ALGEBRA, KOLOKVIJUM 2 **21.01.2021.**

1. Ravan α sadrži tačku Q i normalna je na vektor $\vec{n}$, a prava p sadrži tačku P i paralelna je sa vektorom $\vec{p}$. Pri tome prava p nije ni normalna na ravan α, niti je paralelna sa njom. Takođe $P \notin \alpha$. Preko $\vec{r}_Q$, $\vec{r}_P$, $\vec{n}$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja temena A i B jednakokrakog trougla PAB sa osnovicom AB čija je ravan normalna na ravan α i sadrži pravu p, temena A i B pripadaju ravni α, i teme A pripada pravoj p.

2. Neka je $A = \{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{R}^3$ gde je $a = (1, 2, 3)$, $b = (1, 0, -2)$, $c = (3, 4, 4)$, i $d = (-3, 0, 6)$, i neka je $V = Lin(A)$.

   (a) Odrediti sve podskupove skupa A koji su baza potprostora V prostora $\mathbb{R}^3$.

   (b) Jednu od baza potprostora V dopuniti do baze prostora $\mathbb{R}^3$.

3. Neka je $a = (2, -1, 3)$, $b = (-1, p, 2)$, i neka je funkcija $f_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definisana sa

   $f_p(x, y, z) = (a \cdot (x, y, z)) \cdot a + b \times (x, y, z)$,

   gde je $p \in \mathbb{R}$.

   (a) Dokazati da je f_p linearna transformacija i napisati njenu matricu M_{f_p}.

   (b) Diskutovati rang matrice M_{f_p} po $p \in \mathbb{R}$.

REŠENJA:

1. Tačku A dobijamo kao prodor prave p kroz ravan α, te je $\vec{r}_A = \vec{r}_P + \dfrac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_P)\vec{n}}{\vec{n}\vec{p}}\vec{p}$. Kako je ravan trougla PAB sa osnovicom AB normalna na ravan α, sredina S osnovice A je projekcija tavcke P na ravan α, te je $\vec{r}_S = \vec{r}_P + \dfrac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_P)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$. Iz $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB}$ sledi $\vec{r}_B = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A$.

2. (a) Kako je

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \overset{[1]}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b' & c' & d' \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \\ 3 & -5 & -5 & 15 \end{bmatrix} \end{array} \overset{[2]}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b' & c'' & d'' \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

sledi da je $\dim V = rang\, M = 2$, i da je $\{a, b\}$ jedna baza potprostora V. Podskupovi skupa A koji su baze potprostora V su stoga svi dvočlani podskupovi od A koje čcine dva linearno nezavisna tj. nekolinearna vektora. Dva vektora su nekolinearna ako i samo ako su im koordinate neproporcionalne, te proverom neproporcionalnosti koordinata lako vidimo da su svaka dva vektora osim $\{b, d\}$ baze potprostora V.

[1] - Prvu kolonu oduzmemo od druge, prvu kolonu pomnoženu sa -3 dodamo trećoj, i prvu kolonu pomnoženu sa 3 dodamo četvrtoj.

[2] - Drugu kolonu oduzmemo od treće, i drugu kolonu pomnoženu sa 3 dodamo četvrtoj.

(b) Jednim od vektora standardne baze $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ se skup $\{a, b\}$ sigurno može (teorema) dopuniti do baze prostora $\mathbb{R}^3$. Kako je npr. $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & e_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = -4 \neq 0$, sledi da je $\{a, b, e_1\}$ jedna baza prostora $\mathbb{R}^3$.

3. (a) $f_p(x, y, z) = (a \cdot (x, y, z)) \cdot a + b \times (x, y, z) = (2x - y + 3z) \cdot (2, -1, 3) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & p & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$= (4x - 2y + 6z, -2x + y - 3z, 6x - 3y + 9z) + (-2y + pz, 2x + z, -px - y)$

$= (4x - 4y + (6+p)z, y - 2z, (6-p)x - 4y + 9z)$. Iz oblika izraza vidimo da f_p jeste linearna transformacija sa matricom $M_{f_p} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 6+p \\ 0 & 1 & -2 \\ 6-p & -4 & 9 \end{bmatrix}$.

(b) $|M_{f_p}| = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 6+p \\ 0 & 1 & -2 \\ 6-p & -4 & 9 \end{vmatrix} = 36 + 8(6-p) - (6+p)(6-p) - 32 = 16 - 8p + p^2$.

(b.1) Rang matrice je 3 za $|M_{f_p}| = 16 - 8p + p^2 \neq 0$, dakle za $p \neq \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = 4$.

(b.2) Za $p = 4$ je $M_{f_p} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 9 \end{bmatrix} \overset{[1]}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 9 \end{bmatrix} \overset{[2]}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 9 \end{bmatrix}$,

te je u ovom slučaju $rang\, M_{f_p} = 2$.

[1] - Treću vrstu pomnoženu sa -2 dodajemo prvoj.

[2] - Drugu vrstu pomnoženu sa -4 dodajemo prvoj.