A **Prezime, ime, br. indeksa:** ______________________________________ **26.01.2020.**

Studijski program E1 E2 PR SW IT IN (zaokruži) KOLOKVIJUM 2

Studenti koji kod pitanja do zvezdica naprave više od 8 grešaka nisu položili ispit! U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti tačne odgovore tj. brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- Ako je $|\vec{a}| = 9$, $\vec{a} \perp (\vec{i} \times \vec{j})$ i $\vec{a} \perp (\vec{j} \times \vec{k})$, tada je skup **svih** mogućnosti za $\vec{a} \in \{$ $\}$.
- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $x - ay = 1 \wedge ax - ay = 1$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** određen: **2)** kontradiktoran: **3)** jednostuko neodređen:
- Za vektore $\vec{r}_A = \vec{a} = (-2, 0, 2)$ i $\vec{r}_B = \vec{b} = (0, -2, 2)$ izračunati: **1)** $|\vec{a}| =$ _____ **2)** $|\vec{b}| =$ _____ **3)** $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____ **4)** $|\vec{a} - \vec{b}| =$ ___________ **5)** $\vec{a} \times \vec{b} =$ ___________ **6)** $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) =$ ___________ **7)** $P_{\triangle OAB} =$ ___________
- **Neavisne** uređene trojke u vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ su: **1)** $\big((2,3,-1),(2,3,1),(2,3,0)\big)$ **2)** $\big((1,-1,9),(0,-1,9),(0,1,9)\big)$ **3)** $\big((1,2,3),(4,5,6),(5,7,9,)\big)$ **4)** $\big((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\big)$
- $\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$ $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} =$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix} =$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} =$
- Matrice linearnih transformacija $f(x,y) = (y,y,y)$, $g(x,y,z) = (y, 2x)$, $h(x,y) = y$, $s(x) = (2x, 3x)$ su:

  $M_f =$ $M_g =$ $M_h =$ $M_s =$
- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

****

- Neka tačke $P(3,0,0)$, $Q(0,3,0)$ i $R(0,0,3)$ pripadaju ravni α. **1)** Bar jedan vektor $\vec{m}$ paralelan sa α je $\vec{m} = (\ , \ , \ )$ **2)** Bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na ravan α je $\vec{n} = (\ , \ , \ )$ **3)** Napisati $(A,B,C,D) = (\ , \ , \ , \ )$, tako da je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α. **4)** Napisati koordinate tačke S ravni α koja je najbliža koordinatnom početku. $S(\ , \ , \ )$ **5)** Izračunati površinu $P_{\triangle PQR}$ trougla PQR. $P_{\triangle PQR} =$
- Odrediti sve vrednosti realnih parametara a i b za koje je sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcl} ax + ay &=& 0 \\ -(a+1)y &=& a+1 \end{array}$$

  1) kontradiktoran: ______________________
  2) određen: ______________________
  3) 1 puta neodređen: ______________________
  4) 2 puta neodređen: ______________________
- Neka je $ABCD$ paralelogram, a BD dijagonala toga paralelograma. Izraziti vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BD}$.

  $\overrightarrow{AB} =$ $\overrightarrow{BC} =$
- Napisati $\vec{x} = (2,3,4)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1,0,0)$, $\vec{b} = (0,1,0)$ i $\vec{c} = (0,0,1)$: $\vec{x} =$
- Koordinate normalne projekcije A' tačke $A(2,2,2)$ na ravan određenu sa $x + y + z = 3$ su: $A'(\ , \ , \ )$
- Normalna projekcija vektora $\vec{x} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ na pravu $\ell : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{1}$ je vektor: $\mathbf{pr}_\ell(\vec{x}) = (\ , \ , \ )$
- Odrediti vektor $\vec{x}\,'$ koji je kosa projekcija vektora $\vec{x} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ na ravan $\alpha : x + y + 4z = 5$ ako su zraci projektovanja paralelni sa pravom $a : \frac{x-6}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-1}$. $\vec{x}\,' =$
- Napisati vektor $\vec{x} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ kao zbir vektora od kojih je jedan paralelan sa pravom $a : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$, a drugi paralelan sa ravni $\alpha : x + y + 4z = 0$. $\vec{x}$ je jednoznačno odredjen? DA NE $\vec{x} = (\quad) + (\quad)$
- Karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ su (ili njihov skup je):

  1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **4)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ **5)** $\left\{\alpha(1,1) \middle| \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} \cup \left\{\beta(1,-2) \middle| \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$
- Izračunati α, β i γ ako je $\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$: $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{$ $\}$
- Izračunati α, β i γ ako je $\alpha(1,1,2) + \beta(2,2,4) + \gamma(3,3,6) = (0,0,0)$: $(\alpha,\beta,\gamma) \in \{(\ , \ , \ ) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$
- Neka su $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ slobodni vektori i $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični međusobno normalni i α, β i γ uglovi koje vektor $\vec{x}$ obrazuje sa redom vektorima $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Tada je:

  1) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ **2)** $(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k}) \in \mathbb{R}^3$ **3)** Projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{i}$ je vektor $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}$ **4)** Algebarska projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{i}$ je broj $\vec{x}\vec{i}$ **5)** $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} \in \mathbb{R}^3$
  6) $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\vec{i} = \cos\alpha, \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\vec{j} = \cos\beta, \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\vec{k} = \cos\gamma$ **7)** $\frac{x_1}{|\vec{x}|} = \cos\alpha, \frac{x_2}{|\vec{x}|} = \cos\beta, \frac{x_3}{|\vec{x}|} = \cos\gamma$
  8) $(|\vec{x}|\cos\alpha)\vec{i} + (|\vec{x}|\cos\beta)\vec{j} + (|\vec{x}|\cos\gamma)\vec{k} = \vec{x}$, **9)** $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$

- Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ generatorna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = n$. Tada je
  1) $m \le k \le n$ **2)** $n \le k \le m$ **3)** $m \le k$ **4)** $k \le m \le n$ **5)** $k \le n \le m$ **6)** $n \le m \le k$

- Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke $A(1,1,1)$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 18$. Odrediti $\vec{r}_C$ ako je $\overrightarrow{AB} \| \vec{a} = (1,4,8)$, $\overrightarrow{BC} \| \vec{b} = (-8,1,4)$ i ako su smerovi vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotni smerovima redom vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$.
  $\vec{r}_C =$

- Ako je A kvadratna matrica reda 7, tada je: **1)** $\det A = 0 \Leftarrow$ **rang** A$= 0$ **2)** $\det A = 0 \Leftrightarrow$ **rang** A≤ 6, **3)** $\det A = 0 \Rightarrow$ **rang** A$= 7$ **4)** **rang** A$= 7 \Rightarrow \det A \ne 0$, **5)** **rang** A$= 7 \Leftarrow \det A \ne 0$, **6)** **rang** A$= 7 \Leftarrow \exists A^{-1}$.

- **Svaka** linearna transformacija različita od nula transformacije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je: **1)** sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog

- **Napisati bar jednu**, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da:
  1) je injektivna $f(x) =$ **2)** nije injektivna $f(x) =$ **3)** nije sirjektivna $f(x) =$

- **Napisati bar jednu**, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ za koju važi da
  1) je injektivna $f(x,y) =$ **2)** nije injektivna $f(x,y) =$
  3) je sirjektivna $f(x,y) =$ **4)** nije sirjektivna $f(x,y) =$

- **Napisati bar jednu**, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da:
  1) je injektivna $f(x,y,z) =$ **2)** nije injektivna $f(x,y,z) =$
  3) je sirjektivna $f(x,y,z) =$ **4)** nije sirjektivna $f(x,y,z) =$

- Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(8,3)$ čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada funkcija rang je:
  1) $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ **2)** $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ **3)** $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ **4)** $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \overset{na}{\to} \mathbb{N} \cup \{0\}$ **5)** $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \overset{na}{\to} \{0,1,2,3\}$

- Zaokružiti one skupove $V \subseteq \mathbb{R}^3$ za koje važi $(1,0,2) \in V$: **1)** $V = Lin\Big(\{(2,0,4)\}\Big)$
  2) $V = Lin\Big(\{(-8,10,4),(4,-5,-2)\}\Big)$ **3)** $V = Lin\Big(\{(-8,10,4),(4,-5,-2),(0,0,0)\}\Big)$
  4) $V = Lin\Big(\{(0,-1,1),(1,1,1)\}\Big)$ **5)** $V = Lin\Big(\{(0,0,0)\}\Big)$ **6)** $V = Lin\Big(\{(2,0,3),(4,0,5)\}\Big)$
  7) $V = Lin\Big(\{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}\Big)$

- Ako su vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ **nekolinearni** tada je: **1)** $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ **2)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
  3) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ **4)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \le 2$ **5)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \le 1$ **6)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nezavisni
  7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda\vec{b}$ **8)** $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ **9)** $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ \ (\vec{a} \ne \lambda\vec{b}\ \wedge\ \lambda\vec{a} \ne \vec{b})$ **10)** $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\, \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0\ \wedge\ \alpha^2 + \beta^2 \ne 0$

- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **komplanarni** ako je:
  1) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \le 2$ **2)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \le 3$ **3)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$ **4)** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$
  5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \ne 0$ **6)** $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ **7)** $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0\ \Rightarrow\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ **8)** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.