Zadatak 1. Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x, y, z) = (ax+by+cz, ex+fy+gz)$ je sirjektivna ako i samo ako rang njene matrice $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{bmatrix}$ je 2. Dokazati.

Dokaz Ako je $a = b = c = d = e = f = g = 0$, tada je **rang**$M$=0 i f nije sirjektivna. Ako je **rang**M $\neq$0, neka je tada $a \neq 0$ što ne utiče na opštost. Tada sledeći sistemi moraju za svako u i v imati bar jedno rešenje.

$$\begin{array}{c} ax + by + cz = u \\ ex + fy + gz = v \end{array} \Leftrightarrow \left(\overset{\text{Prvi slučaj } (\mathbf{rang}M = 2).}{\begin{array}{r} ax + by + cz = u \\ hy + iz = F(u, v) \end{array}} \vee \overset{\text{Drugi slučaj } (\mathbf{rang}M = 1).}{\begin{array}{r} ax + by + cz = u \\ 0 = G(u, v). \end{array}} \right)$$

U prvom slučaju **rang**M=2 i f je očevidno sirjektivna ($a \neq 0, h \neq 0$ ili $a \neq 0, i \neq 0$), jer

$$\Big(\forall(u, v)\Big)\Big(\exists(x, y, z)\Big)\, f(x, y, z) = (u, v)$$

U drugom slučaju **rang**M=1 i postoje u i v takvi da je $G(u, v) \neq 0$, pa f nije sirjektivna. Kako je **rang**$M \in \{0, 1, 2\}$ to je dokaz završen. $F(u, v)$ i $G(u, v)$ su linearne funkcije od promenljivih u i v.

Zadatak 2. Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $f(x, y) = (ax + by, cx + dy, ex + fy,)$ je injektivna ako i samo ako **rang** njene matrice $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ je 2. Dokazati.

Dokaz Ako je $a = b = c = d = e = f = g = 0$, tada je **rang**$M$=0 i f nije injektivna. Ako je **rang**M $\neq$0, neka je tada $a \neq 0$ što ne utiče na opštost. Tada sledeći sistemi za bilo koje u i v ne smeju imati više od jednog rešenja da bi f bila injektivna.

$$\begin{array}{c} ax + by = u \\ cx + dy = v \\ ex + fy = w \end{array} \Leftrightarrow \left(\overset{\text{Prvi slučaj } (\mathbf{rang}M = 2).}{\begin{array}{r} ax + by = u \\ gy = F(u, v) \\ 0 = G(u, w) \end{array}} \vee \overset{\text{Drugi slučaj } (\mathbf{rang}M = 1).}{\begin{array}{r} ax + by = u \\ 0 = H(u, v) \\ 0 = S(u, w) \end{array}} \right)$$

U prvom slučaju **rang**M=2 i f je očevidno injektivna ($a \neq 0, g \neq 0$), jer broj rešenja je 1 ili 0. U drugom slučaju **rang**M=1 i očevidno postoje u, v i w takvi da je $0 = H(u, v)$ i $0 = S(u, w)$, pa f nije injektivna jer je sistem tada jednostruko neodređen. Kako je **rang**$M \in \{0, 1, 2\}$ to je dokaz završen. F(u,v), G(u,w), $H(u, v)$ i $S(u, w)$ su linearne funkcije od promenljivih u i v.

Zadatak 3. Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ je sirjektivna ako i samo ako je injektivna, ako i samo ako **rang** njene matrice $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ je 2, odnosno $\det M \neq 0$ i tada i samo tada f je izomorfizam.

Zadatak 4. Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ nikad nije sirjektivna i linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ nikad nije injektivna.

Na osnovu ovih zadataka i njihovih dokaza sledi teorema.

Teorema
Neka je M matrica linearne transformacije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Tada linearna transformacija f je:

(a) sirjektivna (epimorfizam) ako i samo ako je $n \geq m \ \wedge\ \mathbf{rang}M = m$
(b) injektivna (monomorfizam) ako i samo ako je $n \leq m \wedge \mathbf{rang}M = n$
(c) bijektivna (izomorfizam) ako i samo ako je $n = m \ \wedge\ \mathbf{rang}M = n$