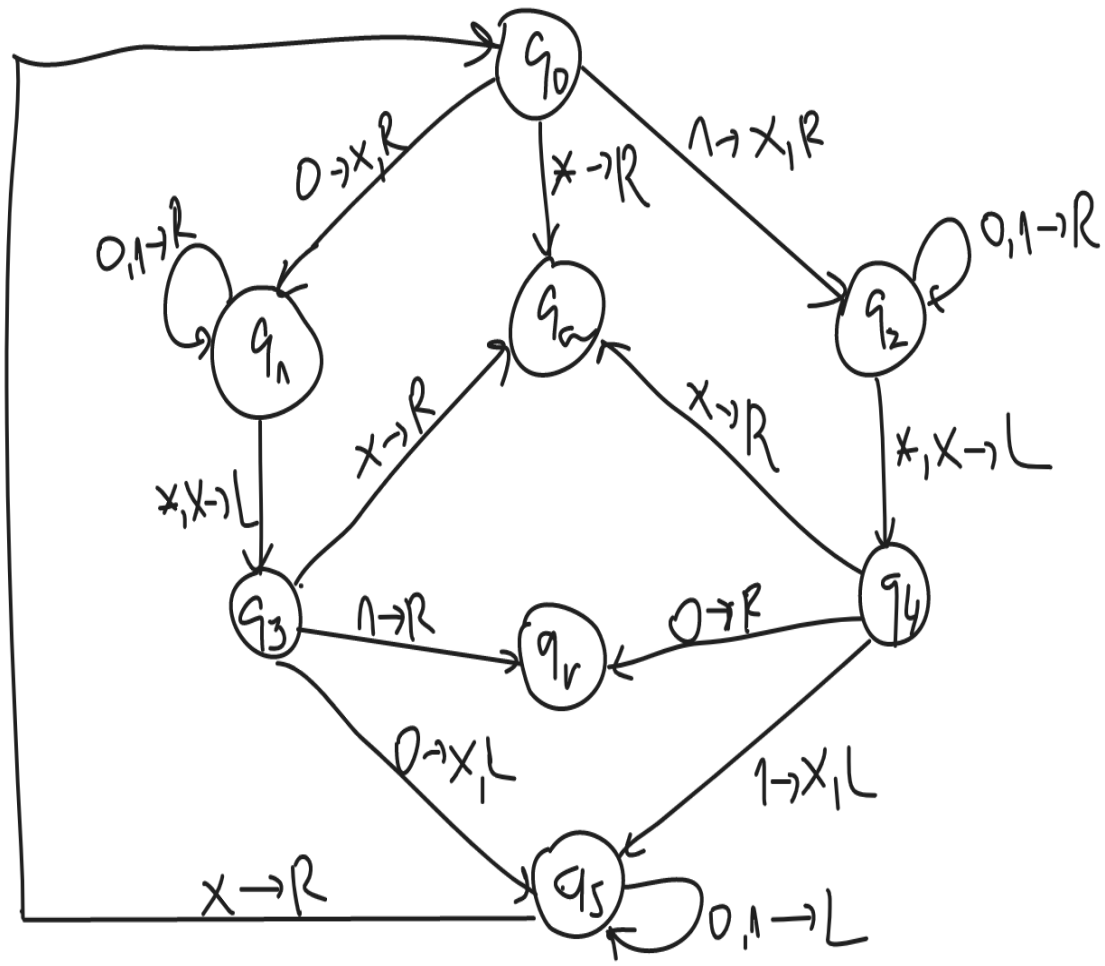
1. Ako je reč w prazna, prihvati.
2. Precrtaj prvo slovo. Ako je to jedino slovo, prihvati.
3. Ako ima još slova pređi na poslednje slovo. Ako je poslednje isto kao i prvo precrtaj ga i vrati se levo na prvo neprecrtano slovo. Ako je poslednje različito od prvog slova odbaci.
4. Ponavljaj od drugog koraka sve dok ima neprecrtanih slova."

Primer: palindromi

Formalno:

- skup stanja $Q = \{q_0, \ldots, q_5, q_a, q_r\}$, gde je q_0 početno stanje, a q_a i q_r stanja prihvatanja i odbijanja;
- ulazna azbuka $\Sigma = \{0, 1\}$;
- azbuka trake $\Gamma = \{0, 1, *, \times\}$, gde je $*$ simbol blanko, $\times$ simbol koji koristimo za ”precrtavanje”;
- funkcija prelaza δ data je sledećim dijagramom (a dat je i rad mašine za ulaz $w = 101$).

Primer: palindromi



$w = 101$

$q_0 101$

$X q_2 01$

$X 0 q_2 1$

$X 0 1 q_2 *$

$X 0 q_4 1$

$X q_5 0 X$

$q_5 X 0 X$

$X q_0 0 X$

$X X q_1 X$

$X q_3 X X$

$X X q_a X$

Problemi odlučivanja: primeri

Primer

Napisati Tjuringovu mašinu M nad azbukom $\Sigma = \{0, 1\}$ koja odlučuje jezik $L = \{w\#w \,:\, w \in \Sigma^*\}$.

Rešenje. Za domaći. $\diamond$

Tjuringove mašine i izračunavanje (parcijalnih) funkcija

- Tjuringove mašine osim za probleme odlučivanja možemo koristiti i za izračunavanje funkcija, pri čemu se rezultat izračunavanja na kraju rada mašine čita sa trake desno od trenutnog položaja glave.
- Jedan od najjednostavnijih načina da to uradimo (iako ne i najefikasniji) je da (prirodne) brojeve posmatramo u unarnom sistemu (tako, npr. $0, 00, 000, 0000$ su redom unarni zapisi brojeva $0, 1, 2, 3$). Odnosno, posmatramo ulaznu azbuku $\Sigma = \{0\}$.

Tjuringove mašine i izračunavanje

Primer

Konstruisati Tjuringove mašine koje izračunavaju sledeće funkcije:

- $N(n) = 0$;
- $S(n) = n + 1$;
- $I_2^3(x_1, x_2, x_3) = x_2$.

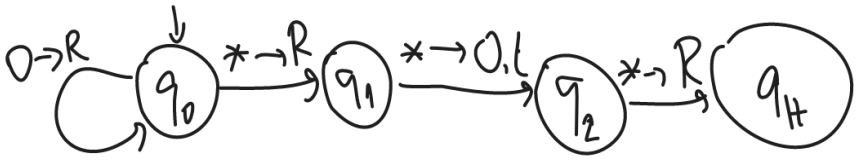
Za prva primera dva imamo:

- skup stanja $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_h\}$, gde je q_0 početno stanje, a q_h stanje zaustavljanja (ovde nema prihvatanja i odbijanja);
- ulazna azbuka $\Sigma = \{0\}$;
- azbuka trake $\Gamma = \{0, \dot{0}, *\}$, gde je $*$ simbol blanko, a $\dot{0}$ simbol kojim obeležavamo početak trake;
- funkcija prelaza δ data je sledećim dijagramom (a dat je i rad mašine za ulaz $w = 000$).

Tjuringove mašine i izračunavanje

- $N(n)=0$

ulaz: $w = \underbrace{00\ldots0}_{n+1}$



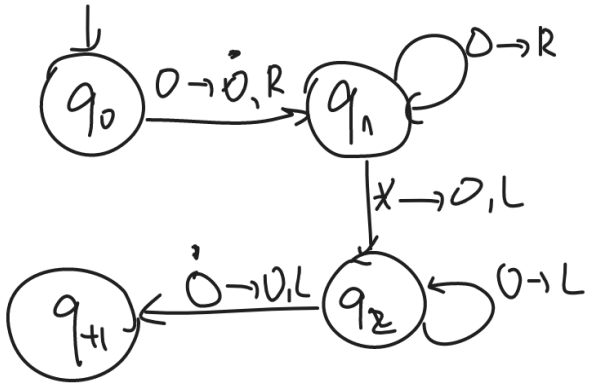
$w = 000$

$q_0 000$
$0 q_0 00$
$00 q_0 0$
$000 q_0 *$

$000 * q_1 *$
$00 0 q_2 * 0$
$000 * q_H 0$

- $S(n) = n+1$

ulaz: $w = \underbrace{00\ldots0}_{n+1}$



$w = 000$

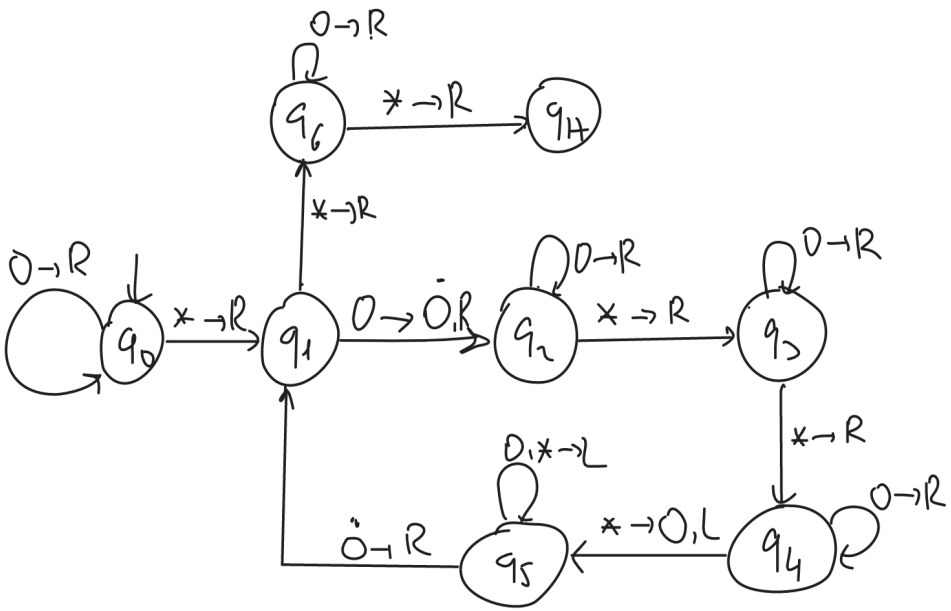
$q_0 000$
$\dot{0} q_1 00$
$\dot{0} 0 q_1 0$
$\dot{0} 0 0 q_1 *$

$\dot{0} 0 q_2 00$
$\dot{0} q_2 000$
$q_2 \dot{0} 000$
$q_H 0000$

Tjuringove mašine i izračunavanje

- $I_2^3(x_1, x_2, x_3) = x_2$.

Ovde je ulaz oblika $w_1 * w_2 * w_3$, a izlaz ćemo dati u obliku $w_1 * w_2 * w_3 * q_h w_2$.



ПРИМЕР:

УЛАЗ: 00*00*0

$q_0 00*00*0$

$0q_0 0*00*0$

$00q_0*00*0$

$00*q_1 00*0$

$00*\dot{0}q_2 0*0$

$00*\dot{0}0q_2*0$

$00*\dot{0}0*q_3 0$

$00*\dot{0}0*0q_1*$

$00*\dot{0}0*0*q_4*$

$00*\dot{0}0*0q_5*0$

$\cdots$

$00*q_5\dot{0}0*0*0$

$00*\dot{0}q_1 0*0*0$

$00*\dot{0}\dot{0}q_2*0*0$

$\cdots$

$00*\dot{0}\dot{0}*0*q_4 0$

$00*\dot{0}\dot{0}*0*0q_1*$

$00*\dot{0}\dot{0}*0*q_5 00$

$\cdots$

Tjuringove mašine i izračunavanje

Zadatak

Konstruisati Tjuringove mašine koje izračunavaju sledeće funkcije:

1. $x + y$;
2. $x \dot{-} 1$;
3. $x \dot{-} y$;
4. $2x$;
5. $x \cdot y$;

Rešenje. Na času. $\diamond$

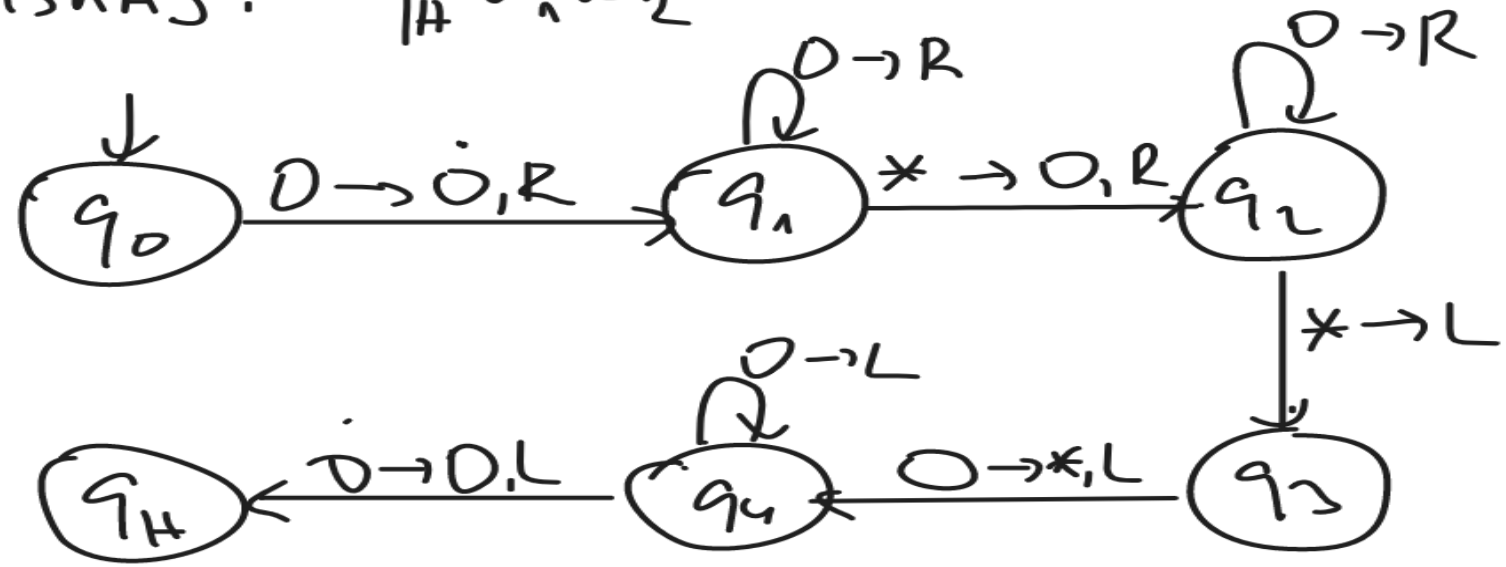
Rešenje

- $x + y$.

$x + y$

ULAZ: $w_1 * w_2$

IZLAZ: $q_H w_1 w_2$



Tema 2

Vremenska složenost i klase složenosti

Vremenska složenost: formalno

Definicija

Neka je M totalna Tjuringova mašina. Funkcija $T_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je **ocena vremenske složenosti** *za M ako za svaku ulaznu reč w, čija je dužina $|w| \leqslant n$, Tjuringova mašina M se zaustavlja u najviše $T_M(n)$ koraka.*

Klase složenosti: formalno

Klase vremenske složenosti jezika totalnih Tjuringovih mašina:

$$TIME(f(n)) = \{L : \exists M \text{ takvo da je } L(M) = L \text{ i } T_M(n) = O(f(n))\},$$

tj. $TIME(f(n))$ predstavlja klasu svih odlučivih (rekurzivnih) jezika čije odlučivanje možemo ograničiti "od gore" sa $f(n)$.
Posebno su interesantne sledeće podklase jezika odlučivih u:

- (najviše) polinomnom vremenu

$$\mathbf{P} = \bigcup_{k \geqslant 0} TIME(n^k);$$

- (najviše) eksponencijalnom vremenu

$$\mathbf{EXP} = \bigcup_{a>1} \bigcup_{k \geqslant 0} TIME(a^{n^k}).$$

Jasno da važi $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{EXP}$.

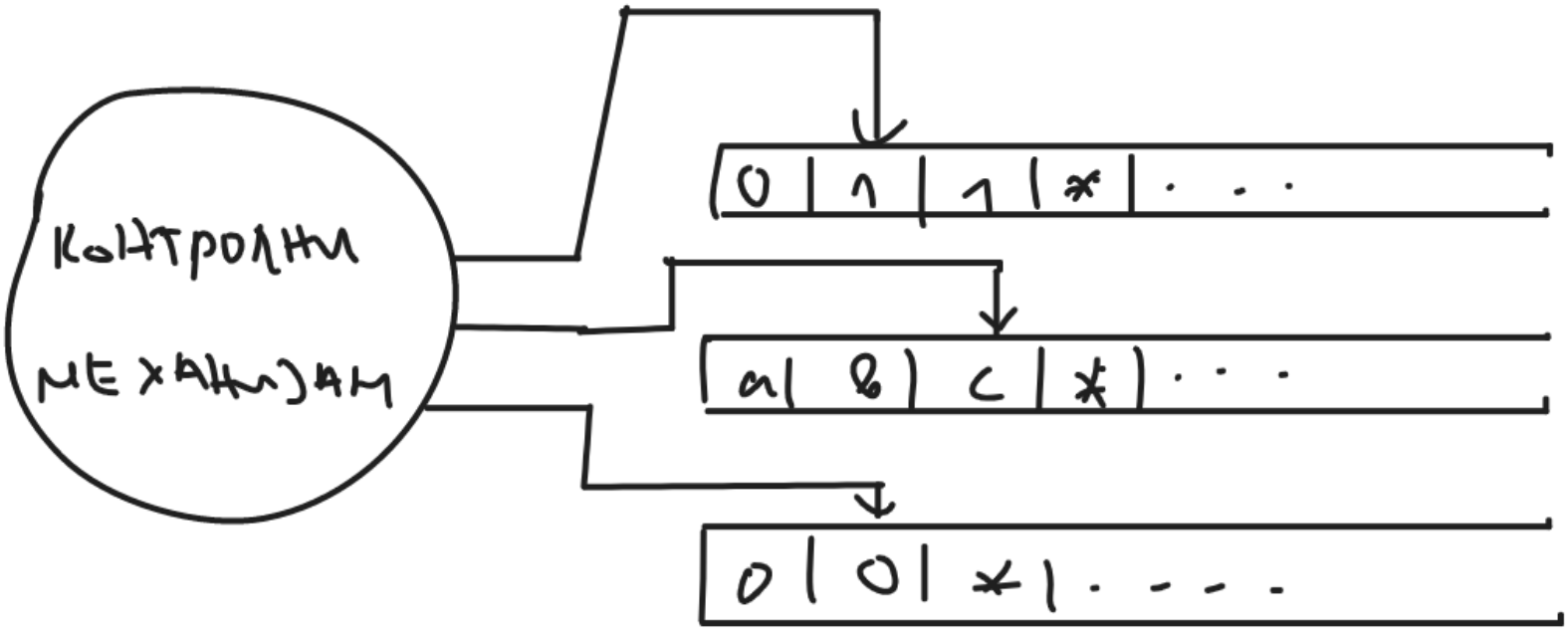
Tema 3

Višetračne Tjuringove mašine

Višetračna Tjuringova mašina

Višetračna Tjuringova mašina se od obične ražlikuje u tome što sada više glava istovremeno ”operiše” na više traka. Formalno, glavna promena je u funkciji prelaza koja je sada definisana sa

$$\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k.$$



Višetračna Tjuringova mašina: primer

Primer

Napisati Tjuringovu mašinu M nad azbukom $\Sigma = \{0, 1\}$ koja odlučuje jezik L koji sadrži sve palindrome nad Σ.

Neformalno, Tjuringova mašina sa dve trake bi mogla da radi sledeće: $M =$ "Za ulaz w na prvoj traci:

1. Ako je reč w prazna, prihvati.
2. Prepiši w počevši od poslednjeg simbola (tj. unazad) sa prve na drugu traku;
3. Postavi obe glave na početke traka. Precrtavaj slovo po slovo ako su ista, ako nisu odbaci.
4. Kad su sva slova precrtana prihvati."

Uporedi vremensku složenost ove mašine i mašine koja je isto odlučivala palindrome a koja ima jednu traku. Jedna ima linearnu, a druga kvadratnu složenost.

Višetračna Tjuringova mašina

Ispostavlja se da višetračna Tjuringova mašina ima istu ”moć” kao i obična (setimo se Čerč-Tjuringove teze), jedino što može biti ”brža”, ali čak ni to ubrzanje nije značajno.

Teorema

Za svaku k-tračnu Tjuringovu mašinu M postoji (obična) Tjuringova mašina M' koja simulira rad M, odnosno $L(M) = L(M')$. Takođe, vremenska složenost $T_{M'}$ može se ograničiti kvadratom složenosti od T_M.

Dakle, simulacija višetračne Tjuringove mašine dovodi do kvadratnog usporenja (što ne utiče na pripadanje klasi složenosti P, jer je kvadrat od polinoma ponovo polinom).