Mašinstvo, MATEMATIKA 1, Rešenja prviog kolokvijuma (GRUPA B) **5.11.2016**

1. Dat je sistem jednačina:
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & (a-1)y & + & 4z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ ax & - & ay & + & 3z & = & 2 \end{array}$$

   a) (5 bod.) Za koje vrednosti realnog parametra a je sisitem određen?
   b) (5 bod.) Za koje vrednosti realnog parametra a je sisitem nemoguć?
   c) (5 bod.) Za koje vrednosti realnog parametra a je sisitem neodređen?
   d) (5 bod.) Rešiti sistem Gausovim postupkom za slučaj $a = 4$.
   e) (5 bod.) Rešiti sistem matričnom metodom za slučaj $a = 4$.

2. Data je ravan $\alpha : 2x + 3y - z = -3$.

   a) (10 bod.) Odrediti koeficijent a tako da prava $p : \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-4}{a} = \dfrac{z-1}{5}$ bude paralelna ravni α. Da li se prava p nalazi u ravni α?
   b) (10 bod.) Odrediti projekciju tačke $A(1, 0, -9)$ na ravan α.
   c) (5 bod.) Odrediti tačku koja je simetrična tački A u odnosu na ravan α.

Rešenja zadataka:

1. Ako u zadatom sistemu jednačina prvoj i drugoj jednačini zamenimo mesta, pa zatim drugoj i trećoj jednačini zamenimo mesta onda dobijamo sistem jednačina:
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ ax & - & ay & + & 3z & = & 2 \\ x & - & (a-1)y & + & 4z & = & 1. \end{array}$$
   Ovako dobijeni sistem jednačina ekvivalentan je sistemu jednačina iz grupe A. (Pogledati rešenje prvog zadatka grupe A).

2. a) Vektor normale ravni α je $\vec{n_\alpha} = (2, 3, -1)$, a vektor pravca prave p je $\vec{p} = (-2, a, 5)$. Da bi ravan α i prava p bili paralelni treba da važi da je $\vec{n_\alpha} \cdot \vec{p} = 0$, odakle dobijamo da je:
$$(2, 3, -1) \cdot (-2, a, 5) = 0 \Rightarrow -4 + 3a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = 3.$$
   Tačka $P(-1, 4, 1) \in p$. Proveravamo da li tačka P pripada ravni α tako što koordinate tačke P uvrstimo u jednačinu ravni α:
$$2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 3 \Leftrightarrow 9 = 3 \quad \perp .$$
   Zaključujemo da tačka P ne pripada rani α, što zapisujemo $P \notin \alpha$, odakle direktno sledi da ni prava p ne pripada ravni α.

   b) Tačka $A(1, 0, -9)$ ne pripada ravni α:
$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 9 = -3 \Leftrightarrow 11 = -3 \quad \perp.$$
   Prava koja sadrži tačku A i paralelna je sa ravni α je:
$$q : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+9}{-1} = t.$$
   $q \cap \alpha = A'$: Presek prave q i ravni α predstavlja projekciju tačke A na ravan. Jednačina prave q u parametarskom obliku je:
$$x = 2t + 1, \qquad y = 3t, \qquad z = -t - 9.$$
   Uvrstimo dobijene x, y i z u jednačinu ravni α te dobijamo:
$$2 \cdot (2t + 1) + 3 \cdot 3t + t + 9 = -3 \Leftrightarrow 14t = -14 \Leftrightarrow t = -1.$$
   Tražena tačka projekcije tačke A na ravan α je $A'(-1, -3, -8)$.

   c) Koordinate tačke $A''(x, y, z)$, koja je simetrična tački A u odnosu na ravan α, dobijamo iz sledećeg sistema jednačina:
$$\frac{x+1}{2} = -1 \quad \wedge \quad \frac{y}{2} = -3 \quad \wedge \quad \frac{z-9}{2} = -8 \;\Leftrightarrow\; x = -3 \quad \wedge \quad y = -6 \quad \wedge \quad z = -7 \;\Rightarrow\; A''(-3, -6, -7).$$