A Prezime, ime, br. indeksa: Lj - REŠENJA 19.01.2021.

Studijski program E1 E2 PR SV IT IN (zaokruži) **KOLOKVIJUM 2**

U zadatku je dato više odgovora, a treba zaokružiti brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

2 (1+1)
- Izraziti vektor $\vec{x} = (4,4,4)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{r}_A = (1,0,1)$, $\vec{r}_B = (0,1,1)$ i $\vec{r}_C = (1,1,0)$ $\vec{x} = 2\,\vec{r}_A + 2\,\vec{r}_B + 2\,\vec{r}_C$ i zapreminu tetraedra $OABC$, gde je $O(0,0,0)$ tj. $V_{OABC} = 1/3$

4,2,0
- Ako su vektori $\vec{s}$ i $\vec{t}$ jedinični, a $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ i $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ uzajamno normalni, tada je 1) $\sphericalangle(\vec{s},\vec{t}) = \frac{\pi}{6}$ 2) $\sphericalangle(\vec{s},\vec{t}) = \frac{\pi}{4}$ 3) $\sphericalangle(\vec{s},\vec{t}) = \frac{\pi}{3}$ 4) $\sphericalangle(\vec{s},\vec{t}) = \frac{\pi}{2}$ 5) $\sphericalangle(\vec{s},\vec{t}) = \arccos\frac{1}{2}$ 6) $\sphericalangle(\vec{s},\vec{t}) = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$

4 (2+2)
- Neka je p prava čija je jednačina $p:\ x + y = 3 \land y = 3$. Napisati bar jedan jedinični vektor pravca $\vec{p}$ prave p: $\vec{p} = (0, 0, 1)$ i koordinate tačke A prave p koja je najbliža koordinatnom početku $O(0,0,0)$: $A(0, 3, 0)$.

8..1
- Neka je $\vec{r}_A = (1,0,1)$, $\vec{r}_B = (0,1,1)$ i $\vec{r}_C = (1,1,0)$ tada je: 1) $|\vec{r}_A| = \sqrt{2}$ 2) $\vec{r}_A \cdot \vec{r}_B = 1$ 3) $P_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\sphericalangle(\vec{r}_A, \vec{r}_B) = \pi/3$ 5) $|\vec{r}_A - \vec{r}_B| = \sqrt{2}$ 6) $\vec{r}_A \times \vec{r}_B = (-1,-1,1)$ 7) $(\vec{r}_A \times \vec{r}_B)\vec{r}_C = -2$ 8) $\overrightarrow{BA} = (1,-1,0)$

3
- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $x - ay = 1 \land ax + y = 1$ nad poljem realnih brojeva je: 1) određen: $\forall a \in \mathbb{R}$ 2) kontradiktoran: / 3) jednostruko neodređen: /

4,2,0
- **Zavisne** uređene trojke u vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ su: 1) $\big((6,3,-1),(9,3,1),(7,3,0)\big)$ 2) $\big((0,-1,2),(0,-1,3),(0,1,4)\big)$ 3) $\big((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\big)$ 4) $\big((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\big)$

8..0
- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\underset{3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}} \quad \underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{2}{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{1}{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}} \quad \underset{0}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{3}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}} \quad \underset{1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{1}{\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}} \quad \underset{1}{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}$$

4×1
- **Napisati bar jednu**, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ za koju važi da 1) je injektivna $f(x,y) = (x, y, 0)$ 2) nije injektivna $f(x,y) = (0, 0, 0)$ 3) je sirjektivna $f(x,y) = (\sim, \sim, \sim)$ 4) nije sirjektivna $f(x,y) = (0, 0, 0)$

3×1
- Neka su $ABCDEF$ uzastopna temena pravilnog šestougla i T njegov centar (težište). Izraziti vektore $\overrightarrow{BT}$, $\overrightarrow{BE}$ i $\overrightarrow{AE}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{BT} = \vec{b} - \vec{a}$ $\overrightarrow{BE} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$ $\overrightarrow{AE} = 2\vec{b} - \vec{a}$

3
- Koordinate normalne projekcije A' tačke $A(3,3,0)$ na ravan određenu sa $2x + 2y - z = 3$ su: $A'(1, 1, 1)$

3
- Normalna projekcija vektora $\vec{x} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ na pravu $\ell: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-1}$ je vektor: $\mathbf{pr}_\ell(\vec{x}) = (2, 2, -2)$

3
- Odrediti vektor $\vec{x}\,' = \mathbf{pr}_{\alpha,\vec{a}}(\vec{x})$ koji je kosa projekcija vektora $\vec{x} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ na ravan $\alpha: x + y + 4z = 5$ ako su zraci projektovanja paralelni sa pravom $a: \frac{x-6}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+7}{-1}$. $\vec{x}\,' = (-6, -14, 5)$

86420
- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su **kolinearni** ako je: 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 3) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ 4) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \le 2$ 5) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \le 1$ 6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nezavisni 7) $(\exists\lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda\vec{b}$ 8) $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ 9) $(\forall\lambda \in \mathbb{R})\ (\vec{a} \ne \lambda\vec{b} \ \land\ \lambda\vec{a} \ne \vec{b})$ 10) $(\exists\alpha,\beta \in \mathbb{R})\ \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \ \land\ \alpha^2 + \beta^2 \ne 0$

86420
- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **nekomplanarni** ako i samo ako je: 1) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \le 2$ 2) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \le 3$ 3) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$ 4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \ne 0$ 6) $(\exists\alpha,\beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ 7) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

3
- Linearna transformacija $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x - y, 2x + ay)$ je izomorfizam akko $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

8 6 4 2 0
- Neka su $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ jedinični vektori $\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}\perp\vec{i}$ i $\vec{a}\neq 0$. Tada je **1)** $\vec{x}=(\vec{x}\vec{i})\vec{i}+(\vec{x}\vec{j})\vec{j}+(\vec{x}\vec{k})\vec{k}$ **2)** $(\vec{x}\vec{i},\vec{x}\vec{j},\vec{x}\vec{k})$ je trijedar vektora **3)** Projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{i}$ je vektor $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}$ **4)** $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}+(\vec{x}\vec{j})\vec{j}+(\vec{x}\vec{k})\vec{k}\in\mathbb{R}^3$ **5)** Algebarska projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{i}$ je broj $\vec{x}\vec{i}$ **6)** $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})=\frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$ **7)** $|\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})|=\frac{|\vec{a}\vec{x}|}{|\vec{a}|}$

4 2 0
- Neka je $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ generatorna u prostoru V, $(c_1,c_2,\dots,c_m)$ nezavisna za prostor V i $\dim V=k$. Tada je **1)** $m\leq k\leq n$ **2)** $n\leq k\leq m$ **3)** $m\leq k$ **4)** $k\leq m\leq n$ **5)** $k\leq n\leq m$ **6)** $n\leq m\leq k$

4 2 1 0
- Ako je A kvadratna matrica reda 5, tada je: **1)** $\mathbf{rang}\,\mathrm{A}=5\Leftrightarrow\det A\neq 0$, **2)** $\det A=0\Rightarrow\mathbf{rang}\,\mathrm{A}=5$ **3)** $\mathbf{rang}\,\mathrm{A}=5\Leftrightarrow\exists A^{-1}$ **4)** $\det A=0\Rightarrow\mathbf{rang}\,\mathrm{A}=0$ **5)** $\det A=0\Leftrightarrow\mathbf{rang}\,\mathrm{A}\leq 4$,

4
- **Svaka** linearna transformacija različita od nula transformacije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ je: **1)** sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog

4 2 1 0
- Ako je matrica A' dobijena od matrice $A=[a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij}\in\mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je: **1)** $|det(A)|=\lambda|det(A')|$ za neko $\lambda\in\mathbb{R}$ **2)** $\mathbf{rang}(A)=\mathbf{rang}(A')$ **3)** $A\cdot A'=I$ **4)** $\det A\neq 0\Leftrightarrow\det A'\neq 0$

8 6 4 2 0
- Za bilo koje kvadratne matrice A,B,C reda 2 i svaki skalar λ je: **1)** $A+C=C+A$ **2)** $AC=CA$ **3)** $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ **4)** $\det AB=\det BA$ **5)** $(B+C)A=AB+AC$ **6)** $\det(\lambda A)=\lambda^2\det(A)$ **7)** $\det(AB)=\det(B)det(A)$ **8)** $(AB)^2=A^2B^2$ **9)** $\mathbf{rang}(AB)=\mathbf{rang}(A)\mathbf{rang}(B)$ **10)** $C(BA)=(CB)A$

ALGEBRA, KOLOKVIJUM 2 — 19.01.2021.

1. Prava p sadrži tačku P i paralelna je sa vektorom $\vec{p}$. Tačka A ne pripada pravoj p. Preko $\vec{r}_A$, $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja temena B, C i D kvadrata $ABCD$ čija je ravan normalna na pravu p, i centar (presek dijagonala) kvadrata pripada pravoj p.

2. Neka je S skup svih rešenja sistema linearnih jednačina
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 3z & = & 0\\ -x & + & y & + & 2z & = & 0\\ 3x & - & y & - & 4z & = & 0\end{array}$$
nad $\mathbb{R}$ po nepoznatim $x,y,z\in\mathbb{R}$.
   (a) Dokazati da je S potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ i odrediti jednu bazu potprostora S.
   (b) Neka je $V=\{v\in\mathbb{R}^3\mid\forall s\in S,\ v\cdot s=0\}$. Dokazati da je V potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ i odrediti jednu bazu potprostora V.

3. Neka je $a_1=(2,-1)$, $a_2=(-3,2)$, $b_1=(0,-1,1)$ i $b_2=(2,2,-1)$. Za linearnu transformaciju $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ važi $f(a_1)=b_1$ i $f(a_2)=b_2$.
   (a) Odrediti matricu linearne transformacije f i njen rang.
   (b) Ispitati injektivnost i sirjektivnost linearne transformacije f.
   (c) Odrediti skup $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid f(x,y)=(0,0,0)\}$.

ALGEBRA, KOLOKVIJUM 2 **19.01.2021.**

1. Prva p sadrži tačku P i paralelna je sa vektorom $\vec{p}$. Tačka A ne pripada pravoj p. Preko $\vec{r}_A$, $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja temena B, C i D kvadrata $ABCD$ čija je ravan normalna na pravu p, i centar (presek dijagonala) kvadrata pripada pravoj p.

2. Neka je S skup svih rešenja sistema linearnih jednačina
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & 4z & = & 0 \end{array}$$
nad $\mathbb{R}$ po nepoznatim $x, y, z \in \mathbb{R}$.
   (a) Dokazati da je S podprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ i odrediti jednu bazu podprostora S.
   (b) Neka je $V = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \forall s \in S,\ v \cdot s = 0\}$. Dokazati da je V podprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ i odrediti jednu bazu podprostora V.

3. Neka je $a_1 = (2, -1)$, $a_2 = (-3, 2)$, $b_1 = (0, -1, 1)$ i $b_2 = (2, 2, -1)$. Za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ važi $f(a_1) = b_1$ i $f(a_2) = b_2$.
   (a) Odrediti matricu linearne transformacije f i njen rang.
   (b) Ispitati injektivnost i sirjektivnost linearne transformacije f.
   (c) Odrediti skup $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0, 0)\}$.

REŠENJA:

1. Centar T kvadrata $ABCD$ je projekcija tačke A na pravu p te je $\vec{r}_T = \vec{r}_P + \dfrac{(\vec{r}_A - \vec{r}_P)\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p}$. Vektor poloäaja temena C dobijamo iz $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{TC}$, dakle $\vec{r}_C = 2\vec{r}_T - \vec{r}_A$. Dijagonala BD je ortogonalna i na p i na dijagonalu AC, te je $BD \parallel \vec{p} \times \overrightarrow{AC}$. Pri tome je $TB = TD = AT$, te tako dobijamo $\vec{r}_{B,D} = \vec{r}_T \pm |\overrightarrow{AT}| \dfrac{\vec{p} \times \overrightarrow{AC}}{|\vec{p} \times \overrightarrow{AC}|}$.

2. (a) Iz trougaonog oblika
$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}$$
polaznog sistema jednačina dobijamo da je njegov skup reëenja $S = \{(z, -z, z) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{z(1, -1, 1) \mid y \in \mathbb{R}\} = Lin((1, -1, 1))$. Po teoremi je lineal podprostor polaznog prostora, a jedan nenula vektor $b = (1, -1, 1)$ čini linearno nezavisan skup, te je $\{(1, -1, 1)\}$ baza podprostora S.
   (b) Jednodimenzionalni podprostor S generisan vektorom $b = (1, -1, 1)$ je prava koja prolazi kroz koordinatni početak i ima vektor pravca $b = (1, -1, 1)$. Kako je $v \cdot s = 0 \Leftrightarrow v \perp s$, sledi da je V skup svih vektora ortogonalnih na pravu S, a to je ravan koja prolazi kroz koordinatni početak i ima vektor normale $b = (1, -1, 1)$. Poznato je da je ravan koja prolazi kroz koordinatni početak dvodimenzionalni podprostor prostora $\mathbb{R}^3$, te jednu njegovu bazu čine bilo koja dva nekolinearna vektora koji su ortogonalni na $b = (1, -1, 1)$. Kako npr. za $v_1 = (1, 1, 0)$ i $v_2 = (0, 1, 1)$ važi $b \cdot v_1 = 0$ i $b \cdot v_2 = 0$, sledi da $v_1, v_2 \in V$. Pri tome su v_1 i v_2 očigledno linearno nezavisni jer su im koordinate neproporcionalne, te sledi da je $\{v_1, v_2\}$ jedna baza podprostora V.

3. (a) Rešavanjem jednačine $(x, y) = \alpha a_1 + \beta a_2$ po $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dobijamo
$(x, y) = \alpha(2, -1) + \beta(-3, 2) = (2\alpha - 3\beta, -\alpha + 2\beta)$
$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcrcl} 2\alpha & - & 3\beta & = & x \\ -\alpha & + & 2\beta & = & y \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcl} & & \beta & = & x + 2y \\ -\alpha & + & 2\beta & = & y \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \beta = x + 2y \\ \alpha = 2x + 3y \end{array},$$
dakle $(x, y) = (2x + 3y)a_1 + (x + 2y)a_2$. Koristeći da je f lineana tranformacija dobijamo
$f(x, y) = f((2x + 3y)a_1 + (x + 2y)a_2) = (2x + 3y)f(a_1) + (x + 2y)f(a_2) = (2x + 3y)b_1 + (x + 2y)b_2 = (2x + 3y)(0, -1, 1) + (x + 2y)(2, 2, -1) = (2x + 4y, y, x + y)$.
Matrica linearne transformacije f je $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Njene kolone su neproporcionalne te je $rang\, M = 2$.
   (b) Kako je $\dim \mathbb{R}^2 = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$, linearna transformacija ne može biti sirjektivna, a injektivna jeste jer je $\dim \mathbb{R}^2 = 2 = rang\, M$.
   (c) Kako je f injektivna linearna transformacija, mora biti $V = \{(0, 0)\}$.