1. Naći sve proste implikante i minimalne DNF Bulove funkcije f date tabelom:

x	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
y	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
z	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
u	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
f	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1

Rešenje $f(x,y,z,u) = xyzu + xyz'u + xy'zu' + xy'z'u' + x'yzu' + x'yz'u + x'yz'u' + x'y'zu' + x'y'z'u'$ je SDNF bulove funkcije f. Proste implikante su : $y'u', x'u', xyu, yz'u, x'yz'$. Minimalne disjunktivne normalne forme su: $y'u' + x'u' + xyu + yz'u$ i $y'u' + x'u' + xyu + x'yz'$.

2. Odrediti kompleksne brojeve α i β, kao i rešenja jednačine $(z-\alpha)^6 = \beta$, tako da 0 i 1 budu rešenja te jednačine, pri čemu imaginarni delovi svih rešenja su nenegativni. Koju figuru u kompleksnoj ravni obrazuju rešenja jednačine $(z-\alpha)^6 = \beta$?

   Rešenje Jasno je da su $z_0 = 0$ i $z_1 = 1$ susedna temena pravilnoga šestougla $z_0z_1z_2z_3z_4z_5$, čija sva temena su sva rešenja jednačine $(z-\alpha)^6 = \beta$. Kompleksni broj α je centar toga šestougla i očevidno treće teme jednakostraničnog trougla $z_0z_1\alpha$, pa je $\alpha = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Ako sad u datu jednačinu $(z-\alpha)^6 = \beta$ uvrstimo $\alpha = e^{i\frac{\pi}{3}}$ i $z = 0$, dobija se $\beta = 1$. Sada se lako dobijaju ostala rešenja rotacijom oko α za ugao $\frac{\pi}{3}$ tj. $z_k = \alpha + (z_{k-1} - \alpha)e^{i\frac{\pi}{3}}$ za $k = 2,3,4,5$ odnosno $z_2 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_4 = i\sqrt{3}$, $z_5 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Neka je $(z-w)^4 = v$ kompleksna jednačina po nepoznatoj z. **(a)** Šta obrazuju u kompleksnoj ravni rešenja jednačine $(z-w)^4 = v$ i odrediti sve vrednosti za w ako su 0 i 1 rešenja jednačine $(z-w)^4 = v$. **(b)** Faktorisati nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ polinom f definisan sa $f(w) = 4w^3 - 6w^2 + 4w - 1$.

   Rešenje (a) Za fiksne w i v važi: ako je $v = 0$, tada jednačina ima jedno rešenje $z = w$ (tačka); ako je $v \neq 0$, tada jednaćina ima 4 rešenja $z_i = w + \sqrt[4]{v}$ koja čine kvadrat sa težištem (presekom dijagonala) w i poluprečnikom opisane kružnice $\sqrt[4]{|v|}$. Ako su 0 i 1 dva od četiri temena tog kvadrata, tada je skup svih temena tog kvadrata $K_1 = \{0, 1, 1+i, i\}$ ili $K_2 = \{0, 1, 1-i, -i\}$ ili $K_3 = \{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\}$. Preseci dijagonala ovih kvadrata su redom $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $w_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ i $w_3 = \frac{1}{2}$. **(b)** $4w^3 - 6w^2 + 4w - 1 = 0 \Leftrightarrow -w^4 + 4w^3 - 6w^2 + 4w - 1 = -w^4 \Leftrightarrow -(w-1)^4 = -w^4 \Leftrightarrow \left(\frac{w-1}{w}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{w-1}{w} = \sqrt[4]{1} \in \{1, i, -1, -i\} \wedge w \neq 1\right) \Leftrightarrow \frac{w-1}{w} \in \{i, -1, -i\} \Leftrightarrow w \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\}$, te je $f(w) = (w - \frac{1}{2})(w - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)(w - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = (w - \frac{1}{2})(w^2 - w + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(2w-1)(2w^2 - 2w + 1) = \frac{1}{4}(4w^3 - 6w^2 + 4w + 1)$. Centri ova tri kvadrata su koreni ovoga kubnoga polinoma!!!

4. Naći proste implikante i minimalne disjunktivne normalne forme Bulove funkcije date tablicom:

x	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
y	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
z	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
u	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
f	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1

Rešenje Proste implikante su: $y'u'$, xyu, xzu, $xy'z$, $x'z'u$, $x'y'z'$, $yz'u$. Minimalne disjunktivne normalne forme su: $MDNF_1 = y'u' + xzu + xyu + x'z'u$, $MDNF_2 = y'u' + xzu + yz'u + +x'y'z'$, $MDNF_3 = y'u' + xzu + yz'u + x'z'u$, $MDNF_4 = y'u' + xy'z + xyu + x'z'u$.

5. Neka je $A = \Big\{ f \mid f : \{0,1\} \to \{0,1\} \Big\}$. **(a)** Da li je $(A, \circ)$ polugrupa s neutralnim elementom, gde je $\circ$ kompozicija funkcija? **(b)** Da li je $(A, \circ)$ grupa? **(c)** Naći sve $B \subseteq A$ takve da je $(B, \circ)$ grupa.

   Rešenje (a) $(A, \circ)$ je grupoid jer po definiciji kompozicije funkcija iz $A = \Big\{ f \mid f : \{0,1\} \to \{0,1\} \Big\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, gde je $f_1 = \binom{01}{00}$, $f_2 = \binom{01}{01}$, $f_3 = \binom{01}{10}$ i $f_4 = \binom{01}{11}$ sledi da je kompozicija svake dve funkcije iz skupa A opet funkcija iz skupa A. Asocijativnost kompozicije sledi iz $\Big((f \circ g) \circ h\Big)(x) = (f \circ g)\Big(h(x)\Big) = f\Big(g(h(x))\Big) = f\Big((g \circ h)(x)\Big) = \Big(f \circ (g \circ h)\Big)(x)$. Neutralni element je identička funkcija $f_2 = \binom{01}{01}$, jer je za nju očevidno $f_2 \circ f_i = f_i \circ f_2 = f_i$ za svako $i \in \{1,2,3,4\}$.

(b) $(A,\circ)$ nije grupa jer naprimer elemenet $f_1=\binom{01}{00}$ nema sebi inverzni zbog $f_1\circ f_1=f_1\neq f_2, f_1\circ f_2=f_1\neq f_2, f_1\circ f_3=f_1\neq f_2, f_1\circ f_4=f_1\neq f_2$.

(c) $B=\{f_2,f_3\}$, $B=\{f_2\}$, $B=\{f_1\}$, $B=\{f_4\}$.

6. Neka su $P=t^4+t^3+t^2+2$ i $Q=t^5+3t^4+4t^3+4t+3$ polinomi nad poljem $\mathbb{Z}_5$. Naći polinom $R=NZD(P,Q)$ i faktorisati polinome P, Q i R nad poljem $\mathbb{Z}_5$.

Rešenje
$R=NZD(P,Q)=(t+4)(t^2+4t+1)$, $P=(t+4)(t^2+4t+1)(t+3)$ i $Q=(t+4)(t^2+4t+1)(t^2+2)$.

7. Neka su $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcije definisane sa $f(x)=1$, $g(x)=\cos x$, $h(x)=\cos^2 x$. Ispitati da li je $\mathbf{A}=(A,+,\cdot)$ prsten, gde je $A=\{f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f_{a,b}(x)=a+b\cos x\ \wedge\ a,b\in R\}$, a $+$ i $\cdot$ su uobičajene operacije sabiranja i množenja funkcija tj. $(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ i $(\varphi\cdot\psi)(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ za svako $x\in\mathbb{R}$.

Rešenje

$(A,+)$ je grupoid jer je $f_{a,b}(x)+f_{c,d}(x)=a+b\cos x+c+d\cos x=a+c+(b+d)\cos x=f_{a+c,b+d}(x)$ tj. $f_{a+c,b+d}\in A$. Komutativnost i asocijativnost operacije sabiranja funkcija sledi iz definicije te operacije i komutativnosti i asocijativnosti sabiranja realnih brojeva. Neutralni elemenat za operaciju $+$ je $f_{0,0}$. Inverzni za $f_{a,b}$ je $f_{-a,-b}$. Znači $\mathbf{A}=(A,+)$ je Abelova grupa.

$(A,\cdot)$ nije grupoid jer je $f_{a,b}(x)\cdot f_{c,d}(x)=(a+b\cos x)(c+d\cos x)=ac+(ad+bc)\cos x+bd\cos^2 x$ što nije oblika $p+q\cos x$. Prema tome $\mathbf{A}=(A,+,\cdot)$ nije prsten.

8. **(a)** Naći vrednosti parametara $a,b,c\in R$ za koje je $1+i$ koren polinoma $f(x)=x^5-5x^4+ax^3-16x^2+bx+c$. **(b)** Faktorisati nad poljem kompleksnih brojeva polinom $g(x)=x^5-5x^4+10x^3-16x^2+16x-12$.

Rešenje a) Zamenom $x=1+i$ u $x^5-5x^4+ax^3-16x^2+bx+c=0$ i izjednačavanjem realnog i imaginarnog dela sa 0 dobija se $b=-2a+36$ i $c=4a-52$. Znači skup svih traženih trojki (a,b,c) je $\{(a,-2a+36,4a-52)|a\in R\}$.

b) Kako se za $a=10$ dobija baš $g(x)=x^5-5x^4+10x^3-16x^2+16x-12$, to znači da je $g(1+i)=g(1-i)=0$ tj. g je deljiv sa $(x-(1+i))(x-(1-i))=x^2-2x+2$, pa njihovim deljenjem se dobija da je $x^5-5x^4+10x^3-16x^2+16x-12=(x^2-2x+2)(x^3-3x^2+2x-6)$. Potencijalni kandidati za racionalne nule polinoma x^3-3x^2+2x-6 su $\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$ i efektivnim proveravanjem (Hornerovom šemom) dobijamo da je 3 njegova nula, što znači da je $x^3-3x^2+2x-6=(x-3)(x^2+2)$. Najzad imamo da je $x^5-5x^4+10x^3-16x^2+16x-12=(x-1-i)(x-1+i)(x-3)(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2})$.

9. Neka su $f_i:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R},\ i\in\{1,2,3,4,5,6\}$ funkcije definisane sa

$f_1(x)=x \qquad f_2(x)=\frac{1}{x} \qquad f_3(x)=1-x \qquad f_4(x)=\frac{1}{1-x} \qquad f_5(x)=\frac{x-1}{x} \qquad f_6(x)=\frac{x}{x-1}$

i neka je $G=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$. Dokazati da je $(G,\circ)$ grupa. Da li je grupa $(G,\circ)$ izomorfna sa grupom $(\mathbb{Z}_6,+)$ (odgovor obrazložiti)?

Rešenje

$(G,\circ)$ je grupoid jer zatvorenost operacije $\circ$ sledi iz Kejlijeve tablice. Asocijativnost važi za kompoziciju funkcija. Prva vrsta je jednaka graničnoj vrsti i prva kolona je jednaka graničnoj koloni što znači da je f_1 neutralni element. Kako se taj neutralni element pojavljuje tačno jedanput u svakoj vrsti i koloni i kako je simetrično raspoređen u odnosu na glavnu dijagonalu to sledi da svaki elemenat iz G ima sebi inverzni. Znači $(G,\circ)$ jeste grupa. Kako grupa $(G,\circ)$ nije komutativna, jer je $f_2\circ f_3\neq f_3\circ f_2$, to sledi da $(G,\circ)$ i $(\mathbb{Z}_6,+)$ nisu izomorfne jer $(\mathbb{Z}_6,+)$ jeste komutativna grupa.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

10. Odrediti realne brojeve a i b tako da polinom $p(x)=x^4+ax^3+bx^2-8x+1\in\mathbb{R}[x]$ bude potpun kvadrat, a zatim izvršiti faktorizaciju nad poljima $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$.

Rešenje Iz $x^4+ax^3+bx^2-8x+1=(\pm x^2+cx+d)^2=x^4+c^2x^2+d^2\pm 2cx^3\pm 2dx^2+2cdx$ sledi sistem jednačina $a=\pm 2c,\ b=c^2\pm 2d,\ -8=2cd,\ 1=d^2,$ čijim rešavanjem dobijamo da je

$(a,b)\in\{(-8,18),(8,14)\}$. Znači $p(x)=\Big(x^2\pm(4x-1)\Big)^2$. Nad poljem $\mathbb{Q}$ ne postoji faktorizacija, a nad poljima $\mathbb{C}$ odnosno $\mathbb{R}$ faktorizacija je $(x^2+4x-1)^2=(x+2-\sqrt{5})^2(x+2+\sqrt{5})^2$ tj. $(x^2-4x+1)^2=(x-2-\sqrt{3})^2(x-2+\sqrt{3})^2$.

11. Dati su kompleksni brojevi $z_1=2+3i$ i $z_2=-5-i$. Naći kompleksni broj z takav da je $|z|=2\sqrt{26}$ i $\measuredangle z_1Oz=\frac{1}{3}\measuredangle z_1Oz_2$, gde su svi uglovi orijentisani.

Rešenje Kako je $\frac{z}{|z|}=\frac{z_1}{|z_1|}\cdot e^{i\theta}$, gde je $\theta=\frac{1}{3}\measuredangle z_10z_2=\frac{1}{3}\arg\frac{z_2}{z_1}=\frac{\pi}{4}$, sledi $z=-2+10i$.

12. Odrediti skup rešenja jednačine $\left|\frac{z}{1-iz}\right|=1$, nacrtati ga u kompleksnoj ravni i odrediti skupove njihovih argumenata i modula.

Rešenje $\left|\frac{z}{1-iz}\right|=1\Leftrightarrow|z|=|1-iz|\Leftrightarrow z\bar{z}=(1-iz)\overline{(1-iz)}\Leftrightarrow z\bar{z}=(1-iz)(1+i\bar{z})\Leftrightarrow z-\bar{z}=-i\Leftrightarrow 2iI_m(z)=-i\Leftrightarrow I_m(z)=-\frac{1}{2}$. Znači, skup rešenja date jednačine u kompleksnoj ravni je prava paralelna realnoj osi koja seče imaginarnu osu u $-\frac{1}{2}i$. Skup argumenata je $(-\pi,0)$, a skup modula je skup svih realnih brojeva većih ili jednakih od $\frac{1}{2}$.

13. Ispitati da li je $(S,*,\cdot,f,0,1)$ Bulova algebra gde je $S=\{0,1\}$ podskup skupa celih brojeva, operacija f definisana sa $f(x)=1-x$ i operacija $*$ definisana sa $x*y=f(f(x)\cdot f(y))$ (tj. $x*y=x+y-xy$), gde su $-$ i $\cdot$ poznate operacije oduzimanja i množenja u skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$.

Rešenje Dokazaćemo da bijekcija $F:S\to\{\perp,\top\}$ definisna sa $\begin{pmatrix}0&1\\\perp&\top\end{pmatrix}$ jeste homomorfizam (tj.izomorfizam) strukture $(S,*,\cdot,f,0,1)$ i Bulove algebre $(\{\perp,\top\},\vee,\wedge,\neg,0,1)$. Izomorfizam je očevidan iz sledećih tablica.
$\begin{array}{c|cc}*&0&1\\\hline 0&0&1\\1&1&1\end{array}\quad\begin{array}{c|cc}\vee&\perp&\top\\\hline\perp&\perp&\top\\\top&\top&\top\end{array}\quad\begin{array}{c|cc}\cdot&0&1\\\hline 0&0&0\\1&0&1\end{array}\quad\begin{array}{c|cc}\wedge&\perp&\top\\\hline\perp&\perp&\perp\\\top&\perp&\top\end{array}\quad\begin{array}{c|c}x&f(x)\\\hline 0&1\\1&0\end{array}\quad\begin{array}{c|c}x&\neg x\\\hline\perp&\top\\\top&\perp\end{array}$

14. **a)** Rešiti jednačinu $\left(\frac{-w}{1-w}\right)^5=1$ u skupu kompleksnih brojeva. **b)** Dokazati da jednačina $\left(\frac{-w}{1-w}\right)^5=1$ je ekvivalentna sa jednačinom $1-5w+10w^2-10w^3+5w^4=0$. **c)** Korišćenjem rezultata pod a) i b) dokazati da je $1-5w+10w^2-10w^3+5w^4=5(w^2-w+\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{5}})(w^2-w+\frac{1}{4\sin^2\frac{2\pi}{5}})$ i da je $\sin^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{2\pi}{5}=\frac{5}{4}$ i $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}}{4}$. Ako se umesto 5 uzme $2\ell+1$ dobija se uopštenje $\sin\frac{\pi}{2\ell+1}\sin\frac{2\pi}{2\ell+1}\dots\sin\frac{\ell\pi}{2\ell+1}=\frac{\sqrt{2\ell+1}}{2^\ell}$.

Rešenje a) Domen rešavanja jednačine je $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. $\left(\frac{-w}{1-w}\right)^5=1\Leftrightarrow\frac{w}{w-1}=\sqrt[5]{1}\in\{e^{\frac{2k\pi}{5}i}|k\in\{-2,-1,0,1,2\}\}$. Jednačina $\frac{w}{w-1}=1$ nema rešenja, te je $\left(\frac{-w}{1-w}\right)^5=1\Leftrightarrow w=(w-1)e^{\frac{2k\pi}{5}i}$, $k\in\{-2,-1,1,2\}\Leftrightarrow w(1-e^{\frac{2k\pi}{5}i})=-e^{\frac{2k\pi}{5}i}$, $k\in\{-2,-1,1,2\}\Leftrightarrow w=\frac{e^{\frac{2k\pi}{5}i}}{e^{\frac{2k\pi}{5}i}-1}=\frac{e^{\frac{2k\pi}{5}i}}{e^{\frac{k\pi}{5}i}\left(e^{\frac{k\pi}{5}i}-e^{-\frac{k\pi}{5}i}\right)}=\frac{e^{\frac{k\pi}{5}i}}{2i\sin\frac{k\pi}{5}}$, $k\in\{-2,-1,1,2\}$ **b)** $\left(\frac{-w}{1-w}\right)^5=1\Leftrightarrow-w^5=(1-w)^5=1-5w+10w^2-10w^3+5w^4-w^5\Leftrightarrow 1-5w+10w^2-10w^3+5w^4=0$. **c)** Iz b) sledi da su rešenja jednačine $\left(\frac{-w}{1-w}\right)^5=1$ koreni polinoma $1-5w+10w^2-10w^3+5w^4$, te je $1-5w+10w^2-10w^3+5w^4=5(w^2-2Re(\frac{e^{\frac{\pi}{5}i}}{2i\sin\frac{\pi}{5}})w+\left|\frac{e^{\frac{\pi}{5}i}}{2i\sin\frac{\pi}{5}}\right|^2)(w^2-2Re(\frac{e^{\frac{2\pi}{5}i}}{2i\sin\frac{2\pi}{5}})w+\left|\frac{e^{\frac{2\pi}{5}i}}{2i\sin\frac{2\pi}{5}}\right|^2)=5(w^2-w+\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{5}})(w^2-w+\frac{1}{4\sin^2\frac{2\pi}{5}})$. Iz $1-5w+10w^2-10w^3+5w^4=5(w^2-w+\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{5}})(w^2-w+\frac{1}{4\sin^2\frac{2\pi}{5}})=5w^4-10w^3+5(\frac{1}{4\sin^2\frac{2\pi}{5}}+\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{5}}+1)w^2-5(\frac{1}{4\sin^2\frac{2\pi}{5}}+\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{5}})w+\frac{5}{16\sin^2\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5}}$ izjednačavanjem koeficijenata uz w i slobodnih članova sledi tvrđenje.

15. U skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}^\star=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ definisana je relacija ρ: $z_1\,\rho\,z_2\Leftrightarrow\arg(z_1)=\arg(z_2)$. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije. Dati geometrijsku interpretaciju klasa iz faktor skupa $\mathbb{C}^\star/\rho$. Dokazati da je $(\mathbb{C}^\star/\rho,\circ)$ komutativna grupa, gde je operacija $\circ$ definisana sa $C_{z_1}\circ C_{z_2}=C_{z_1z_2}$, za svake dve klase C_{z_1} i C_{z_2} iz $\mathbb{C}^\star/\rho$. Dokazati da je funkcija $\varphi:\mathbb{C}^\star/\rho\to\{e^{i\theta}|\theta\in(-\pi,\pi]\}$ definisana sa $\varphi(C_z)=e^{i\arg z}$ izomorfizam grupa $(\mathbb{C}^\star/\rho,\circ)$ i $(\{e^{i\theta}|\theta\in(-\pi,\pi]\},\cdot)$.

Rešenje Refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost relacije ρ slede iz refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti relacije $=$. Kako je $\arg(z_1)=\arg(z_2)$ ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{Oz_1}$ i $\overrightarrow{Oz_2}$ istog pravca i smera tj. ako i samo ako se poklapaju poluprava koja ishodi iz O i sadrži z_1 i poluprava koja ishodi iz O i sadrži z_2, to klasu nekog elementa $z \in \mathbb{C}^\star$ čine svi oni $w \in \mathbb{C}^\star$ koji pripadaju polupravoj koja ishodi iz O i sadrži z. Dakle, klase ekvivalencije su poluprave koje ishode iz koordinatnog početka. Operacija $\circ$ je dobro definisana jer iz $C_{z_1} = C_{w_1} \wedge C_{z_2} = C_{w_2}$ sledi $\arg(z_1) = \arg(w_1) \wedge \arg(z_2) = \arg(w_2)$, što implicira $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \alpha = \arg(w_1) + \arg(w_2) + \alpha = \arg(w_1 w_2)$, za neko $\alpha \in \{0, -2\pi, 2\pi\}$, te je $C_{z_1} \circ C_{z_2} = C_{z_1 z_2} = C_{w_1 w_2} = C_{w_1} \circ C_{w_2}$. Operacija $\circ$ je zatvorena jer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\star \Rightarrow z_1 z_2 \in \mathbb{C}^\star$. Asocijativnost sledi iz $(C_{z_1} \circ C_{z_2}) \circ C_{z_3} = C_{(z_1 z_2) z_3} = C_{z_1 (z_2 z_3)} = C_{z_1} \circ (C_{z_2} \circ C_{z_3})$, a komutativnost iz $C_{z_1} \circ C_{z_2} = C_{z_1 z_2} = C_{z_2 z_1} = C_{z_2} C_{z_1}$. Neutralni element je pozitivni deo realne ose tj. $C_1 = C_{156} = \ldots$, jer je $C_1 \circ C_z = C_{1 \cdot z} = C_z$, a inverzni element klase C_z je klasa $C_{\overline{z}}$ zbog $C_z \circ C_{\overline{z}} = C_{z\overline{z}} = C_{|z|^2} = C_1$ i zato što je $|z|^2$ pozitivan realan broj ($z \neq 0$ jer je $z \in \mathbb{C}^\star = \mathbb{C} \setminus \{0\}$). Znači $(\mathbb{C}^\star/\rho, \circ)$ jeste Abelova grupa. Funkcija φ je injektivna jer $\varphi(C_z) = \varphi(C_w) \Rightarrow e^{i \arg z} = e^{i \arg w} \Rightarrow \arg z = \arg w \Rightarrow \ z \ \rho \ w \Rightarrow C_z = C_w$. Funkcija φ je i sirjektivna jer za proizvoljno $e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ važi $\varphi(C_{e^{i\theta}}) = e^{i\theta}$. Funkcija φ je homomorfizam jer važi $\varphi(C_z \circ C_w) = \varphi(C_{zw}) = e^{i \arg(zw)} = e^{i(\arg z + \arg w + \alpha)} = e^{i \arg z} e^{i \arg w} e^{i\alpha} = \varphi(C_z)\varphi(C_w)$ jer je $e^{i\alpha} = 1$ zbog $\alpha \in \{0, -2\pi, 2\pi\}$.

16. Polinom P je definisan sa $P(x) = x^8 - 4x^6 + 16x^4 - 64x^2 + 256$. Napisati polinom P : **a)** po stepenima od $x - 1$, **b)** kao proizvod četiri kvadratna trinoma čiji su koeficijenti realni brojevi.

    Rešenje Primenom algoritma za delenje polinoma dobijamo $P(x) = x^8 - 4x^6 + 16x^4 - 64x^2 + 256 = (x-1)(x^7 + x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 13x^3 + 13x^2 + 77x + 77) + 333 = (x-1)((x-1)(x^6 + 2x^5 - x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 22x + 99) + 176) + 333 = \ldots = (x-1)^8 + 8(x-1)^7 + 24(x-1)^6 + 32(x-1)^5 + 26(x-1)^4 + 40(x-1)^4 + 128(x-1)^2 + 176(x-1) + 333$.

    Kako je polinom $P(x) = x^8 - 4x^6 + 16x^4 - 64x^2 + 256$ jednak zbiru prvih 5 članova geometrijskog niza sa prvim članom 256 i koeficijentom progresije $-\frac{1}{4}x^2$, primenom formule za zbir članova geometrijskog niza dobijamo $P(x) = 256 \cdot \dfrac{1 - (-\frac{1}{4}x^2)^5}{1 - (-\frac{1}{4}x^2)} = 256 \cdot \dfrac{1 + \frac{1}{4^5}x^{10}}{1 + \frac{1}{4}x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{4^5}x^{10} = 0 \wedge 1 + \dfrac{1}{4}x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$ $x = \sqrt[10]{-4^5} = \sqrt[10]{4^5 e^{\pi i}} = \{2e^{\frac{(2k+1)\pi}{10}} | k \in \mathbb{Z}\} \wedge x \neq \sqrt{-4} = \{2i, -2i\} \ \Leftrightarrow \ x \in \{2e^{\pm\frac{\pi}{10}i}, 2e^{\pm\frac{3\pi}{10}i}, 2e^{\pm\frac{7\pi}{10}i}, 2e^{\pm\frac{9\pi}{10}i}\}$.
    Kako je $(x - 2e^{\varphi i})(x - 2e^{-\varphi i}) = x^2 - 2Re(2e^{\varphi i})x + |2e^{\varphi i}|^2 = x^2 - 4\cos\varphi x + 4$, sledi da je
    $P(x) = (x^2 - 4\cos\dfrac{\pi}{10}x + 4)(x^2 - 4\cos\dfrac{3\pi}{10}x + 4)(x^2 - 4\cos\dfrac{7\pi}{10}x + 4)(x^2 - 4\cos\dfrac{9\pi}{10}x + 4)$.

17. Ispitati svodljivost polinoma $x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ redom nad poljima $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, a zatim ga predstaviti kao proizvod nesvodljivih polinoma redom nad svim tim poljima.

    Rešenje Svaki polinom stepena većeg od 2 je svodljiv i nad $\mathbb{R}$ i nad C, a pošto je broj $1 \in \mathbb{Q}$ očigledno jedan koren polinoma, to je on svodljiv i nad $\mathbb{Q}$. Nad $\mathbb{C}$ možemo polinom posmatrati kao zbir prvih 8 članova geometrijskog niza sa prvim članom -1 i koeficijentom progresije $-x$, pa dobijamo $P(x) = x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x - e^{\frac{\pi}{4}i})(x - e^{-\frac{\pi}{4}i})(x - e^{\frac{\pi}{2}i})(x - e^{-\frac{\pi}{2}i})(x - e^{\frac{3\pi}{4}i})(x - e^{-\frac{3\pi}{4}i})$, a nad $\mathbb{R}$ je $P(x) = (x-1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$. Kako $x^2 + \sqrt{2}x + 1$ i $x^2 - \sqrt{2}x + 1$ nisu polinomi nad $\mathbb{Q}$, a njihovim množenjem dobijamo $x^4 + 1$, to faktorizacija nad $\mathbb{Q}$ glasi $P(x) = (x-1)(x^2+1)(x^4+1)$.

18. Data je Bulova funkcija

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1

    Naći $SKNF$, proste implikante i minimalne DNF.

    Rešenje $SKNF = (x+y+z'+u)(x+y+z'+u')(x'+y+z'+u)(x'+y'+z+u)(x'+y'+z'+u)$. Proste implikante: $x'y, x'z', yu, xy'z, y'z'u', xy'u', xzu$. $MDNF_1 : x'y + x'z' + yu + xy'z + y'z'u'$, $MDNF_2 : x'y + x'z' + yu + xy'z + xy'u'$, $MDNF_3 : x'y + x'z' + yu + xy'u' + xzy$.

19. Ostaci pri deljenju polinoma P sa $(x-1)$, $(x-2)$ i $(x+1)$ su redom 2, 3 i 6. Odrediti ostatak pri deljenju polinoma P sa $(x-1)(x-2)(x+1)$.

Rešenje Iz uslova zadatka i teoreme o delenju polinoma sledi $P(x) = (x-1)q_1(x)+2$, $P(x) = (x-2)q_2(x)+3$ i $P(x) = (x+1)q_3(x)+6$, kao i $P(x) = (x-1)(x-2)(x+1)q(x)+ax^2+bx+c$. Ako u poslednju jednakost uvrstimo redom brojeve $1, 2, -1$ to korišćenjem i prve tri jednakosti dobijamo sistem jednačina $2 = P(1) = a+b+c$, $3 = P(2) = 4a+2b+c$ i $6 = P(-1) = a-b+c$, čije rešenje je $(a, b, c) = (1, -2, 3)$.

20. Data je Bulova funkcija sledećom tabelom:
a) Napisati njenu SKNF i SDNF.
b) Naći proste implikante.
c) Naći minimalne DNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1

Rešenje Savršena disjunktivna normalna forma je
$f(x, y, z, u) = x'y'z'u' + x'y'z'u + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xy'zu' + xyz'u + xyzu$
Savršena konjunktivna normalna forma je $f(x, y, z, u) = (x+y+z'+u)(x+y'+z+u)(x+y'+z'+u) \cdot \cdot (x'+y+z+u')(x'+y+z'+u')(x'+y'+z+u)(x'+y'+z'+u)$. Proste implikante su: $yu, x'u, x'y'z', y'z'u', xy'u'$.
Minimalne DNF su: $f(x, y, z, u) = yu + xy'u' + x'u + y'z'u'$ i $f(x, y, z, u) = yu + xy'u' + x'u + x'y'z'$.

21. Neka je $A = \{z \in \mathbb{C} | z^5 = 1\}$. Dokazati da je $(A, \cdot)$ komutativna grupa koja je izomorfna sa grupom $(\mathbb{Z}_5, +)$.

Rešenje $A = \{z \in \mathbb{C} | z^5 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} | z \in \sqrt[5]{1}\} = \{e^{\frac{2k\pi}{5}i} | k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$. Neka je $\varphi : A \to \mathbb{Z}_5$ funkcija definisana sa $\varphi(e^{\frac{2k\pi}{5}i}) = k$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Funkcija φ je po konstrukciji očigledno bijektivna, a jeste i homomorfizam jer je $\varphi(e^{\frac{2k\pi}{5}i} e^{\frac{2m\pi}{5}i}) = \varphi(e^{\frac{2(k+_5 m)\pi}{5}i}) = k +_5 m$ za sve $k, m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Dakle, φ je izomorfizam, te su strukture $(A, \cdot)$ i $(\mathbb{Z}_5, +)$ izomorfne, te kako je $(\mathbb{Z}_5, +)$ komutativna grupa, zbog izomorfizma je i $(A, \cdot)$ komutativna grupa.

22. Izračunati polinom $R(x)$ koji je najveći zajednički delilac polinoma $P(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$ i $Q(x) = x^8 + x^6 + 2x^4 + x^2 + 1$ i faktorisati polinome $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$ nad poljima $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$.

Rešenje
$R(x) = x^4 + 1 = (x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}) = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$,
$P(x) = (x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(x + i)(x - i) =$
$= (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + 1) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)$,
$Q(x) = (x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = (x^4 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

23. Odrediti vrednost parametra $a \in \mathbb{R}$ tako da $1 + i$ bude koren polinoma $P(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 + ax^2 + 12x - 6$, i za tu vrednost parametra a faktorisati $P(x)$ nad poljem realnih brojeva.

Rešenje Iz $P(1+i) = 22i + 2ai = 0$ sledi $a = -11$. Za polinom P sa realnim koeficijentima mora tada biti i $P(1+i) = P(\overline{1+i}) = P(1-i) = 0$, tj. polinom P mora biti deljiv sa $(x - (1+i))(x - (1-i)) = x^2 - 2x + 2$. Delenjem se dobija $P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^3 - x^2 + 3x - 3)$. Proverom kandidata $\pm 1, \pm 3$ za racionalne korene polinoma $x^3 - x^2 + 3x - 3$ se dobija da 1 jeste njegov koren, te je $P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x - 1)(x^2 + 3)$.

24. Neka su a, b, c, d funkcije iz skupa $\mathbb{R}^2$ u skup $\mathbb{R}^2$ definisane sa
$a(x, y) = (-x, -y)$, $b(x, y) = (-x, y)$, $c(x, y) = (x, -y)$, $d(x, y) = (x, y)$, i neka je $F = \{a, b, c, d\}$.
a) Dokazati da je $\mathcal{F} = (F, \circ)$ komutativna grupa ($\circ$ je kompozicija funkcija).
b) Naći sve podgrupe grupe $\mathcal{F}$.

Rešenje
a) Popunjavanjem Kejlijeve tablice vidimo da je operacija zatvorena u F. Npr. imamo da je $(a \circ b)(x, y) = a(b(x, y)) = a(-x, y) = (-(-x), -y) = (x, -y) = c(x, y)$, odnosno $a \circ b = c$. Kompozicija funkcija je asocijativna operacija (teorema), i takođe iz tablice vidimo da je neutralni element d, kao i da je svaki element sam sebi inverzan.

$\cdot$	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

b) Osim trivijalnih podgrupa $\mathcal{F}$ i $(\{d\},\circ)$, zbog Lagranžove teoreme mogu da postoje samo još dvoelementne podgrupe, i one moraju sadržati neutralni element. Ispitivanjem tih kandidata $(\{d,a\},\circ)$, $(\{d,b\},\circ)$ i $(\{d,c\},\circ)$, tj. iz njihovih Kejlijevih tablica vidimo da to zaista jesu podgrupe.

25. Neka su p_1, p_2 i p_3 funkcije (tj. permutacije) skupa $S=\{1,2,3\}$ definisane sa

$$p_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},$$

i neka je $\circ$ kompozicija funkcija skupa $A=\{p_1,p_2,p_3\}$. Napisati Kejlijevu tablicu operacije $\circ$ i ispitati da li je $(A,\circ)$ Abelova grupa.

Rešenje
Tablica se dobija korišćenjem definicija funkcija p_1, p_2 i p_3 i kompozicije. Na primer, $\Big(p_1\circ p_2\Big)(1)=p_1\Big(p_2(1)\Big)=p_1(2)=1$. Analogno je $(p_1\circ p_2)(2)=2$ i $(p_1\circ p_2)(3)=3$, što znači da je $p_1\circ p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=p_3$. Na isti način popunjavamo ostatak tablice.

$\circ$	p_1	p_2	p_3
p_1	p_2	p_3	p_1
p_2	p_3	p_1	p_2
p_3	p_1	p_2	p_3

p_3 je neutralni elemenat jer su treća vrsta i treća kolona jednake graničnoj vrsti, odnosno graničnoj koloni. Svaki elemenat ima sebi inverzni jer se p_3 pojavljuje u svakoj vrsti i koloni tačno jedanput i simetrično je rasporedjen u odnosu na gravnu dijagonalu. Operacija je komutativna jer je cela tablica simetrična u odnosu na gravnu dijagonalu. Kompozicija funkcija je asocijativna.

26. Rešiti po $z\in\mathbb{C}$ jednačinu $z^3=\overline{z}+|z|$. **Rešenje** Smenom $z=\rho e^{i\varphi}$, za $\rho\ge 0$ i $\varphi\in(-\pi,\pi]$ sledi

$z^3=\overline{z}+|z| \;\Leftrightarrow\; \rho^3e^{3i\varphi}=\rho e^{-i\varphi}+\rho=\rho(1+e^{-i\varphi})\Leftrightarrow \rho^3e^{3i\varphi}=\rho e^{-\frac{i\varphi}{2}}(e^{\frac{i\varphi}{2}}+e^{-\frac{i\varphi}{2}})=2\rho\cos\frac{\varphi}{2}e^{-\frac{i\varphi}{2}}$
$\Leftrightarrow\; (\rho^3=2\rho\cos\frac{\varphi}{2}\;\wedge\;3\varphi=-\frac{\varphi}{2}+2k\pi)\Leftrightarrow\Big(\rho=0\;\vee\;(\rho^2=2\cos\frac{\varphi}{2}\;\wedge\;7\varphi=4k\pi)\Big)\Leftrightarrow\Big(z=0\;\vee\;(\rho=\sqrt{2\cos\frac{\varphi}{2}}\;\wedge\;\varphi=\frac{4}{7}k\pi,\;k\in\mathbb{Z}\;\wedge\;\varphi\in(-\pi,\pi])\Big)\;\Leftrightarrow\;\Big(z=0\;\vee\;(\rho=\sqrt{2\cos\frac{\varphi}{2}}\;\wedge\;\varphi\in\{0,\pm\frac{4\pi}{7}\})\Big)$
$\Leftrightarrow\; z\in\{0\}\cup\left\{\sqrt{2\cos\frac{2k\pi}{7}}\,e^{i\frac{4k\pi}{7}}\;\Big|\;k\in\{0,\pm1\}\right\}\;\Leftrightarrow\; z\in\left\{0,\sqrt{2},\sqrt{2\cos\frac{2\pi}{7}}\,e^{-i\frac{4\pi}{7}},\sqrt{2\cos\frac{2\pi}{7}}\,e^{i\frac{4\pi}{7}}\right\}.$

27. U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačinu $z^3=i\overline{z}$.

Rešenje Uvođenjem smene $z=\rho e^{i\varphi}$, za $\rho\ge0$ i $\varphi\in(-\pi,\pi]$, dobijamo

$(\rho e^{i\varphi})^3=i\overline{\rho e^{i\varphi}}\;\Leftrightarrow\;\rho^3e^{i3\varphi}=e^{i\frac{\pi}{2}}\rho e^{-i\varphi}\;\Leftrightarrow\;\rho^3e^{3i\varphi}=\rho e^{i(\frac{\pi}{2}-\varphi)}\;\Leftrightarrow\;(\rho^3=\rho\;\wedge\;3\varphi=\frac{\pi}{2}-\varphi+2k\pi)$
$\Leftrightarrow\;(\rho\in\{0,1\}\;\wedge\;\varphi=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},\;k\in\{-2,-1,0,1\})\;\Leftrightarrow\;z\in\{0,e^{-\frac{7\pi}{8}i},e^{-\frac{3\pi}{8}i},e^{\frac{\pi}{8}i},e^{\frac{5\pi}{8}i}\}.$

28. Neka je $f(x)=x^5-x^4+3x^3-x^2+x+1$ polinom. **a)** Izračunati $f(e^{\frac{-\pi}{3}i})$. **b)** Napisati polinom f kao proizvod nesvodljivih polinoma nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. **c)** Napisati polinom f kao proizvod nesvodljivih polinoma nad poljem $\mathbb{Z}_3$. Napomena: Nad $\mathbb{Z}_3$ je $x^5-x^4+3x^3-x^2+x+1=x^5+2x^4+2x^2+x+1$

Rešenje Nad $\mathbb{Q}$ je $f(x)=x^5-x^4+3x^3-x^2+x+1=(x^2-x+1)(x^3+2x+1)$, a nad $\mathbb{Z}_3$ je $f(x)=x^5+2x^4+2x^2+x+1=(x^2+2x+1)(x^3+2x+1)=(x+1)^2(x^3+2x+1)$.

29. Dat je polinom $f(x)=x^8+x^4+1$. **(a)** Izračunati $f(e^{\frac{\pi}{6}i})$, $f(e^{\frac{\pi}{3}i})$, $f(e^{\frac{2\pi}{3}i})$ i $f(e^{\frac{5\pi}{6}i})$. **(b)** Napisati polinom $f(x)$ kao proizvod nesvodljivih polinoma redom nad poljima $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}_3$.

30. Ispitati sve aksiome komutativne grupe za strukturu $(\{f_1,f_2,f_3,f_4\},\circ)$, gde su za $i\in\{1,2,3,4\}$ funkcije $f_i:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ date sa $f_1(x,y)=(-y,-x)$, $\quad f_2(x,y)=(y,x)$, $\quad f_3(x,y)=(x,y)$, $\quad f_4(x,y)=(-x,-y)$.

31. Neka je $f(x)=x^5+x+1$ polinom. **a)** Izračunati $f(e^{\frac{2\pi}{3}i})$. **b)** Napisati polinom f kao proizvod nesvodljivih polinoma nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. **c)** Napisati polinom f kao proizvod nesvodljivih polinoma nad poljem $\mathbb{Z}_3$.