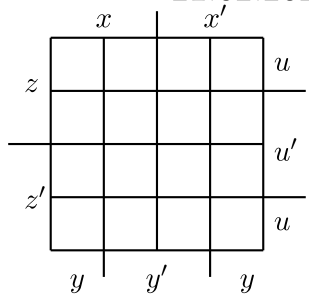
ALGEBRA **21.02.2021.**



1. Napisati $SDNF$, sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0

2. Naći količnik i ostatak pri delenju polinoma $p(x) = x^5 + 5x^4 + 6x^3 - x^2 - 5x - 6$ polinomom $q(x) = x^2 + x + 1$, i faktorisati polinom p nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

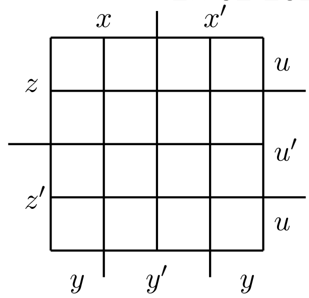
3. U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačinu $z^3 = i\overline{z}$.

4. Prava p je određena tačkom P i vektorom pravca $\vec{p}$. Tačke $A \notin p$ i $B \notin p$ su takve da $AB \not\parallel p$. U funkciji od $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja tačaka C i D, tako da $ABCD$ bude pravougaonik čiji presek dijagonala AC i BD pripada pravoj p.

5. Neka je V vektorski prostor koji je generisan skupom vektora $\{a, b, c, d, e\}$, čije **sve** zavisnosti su date sledećim jednakostima i njihovim linearnim kombinacijama:
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & + & b & - & 15c & + & 10d & - & e & = & 0 \\ 2a & + & b & + & 18c & - & 12d & + & e & = & 0 \\ a & & & + & 33c & - & 22d & + & 2e & = & 0 \end{array}$$
(a) Odrediti dimenziju vektorskog prostora V.
(b) Naći sve podskupove skupa $\{a, b, c, d, e\}$ koji su baze prostora V.

6. Za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je poznato da je $f(1,0) = (1, a, 0)$ i $f(1,1) = (1, b, b)$, gde je $a, b \in \mathbb{R}$. **(a)** Izračunati $f(x, y)$ za $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i napisati matricu M_f linearne transformacije f. **(b)** Ispitati za koje vrednosti $a, b \in \mathbb{R}$ je linearna transformacija f injektivna, za koje je sirjektivna, i za koje je izomorfizam.

ALGEBRA **21.02.2021.**



1. Napisati $SDNF$, sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0

2. Naći količnik i ostatak pri delenju polinoma $p(x) = x^5 + 5x^4 + 6x^3 - x^2 - 5x - 6$ polinomom $q(x) = x^2 + x + 1$, i faktorisati polinom p nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

3. U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačinu $z^3 = i\overline{z}$.

4. Prava p je određena tačkom P i vektorom pravca $\vec{p}$. Tačke $A \notin p$ i $B \notin p$ su takve da $AB \not\parallel p$. U funkciji od $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja tačaka C i D, tako da $ABCD$ bude pravougaonik čiji presek dijagonala AC i BD pripada pravoj p.

5. Neka je V vektorski prostor koji je generisan skupom vektora $\{a, b, c, d, e\}$, čije **sve** zavisnosti su date sledećim jednakostima i njihovim linearnim kombinacijama:
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & + & b & - & 15c & + & 10d & - & e & = & 0 \\ 2a & + & b & + & 18c & - & 12d & + & e & = & 0 \\ a & & & + & 33c & - & 22d & + & 2e & = & 0 \end{array}$$
(a) Odrediti dimenziju vektorskog prostora V.
(b) Naći sve podskupove skupa $\{a, b, c, d, e\}$ koji su baze prostora V.

6. Za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je poznato da je $f(1,0) = (1, a, 0)$ i $f(1,1) = (1, b, b)$, gde je $a, b \in \mathbb{R}$. **(a)** Izračunati $f(x, y)$ za $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i napisati matricu M_f linearne transformacije f. **(b)** Ispitati za koje vrednosti $a, b \in \mathbb{R}$ je linearna transformacija f injektivna, za koje je sirjektivna, i za koje je izomorfizam.

REŠENJA:

	x	x	x'	x'	
z		$*$	$*$		u
z	$*$		$*$	$*$	u'
z'	$*$			$*$	u'
z'					u
	y	y'	y'	y	

1. Proste implikante:

   yu', $y'zu$, $x'y'z$, $x'zu'$.

   $MDNF_1 = yu' + y'zu + x'y'z$,

   $MDNF_2 = yu' + y'zu + x'zu'$.

2. $$\begin{array}{rrrrrl}
(x^5 + & 5x^4 + & 6x^3 - & x^2 - 5x - 6) & : (x^2+x+1) = x^3+4x^2+x-6 \\
-(x^5 + & x^4 + & x^3 &) & \\ \hline
 & 4x^4 + & 5x^3 - & x^2 - 5x - 6 & \\
 & -(4x^4 + & 4x^3 + & 4x^2 \quad\quad) & \\ \hline
 & & x^3 - & 5x^2 - 5x - 6 & \\
 & & -(x^3 + & x^2 + x \quad) & \\ \hline
 & & & -6x^2 - 6x - 6 & \\
 & & & -(-6x^2 - 6x - 6) & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

   $\Rightarrow \quad p(x) = (x^2+x+1)(x^3+4x^2+x-6)$.

   Kompleksni koreni polinoma x^2+x+1 su $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$, a kandidati za racionalne korene polinoma x^3+4x^2+x-6 su $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$. Hornerovom šemom proveravamo koji od njih jesu koreni:

	1	4	1	-6
1	1	5	6	0
1	1	6	12	
-1	1	4	2	
2	1	7	20	
-2	1	3	0	

   $\Rightarrow \quad p(x) = (x^2+x+1)(x-1)(x+2)(x+3) \quad \leftarrow \quad$ faktorizacija nad $\mathbb{R}$,

   $\quad = \left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)(x-1)(x+2)(x+3) \quad \leftarrow \quad$ faktorizacija nad $\mathbb{C}$.

3. Jednačina $z^3 = i\overline{z}$ je definisana za svako $z \in \mathbb{C}$, i rešavamo je smenom $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho \geq 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi)$.

   $$\left(z^3 = i\overline{z} \ \wedge \ z = \rho e^{i\varphi}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\rho^3 \rho e^{i3\varphi} = e^{i\frac{\pi}{2}}\rho e^{-i\varphi} = \rho e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} \ \wedge \ z = \rho e^{i\varphi}\right)$$

   $$\Leftrightarrow \quad \left(\left(\rho = 0 \ \vee \ \left(\rho = 1 \ \wedge \ 3\varphi = -\varphi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) \ \wedge \ z = \rho e^{i\varphi}\right)$$

   $$\Leftrightarrow \quad \left(\left(\rho = 0 \ \vee \ \left(\rho = 1 \ \wedge \ \varphi = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \ k \in \{-2,-1,0,1\}\right)\right) \ \wedge \ z = \rho e^{i\varphi}\right)$$

   $$\Leftrightarrow \quad \left(\left(\rho = 0 \ \vee \ \left(\rho = 1 \ \wedge \ \varphi \in \left\{-\frac{7\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right\}\right)\right) \ \wedge \ z = \rho e^{i\varphi}\right)$$

   $$\Leftrightarrow \quad z \in \left\{0, e^{-\frac{7\pi}{8}i}, e^{-\frac{3\pi}{8}i}, e^{\frac{\pi}{8}i}, e^{\frac{5\pi}{8}i}\right\}.$$

4. Neka je $T = AC \cap BD$ (presek dijagonala). Tačka S sa vektorom položaja $\vec{r}_S = \dfrac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$ je sredina duži AB. Ravan α koja sadrži S i normalna je na $\overrightarrow{AB}$ sadrži i tačku T, te je $T = \alpha \cap p$. Sledi da je $\vec{r}_T = \vec{r}_P + \dfrac{(\vec{r}_S - \vec{r}_P)\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}\vec{p}}\vec{p}$. Iz $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{TC}$ i $\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{TD}$ dobijamo $\vec{r}_C = 2\vec{r}_T - \vec{r}_A$ i $\vec{r}_D = 2\vec{r}_T - \vec{r}_B$.

5. **(a)**
   $$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
a & + & b & - & 15c & + & 10d & - & e & = & 0 \\
2a & + & b & + & 18c & - & 12d & + & e & = & 0 \\
a & & & + & 33c & - & 22d & + & 2e & = & 0
\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rrrrrrrrrrr}
a & + & b & - & 15c & + & 10d & - & e & = & 0 \\
 & - & b & + & 48c & - & 32d & + & 3e & = & 0 \\
 & - & b & + & 48c & - & 32d & + & 3e & = & 0
\end{array}$$

   $$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rrrrrrrrrrr}
a & + & b & - & 15c & + & 10d & - & e & = & 0 \\
 & - & b & + & 48c & - & 32d & + & 3e & = & 0
\end{array}$$

   Iz trougaonog oblika sistema vidimo da se a i b mogu izraziti preko c, d i e, a da se pri tome ni jedan od c, d i e ne može izraziti preko preostala dva. Sledi da je $\{c, d, e\}$ jedna baza prostora V i da je $\dim V = 3$.

(b) Kako je

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & c \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 48 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & d \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -32 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & e \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} b & c \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -15 \\ -1 & 48 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} b & d \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -1 & -32 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0,$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} b & e \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c & d \end{array} \\ \begin{vmatrix} -15 & 10 \\ 48 & -32 \end{vmatrix} \end{array} = 0, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c & e \end{array} \\ \begin{vmatrix} -15 & 10 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} d & e \end{array} \\ \begin{vmatrix} 10 & 10 \\ -32 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0,$$

sledi da $\{c, d, e\}$, $\{b, d, e\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, d, e\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, b, d\}$ i $\{a, b, c\}$ jesu baze, a $\{a, b, e\}$ nije baza.

6. Iz $(x, y) = \alpha(1, 0) + \beta(1, 1) = (\alpha + \beta, \beta)$ dobijamo $\beta = y$ i $\alpha = x - y$, te sledi

$f(x, y) = f((x - y)(1, 0) + y(1, 1)) = (x - y)f(1, 0) + yf(1, 1) = (x - y)f(1, 0) + yf(1, 1) = (x - y)(1, a, 0) + y(1, b, b) = (x - y, ax - ay, 0) + (y, by, by) = (x, ax + (b - a)y, by)$,

te iz oblika funkcije f vidimo da je ona linearna transformacija sa matricom $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b-a \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

Linearna transformacija f ne može biti sirjektivna ni za koje vrednosti parametara jer joj je dimenzija domena manja od dimenzije kodomena. Injektivna je u slučaju $rang\, M_f = 2$, a to je očigledno u slučaju kada je $(b \neq 0 \ \vee \ (b = 0 \ \wedge \ a \neq b = 0))$.