Mašinstvo, MATEMATIKA 1, Rešenja prvog kolokvijuma (GRUPA A) 5.11.2016

1. Dat je sistem jednačina: $\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ ax & - & ay & + & 3z & = & 2 \\ x & - & (a-1)y & + & 4z & = & 1 \end{array}$

   a) (5 bod.) Za koje vrednosti realnog parametra a je sisitem određen?

   b) (5 bod.) Za koje vrednosti realnog parametra a je sisitem neodređen?

   c) (5 bod.) Za koje vrednosti realnog parametra a je sisitem nemoguć?

   d) (5 bod.) Rešiti sistem Gausovim postupkom za slučaj $a = 4$.

   e) (5 bod.) Rešiti sistem matričnom metodom za slučaj $a = 4$.

2. Data je ravan $\alpha:\ 2x + 3y - z = 3$.

   a) (10 bod.) Odrediti koeficijent a tako da prava $p: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-1}{a}$ bude paralelna ravni α. Da li se prava p nalazi u ravni α?

   b) (10 bod.) Odrediti projekciju tačke $A(1, 2, -9)$ na ravan α.

   c) (5 bod.) Odrediti tačku koja je simetrična tački A u odnosu na ravan α.

Rešenja zadataka.

1. Sistem ćemo diskutovati na osnovu vrednosti njegove determinante.

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -a & 3 \\ 1 & -a+1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4a+3a-3)-(-1)\cdot(4a-3)+1\cdot(-a^2+a+a) = -a-3+4a-3-a^2+2a = -a^2+5a-6 = -(a-3)(a-2).$$

   a) Kako je determinanta sistema različita od nule, $D_s \neq 0$, za $a \neq 2$ i $a \neq 3$ sledi da je sistem određen za svako $a \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

   b) Za $a = 2$ sistem je jednostruko neodređen, jer je:

   $\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & - & y & + & 4z & = & 1 \end{array}$

   Prvu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo drugoj i prvu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo trećoj jednačini. Dobijamo:

   $\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 0 \\ & & & & 3z & = & 0 \end{array}$

   Drugu jednačinu pomnožimo sa -3 i dodamo trećoj, tako dobijamo sistem jednačina:

   $\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$

   Dakle, dobijamo da je sistem jednostruko neodređen i rešenje sistema je: $\mathcal{R} = \{(1+\alpha, \alpha, 0) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

   c) Za $a = 3$ sistem je nemoguć, jer je:

   $\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & 3y & + & 3z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 1 \end{array}$

   Prvu jednačinu pomnožimo sa -3 i dodamo drugoj, takođe prvu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo trećoj. Dobijamo:

   $\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & -1 \\ & - & y & + & 3z & = & 0 \end{array}$

   Iz druge jednačine zaključujemo da je sistem za $a = 3$ nemoguć (tj. kontradiktoran).

d) Gausov metod za $a = 4$.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 4x & - & 4y & + & 3z & = & 2 \\ x & - & 3y & + & 4z & = & 1 \end{array}$$

Prvu jednačinu pomnoženu sa -4 dodamo drugoj i prvu jednačinu pomnoženu sa -1 dodamo trećoj. Dobijamo:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & & - & z & = & -2 \\ & - & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ z & = & 2 \\ y & = & 3 \end{array}$$

Dakle, rešenje zadatog sistema jednačina je $\mathcal{R} = \{(2, 3, 2)\}$.

e) Matriňa metoda za $a = 4$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 4x & - & 4y & + & 3z & = & 2 \\ x & - & 3y & + & 4z & = & 1 \end{array}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Treba da rešimo matričnu jedančinu $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

Znamo da je: $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} \cdot A^*$

$$det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & 4 & 1 & -3 \end{array} \right. = -16 - 3 - 12 + 4 + 9 + 16 = -2$$

$$A^* = \begin{bmatrix} -7 & -13 & -8 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ -13 & 3 & 1 \\ -8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ -13 & 3 & 1 \\ -8 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dakle, rešenje zadatog sistema jednačina je $\mathcal{R} = \{(2, 3, 2)\}$.

2. a) Vektor normale ravni α je $\vec{n_\alpha} = (2, 3, -1)$, a vektor pravca prave p je $\vec{p} = (-2, 3, a)$. Da bi ravan α i prava p bili paralelni treba da važi da je $\vec{n_\alpha} \cdot \vec{p} = 0$, odakle dobijamo da je:

$$(2, 3, -1) \cdot (-2, 3, a) = 0 \Rightarrow -4 + 9 - a = 0 \Leftrightarrow a = 5.$$

Tačka $P(-1, 4, 1) \in p$. Proveravamo da li tačka P pripada ravni α tako što koordinate tačke P uvrstimo u jednačinu ravni α:

$$2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 3 \Leftrightarrow 9 = 3 \quad \perp .$$

Zaključujemo da tačka P ne pripada rani α, što zapisujemo $P \notin \alpha$, odakle direktno sledi da ni prava p ne pripada ravni α.

b) Tačka $A(1, 2, -9)$ ne pripada ravni α:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 9 = 3 \Leftrightarrow 17 = 3 \quad \perp.$$

Prava koja sadrži tačku A i paralelna je sa ravni α je:

$$q : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+9}{-1} = t.$$

$q \cap \alpha = A'$: Presek prave q i ravni α predstavlja projekciju tačke A na ravan. Jednačina prave q u parametarskom obliku je:

$$x = 2t + 1, \qquad y = 3t + 2, \qquad z = -t - 9.$$

Uvrstimo dobijeno x, y i z u jednačinu ravni α odakle dobijamo:

$$2 \cdot (2t + 1) + 3 \cdot (3t + 2) + t + 9 = 3 \Leftrightarrow 14t = -14 \Leftrightarrow t = -1.$$

Tražena projekcija tačke A na ravan α je tačka $A'(-1, -1, -8)$.

c) Koordinate tačke $A''(x, y, z)$, koja je simetrična tački A u odnosu na ravan α, dobijamo iz sledećeg sistema jednačina:

$$\frac{x+1}{2} = -1 \quad \wedge \quad \frac{y+2}{2} = -1 \quad \wedge \quad \frac{z-9}{2} = -8 \Leftrightarrow x = -3 \quad \wedge \quad y = -4 \quad \wedge \quad z = -7 \Rightarrow A''(-3, -4, -7).$$