REŠENJA ZADATAKA

1. a) (10 bod.) Odrediti kompleksan broj $z = x + yi$ ako važi: $|z+2| = |1-\bar{z}|$ i $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{2+3i}\right) = \frac{1}{13}$.

Rešenje:
Na osnovu uslov $|z+2| = |1-\bar{z}|$ znamo da je:

$$|x+yi+2| = |1-(x-yi)| \Rightarrow |x+2+yi| = |1-x+yi)|$$

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2} = \sqrt{(1-x)^2+y^2} \Rightarrow (x+2)^2+y^2 = (1-x)^2+y^2 \Rightarrow x^2+4x+4+y^2 = 1-2x+x^2+y^2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Na osnovu drugog uslova $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{2+3i}\right) = \frac{1}{13}$ dobijamo da je:

$$\frac{z}{2+3i} = \frac{x+yi}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2x-3xi+2yi+3y}{4+9} = \frac{2x+3y}{13} + \frac{-3x+2y}{13}i$$

Znamo da je:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2x+3y}{13} + \frac{-3x+2y}{13}i\right) = \frac{2x+3y}{13}$$

te je:

$$\frac{2x+3y}{13} = \frac{1}{13} \Rightarrow 2x+3y = 1.$$

Uvrstimo $x = -\frac{1}{2}$ u dobijenu jednačinu i sledi da je:

$$y = \frac{2}{3},$$

odnosno da je traženi kompleksan broj:

$$\boxed{z = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}i}.$$

b) (15 bod.) Rešiti jednačinu $z^3 = -2\sqrt{3} + 2i$ u skupu $\mathbb{C}$. Napisati geometrijsku interpretaciju rešenja.

Rešenje:
Zapisaćemo zadati komplekas broj u obliku: $z = \sqrt[3]{-2\sqrt{3}+2i}$ gde je $\omega = -2\sqrt{3}+2i$.
Znamo da je moduo od ω: $|\omega| = \sqrt{4\cdot 3+4} = 4$.
Omega sada mozemo zapisati u obliku: $\omega = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)$ odakle zaključujemo da je $(arg(\omega) =)\varphi = \frac{5\pi}{6}$.
Trigonometrijski oblik komplekdnog broja ω je:

$$\omega = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Dobijamo da je $\sqrt[3]{\omega} = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\frac{5\pi+}{6}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi+}{6}+2k\pi}{3}\right)$, gde $k = 0, 1, 2$. Dakle, sledi da je:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \sqrt[3]{4}\left(\cos\tfrac{5\pi}{18} + i\sin\tfrac{5\pi}{18}\right),\\
\omega_1 &= \sqrt[3]{4}\left(\cos\tfrac{17\pi}{18} + i\sin\tfrac{17\pi}{18}\right),\\
\omega_2 &= \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(-\tfrac{7\pi}{18}\right) + i\sin\left(-\tfrac{7\pi}{18}\right)\right).
\end{aligned}$$

Geometrijska interpretacija: Dobijeni kompleksni brojevi ω_0, ω_1 i ω_2 predstavljaju temena jednakostraničnog trougla u kompleksnoj ravni.

2. a) (15 bod.) Faktorisati polinom $P(x) = x^6 + 4x^5 + 7x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 11x - 6$ poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Rešenje:
Polinom je *normiran* i potencijalne racionalne nule su:

$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}.$$

Hornerovom šemom dobijamo da je -1 dvostruka nula, a $1, -2$ su jednostruke nule polinoma $P(x)$, odakle sledi da je:

$$P(x) = (x+1)^2(x-1)(x+2)(x^2+x+3) \textit{ nad } \mathbb{R}.$$

$$P(x) = (x+1)^2(x-1)(x+2)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i\right) \textit{ nad } \mathbb{C}.$$

.

b) (10 bod.) Rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka izraz: $R(x) = \dfrac{x^2+x+3}{(x+2)(x^2-4x+3)}$.

Rešenje: $R(x) = \dfrac{x^2+x+3}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+x+3}{(x-1)(x+2)(x-3)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} \\
&= \frac{A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C\,(x-1)\,(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)} \\
&= \frac{A(x^2-x-6) + B(x^2-4x+3) + C(x^2+x-2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}
\end{aligned}$$

Dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
A + B + C &= 1 \\
-A - 4B + C &= 1 \\
-6A + 3B - 2C &= 3
\end{aligned}$$

Rešavanjem sistem, Gausovim postupkom, dobijamo da su:

$$A = -\frac{5}{6}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{3}{2}.$$

Dakle, racionalnu funkciju $R(x)$ možemo zapisati u obliku zbira parcijalnih razlomaka na sledeći način:

$$R(x) = -\frac{5}{6(x-1)} + \frac{1}{3(x+2)} + \frac{3}{2(x-3)}.$$