Mašinstvo, MATEMATIKA 1, Rešenja drugog kolokvijum (GRUPA A) **3.12.2016**

Ime, Prezime, broj indeksa:____

1. a) (10 bodova) Odrediti kompleksan broj z koji zadovoljava jednačinu:

$$Im\left(\frac{2\bar{z}+z}{2}\right)+i\,Re\left(\frac{\bar{z}+2}{1+i}\right)+z=1+3i.$$

Rešenje: Zbog oblika izraza kojim je z definisano, uvodimo smenu $z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$. Tada

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\left(\frac{2\bar{z}+z}{2}\right)+i\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}+2}{1+i}\right)+z=1+3i\\
&\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{2(x-iy)+x+iy}{2}\right)+i\operatorname{Re}\left(\frac{x-iy+2}{1+i}\frac{1-i}{1-i}\right)+x+iy=1+3i\\
&\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{3x-iy}{2}\right)+i\operatorname{Re}\left(\frac{x-y+2-i(x+y+2)}{2}\right)+x+iy=1+3i\\
&\Leftrightarrow -\frac{y}{2}+i\frac{x-y+2}{2}+x+iy=1+3i\\
&\Leftrightarrow x-\frac{y}{2}+i\frac{x+y+2}{2}=1+3i.
\end{aligned}$$

Izjednačavajući realni i imaginarni deo poslednje jednakosti, dolazimo do sistema jednačina po realnim nepoznatim x i y :

$$\begin{cases} x-\dfrac{y}{2}=1,\\ 1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=3.\end{cases}$$

Rešenje sistema $x=y=2$ određuje $z=2+2i=2\sqrt{2}e^{i\pi/4}=2^{3/2}e^{i\pi/4}$.

b) (5 bodova) Izračunati z^{2016} ako je $z=-3+3i$.
Rešenje: Zadati kompleksan broj možemo zapisati u eksponencijalnom obliku:

$$z=3\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}i},$$

odakle dobijamo da je:

$$z^{2016}=(3\sqrt{2})^{2016}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}i\cdot 2016}=(3\sqrt{2})^{2016}e^{1512\,\pi\,i}=(3\sqrt{2})^{2016}(\cos 1512\,\pi+i\sin 1512\,\pi)=(3\sqrt{2})^{2016}.$$

c) (10 bodova) Rešiti jednačinu

$$z^3=\frac{1-3i}{1+i}-\frac{2i}{1-i}$$

u skupu $\mathbb{C}$ i rešenja predstaviti u kompleksnoj ravni.

Rešenje: Odredićemo vrednost kompleksnog broja z^3:

$$z^3 = \frac{1-3i}{1+i} - \frac{2i}{1-i} = \frac{(1-3i)(1-i)-2i(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-6i}{2} = -3i.$$

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja $-3i$ je

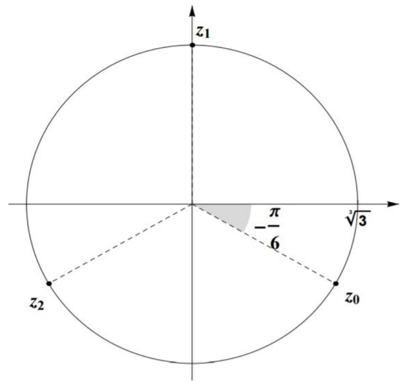
$$-3i = 3\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big),$$

pa su rešenja jednačine $z^3 = 3\Big(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)\Big)$ data sa

$$z_k = \sqrt[3]{3}\Big(\cos\frac{-\pi/2+2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi/2+2k\pi}{3}\Big), \quad k = 0,1,2.$$

Tražena rešenja su

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{3}\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\Big) = \sqrt[3]{3}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\Big),\\
z_1 &= \sqrt[3]{3}\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big) = i\sqrt[3]{3},\\
z_2 &= \sqrt[3]{3}\Big(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\Big) = \sqrt[3]{3}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\Big).
\end{aligned}$$



a) (10 bodova) Neka je dat polinom $P(x) = x^5 + ax^4 + 2bx^3 + 2x^2 + x + c$. Odrediti realne koeficijente a, b, c ako se zna da je polinom $P(x)$ deljiv sa x^2+1 i $x-2$.

Rešenje: Traženi koeficijenti su: $a=-4, b=1$ i $c=6$. Dobijamo da je traženi polinom:

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6.$$

b) (10 bodova) Faktorisati polinom $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 15x + 6$ nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Rešenje: Koristili smo Hornerovu šemu i dobijamo da je traženo rešenje:

- Nad $\mathbb{R}$: $P(x) = (x-2)(2x-1)(x^2+3)$;
- Nad $\mathbb{C}$: $P(x) = (x-2)(2x-1)(x-i\sqrt{3})(x+i\sqrt{3})$.

c) (5 bodova) Rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka izraz $R(x) = \dfrac{4x^3-7x^2+4x+5}{(x-1)^2(x^2+5)}$.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
R(x) = \frac{4x^3-7x^2+4x+5}{(x-1)^2(x^2+5)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+5}\\
&= \frac{A(x-1)(x^2+5) + B(x^2+5) + (Cx+D)(x^2-2x+1)}{(x+1)^2(x^2+5)}\\
&= \frac{Ax^3 - 5Ax^2 + 5Ax - 5A + Bx^2 + 5B + Cx^3 - 2Cx^2 + Cx + Dx^2 - 2Dx + D}{(x+1)^2(x^2+5)}.
\end{aligned}$$

Rešavamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
A & & & + & C & & & = & 4\\
-5A & + & B & - & 2C & + & D & = & -7\\
5A & + & & + & C & - & 2D & = & 4\\
-5A & + & 5B & & & + & D & = & 5
\end{array}$$

Rešenje sistema je $\mathcal{R} = \{0,1,4,0\}$ te je:

$$R(x) = \frac{4x^3-7x^2+4x+5}{(x-1)^2(x^2+5)} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4x}{x^2+5}.$$