Prezime, ime, br. indeksa: REŠENJE **21.02.2021.**

Studijski program E1 E2 PR SV IT IN (zaokruži) KOLOKVIJUM 1

U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti broj ili brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

5,2,0 • Pri deljenju polinoma x^4+4x^2-6 sa x^2-1 nad $\mathbb{R}$, količnik je X^2+5, a ostatak je -1.

4..0 • Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B,+,\cdot,',0,1)$:
1) $a'(a')'=(a'+a)'$ **2)** $a'\cdot a=0'$ **3)** $a\cdot 0'=a'$ **4)** $1+a=1'$ **5)** $a\cdot b=(a'b')'$

4 • Ako je $z\in\mathbb{C}$, upiši nedostajući element u skupu $z^5=\frac{-\sqrt{3}-i}{2} \Leftrightarrow z\in\left\{ e^{-\frac{5\pi}{30}i}, e^{i\frac{7\pi}{30}}, e^{i\frac{19\pi}{30}}, e^{-i\frac{29\pi}{30}}, e^{-i\frac{17\pi}{30}}\right\}$

5×1 • Neka su f i g funkcije definisane sa $f=\left(\begin{smallmatrix}a&b&c&d\\d&b&a&c\end{smallmatrix}\right)$ i $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b&c&d\\c&b&d&a\end{smallmatrix}\right)$. Tada je $f\circ g=\left(\begin{smallmatrix}a&b&c&d\\a&b&c&d\end{smallmatrix}\right)$,
$f^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}a&b&c&d\\c&b&d&a\end{smallmatrix}\right)$, $g^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}a&b&c&d\\d&b&a&c\end{smallmatrix}\right)$, $(f\circ g)^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}a&b&c&d\\a&b&c&d\end{smallmatrix}\right)$, $g^{-1}\circ f^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}a&b&c&d\\a&b&c&d\end{smallmatrix}\right)$

9×1 • Izračunati: **1)** $\arg(-13i)=-\pi/2$ **2)** $\arg(2e^{3i})=3$ **3)** $\arg(6)=0$ **4)** $\arg(-9)=\pm\pi$ **5)** $\arg(2i)=\pi/2$
6) $\arg(-1+i)=\frac{3\pi}{4}$ **7)** $\arg(3e^{5i})=5-2\pi$ **8)** $\arg(-1+i\sqrt{3})=2\pi/3$ **9)** $\arg(0)=$ /

5×1 • Neka su $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definisane sa $f(x)=1+x^3$ i $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$. Izračunati: **a)** $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}=g(x)$
b) $g^{-1}(x)=1+x^3=f(x)$ **c)** $(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=x$ **d)** $(g\circ f)(x)=x$ **e)** $(g\circ f)^{-1}(x)=x$

4,2,0 • Zaokružiti brojeve ispred bijektivnih funkcija: **1)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x+3$ **2)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4$
3) $f:(-\infty,3]\to(-1,\infty),\ f(x)=x^2$ **4)** $f:\mathbb{R}\to(0,\infty),\ f(x)=e^{x^3}$ **5)** $f:\mathbb{R}\to(0,\infty),\ f(x)=e^{x^2}$

4,2,0 • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su grupe.
1) $(\mathbb{Z},+)$ **2)** $(\mathbb{Z},\cdot)$ **3)** $(\mathbb{R},+)$ **4)** $(\mathbb{R},\cdot)$ **5)** $((-1,1),\cdot)$ **6)** $([0,\infty),\cdot)$

7..0 • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred jednakosti koje su tačne u skupu kompleksnih brojeva:
1) $z\overline{z}=|z|^2$ **2)** $Re(z)=\frac{1}{2}(z-|z|)$ **3)** $Im(z)=\frac{1}{2}(z+|z|)$ **4)** $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$ **5)** $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$
6) $\overline{z}\in\mathbb{R}\Rightarrow z=\overline{z}$ **7)** $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$ **8)** $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ **9)** $z\neq 0\Rightarrow z^{-1}=|z|^{-2}\overline{z}$ **10)** $|z|=1\Rightarrow z^{-1}=\overline{z}$

4,2,0 • Ako su P i Q polinomi, $dg(P)=3$ i $dg(Q)=1$, tada je skup svih mogućnosti za
$dg(PQ)\in\{4\}$ i $dg(P+Q)\in\{3\}$.

6,5,3,1,0 • Ako je $f\in\mathbb{R}[x]$, $f(i)=0$, tada: **1)** $x-i\,|\,f(x)$ **2)** $x+i\,|\,f(x)$ **3)** $x\,|\,f(x)$
4) $x^2+1\,|\,f(x)$; **5)** $x+e^{i\frac{\pi}{2}}\,|\,f(x)$ **6)** $x^2-1\,|\,f(x)$; **7)** $x^2+x\sqrt{2}+1\,|\,f(x)$;

6,5,3,1,0 • **1)** $\arg z>0 \Leftrightarrow I_m(z)>0$ **2)** $\arg z<0 \Leftrightarrow I_m(z)\leq 0$ **3)** $\arg z<0 \Rightarrow I_m(z)\leq 0$
4) $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2} \Rightarrow I_m(z)\in\mathbb{R}$ **5)** $\arg z<0 \Leftrightarrow I_m(z)<0$ **6)** $\{z|\arg z>0\}=\{z|I_m(z)>0\}\cup\mathbb{R}^-$

4 • Funkcija $f:(-\pi,\frac{\pi}{4})\longrightarrow(-1,1]$ definisana sa $f(x)=\cos x$ je:
1) sirjektivna i nije injektivna **2)** injektivna i nije sirjektivna **3)** nije injektivna i nije sirjektivna **4)** bijektivna

4 • Funkcija $f:(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})\longrightarrow(0,1]$ definisana sa $f(x)=\sin x$ je:
1) sirjektivna i nije injektivna **2)** injektivna i nije sirjektivna **3)** nije injektivna i nije sirjektivna **4)** bijektivna

4 • Funkcija $f:(\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4})\setminus\{\frac{\pi}{2}\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definisana sa $f(x)=\mathrm{tg}\,x$ je:
1) sirjektivna i nije injektivna **2)** injektivna i nije sirjektivna **3)** nije injektivna i nije sirjektivna **4)** bijektivna

4,2,0 • Dat je skup kompleksnih brojeva $A=\{w|w\in\mathbb{C}\ \wedge\ w^2\geq 0\}$. Odrediti sve vrednosti $\varphi\in(-\pi,\pi]$ tako da je $\rho e^{i\varphi}\in A$ za svako $\rho>0$. $\varphi\in\{0,\pm\pi\}$

4,2,0 • Neka je $\{-2,1\}$ skup svih korena polinoma $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ nad poljem realnih brojeva. Tada skup svih mogućnosti za a je $a\in\{0,3\}$.

8×1 • Neka je $A=\{1,2,3\}$ i $B=\{1,2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f\nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f\underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:
$\left|\{f|f:A\longrightarrow B\}\right|=8$, $\left|\{f|f:A\xrightarrow{1-1}B\}\right|=0$, $\left|\{f|f:A\longrightarrow B\wedge f\nearrow\}\right|=0$, $\left|\{f|f:B\xrightarrow{na}B\}\right|=2$,
$\left|\{f|f:B\longrightarrow A\}\right|=9$, $\left|\{f|f:A\xrightarrow{1-1}A\}\right|=6$, $\left|\{f|f:B\longrightarrow A\wedge f\underline{\nearrow}\}\right|=6$, $\left|\{f|f:A\xrightarrow{na}B\}\right|=6$.

5,2,0 • Neka su $z_1=1+i$, $z_2=2$ i $z_3=1$. Izraziti u zavisnosti od z_1, z_2 i z_3 ugao $\sphericalangle z_2z_3z_1=\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ i zatim ga efektivno izračunati $\sphericalangle z_2z_3z_1=\pi/2$. Da li je ovaj ugao pozitivno orijentisan? DA NE

4,2,0 • Neka je $g:(-1,0]\to\mathbb{R}$, $g(x)=-\sqrt{1-x^2}$, inverzna funkcija je $g^{-1}(x)=-\sqrt{1-x^2}$, $g^{-1}:A\to\mathbb{R}$, $A=[-1,0)$

Prezime, ime, br. indeksa: REŠENJE **21.02.2021.**

Studijski program E1 E2 PR SV IT IN (zaokruži) **KOLOKVIJUM 2**

U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti broj ili brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

4,2,0 • Neka je α ravan čija je jednačina $x+y=1$. Napisati jedan vektor normale ravni α: $\vec{n}_\alpha = (\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0\ )$ i koordinate jedne tačke ravni α: $(\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ )$.

5×1 • Ako je $\vec{a}=(-1,1,1)$ i $\vec{b}=(1,-1,1)$, tada je: 1) $|\vec{a}|=\sqrt{3}$ 2) $|\vec{b}|=\sqrt{3}$ 3) $\vec{a}\vec{b}=-1$ 4) $\vec{a}\times\vec{b}=(2,2,0)$ 5) $\sphericalangle(\vec{a}\vec{b})=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$

4,2,0 • U vektorskom prostoru slobodnih vektora, trojka vektora (a,b,c) je: 1) uvek nezavisna, 2) uvek zavisna, 3) nekad nezavisna a nekad zavisna, 4) generatorna, 5) nikad baza.

6,3,0 • U vektorskom prostoru slobodnih vektora, trojka vektora $(a,b,\vec{0})$ je: 1) uvek nezavisna, 2) uvek zavisna, 3) nekad nezavisna a nekad zavisna, 4) generatorna, 5) nikad baza.

6,3,0 • Koje su od sledećih uređenih n-torki generatorne u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$: 1) $\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$ 2) $\big((1,2,3),(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\big)$ 3) $\big((1,0,0)\big)$ 4) $\big((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9),(-3,5,-9)\big)$

9×1 • Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix}2&0&0&4\\2&3&1&2\\1&0&0&2\end{bmatrix}$ 2, $\begin{bmatrix}1&3&2\\0&0&0\end{bmatrix}$ 1, $\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$ 1, $\begin{bmatrix}2&1&1\\3&1&1\end{bmatrix}$ 2, $\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ 1, $\begin{bmatrix}1&2&2\\0&2&0\\2&0&4\end{bmatrix}$ 2, $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$ 1, $\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$ 1, $\begin{bmatrix}3&3\\3&3\end{bmatrix}$ 1

4×1 • $\begin{bmatrix}-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&-1&2\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-1\end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&2\end{vmatrix}=2$ $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=-1$ $\begin{bmatrix}-2&1\\-3&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1\\-3&2\end{bmatrix}$

4,2,0 • Neka je $\psi:\mathbb{R}^3\to V$ definisana sa $\psi(x_1,x_2,x_3)=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_2\vec{j}$, gde su $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},+,\cdot)$ i $(V,\mathbb{R},+,\cdot)$ vektorski prostori svih uređenih trojki i svih slobodnih vektora. Da li je funkcija $\psi:\mathbb{R}^3\to V$ 1) linearna transformacija 2) injektivna 3) sirjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

6,5,3,0 • Neka su $\vec{x},\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ slobodni vektori i $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ jedinični međusobno normalni. Tada je: 1) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}+(\vec{x}\vec{j})\vec{j}+(\vec{x}\vec{k})\vec{k}=\vec{x}$ 2) $(\vec{x}\vec{i},\vec{x}\vec{j},\vec{x}\vec{k})\in\mathbb{R}^3$ 3) $(\vec{x}\vec{i})^2+(\vec{x}\vec{j})^2+(\vec{x}\vec{k})^2=\vec{x}\vec{x}$ 4) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}+(\vec{x}\vec{j})\vec{j}+(\vec{x}\vec{k})\vec{k}\in\mathbb{R}^3$ 5) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}+(\vec{x}\vec{j})\vec{j}+(\vec{x}\vec{k})\vec{k}=\vec{x}\vec{x}$

4,2,0 • Neka je $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ uređena trojka komplanarih slobodnih vektora. Tada: 1) trojka $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ je uvek linearno nezavisna 2) trojka $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ je uvek linearno zavisna 3) postoje takvi vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ da je trojka $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ nezavisna 4) postoje takvi vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ da je trojka $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ generatorna

6,5,3,0 • U vektorskom prostoru svih slobodnih vektora, par vektora (a,b) je: 1) nekad generatoran, 2) uvek nezavisan, 3) uvek zavisan, 4) nekad nezavisan a nekad zavisan, 5) nikad generatoran, 6) nikad baza.

4 • Izračunati vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke T, projekcije tačke $A(1,1,1)$ na ravan $\alpha: x=2$. $\vec{r}_T=(2,1,1)$

8 • Odrediti vrednosti parametara $a,b\in\mathbb{R}$ za koje je sistem
$$\begin{aligned}ax+y&=1\\ax-ay&=b\end{aligned}$$
2 (a) kontradiktoran: $(a=0\wedge b\neq0)\vee(a=-1\wedge b\neq1)$

2 (b) određen: $a\notin\{-1,0\}$

2 (c) 1 puta neodređen: $(a=0\wedge b=0)\vee(a=-1\wedge b=1)$

2 (d) 2 puta neodređen: /

5 • Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix}-1&2\\4&1\end{bmatrix}$? 1) $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

6,4,2,0 • Koja od tvrđenja su tačna ako je kvadratna matrica B dobijena od matrice A elementarnim transformacijama. 1) $det(A)=det(B)$ 2) $det(A)\neq0\ \wedge\ det(B)\neq0$ 3) $Rang(A)=Rang(B)$ 4) $A\cdot B=I$ 5) $A=\alpha B$ za neki skalar α 6) matrice A i B imaju iste karakteristične korene 7) $\exists A^{-1}\ \Leftrightarrow\ \exists B^{-1}$

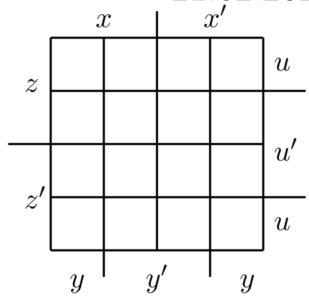
6,5,3,0 • Za proizvoljne kvadratne regularne matrice A,B,C reda $n>1$ važi: 1) $A^2(B^2C^3)=(A^2B^2)C^3$ 2) $AB=BA$ 3) $(A^2B^2)^{-1}=B^{-2}A^{-2}$ 4) $det(A^3B)=(det(A))^3\cdot det(B)$

4 • Neka je u k-dimenzionalnom vektorskom prostoru V, n-torka vektora $(a_1,\ldots,a_n)$ generatorna. Tada je: 1) $k<n$ 2) $k\leq n$ 3) $k=n$ 4) $k>n$ 5) $k\geq n$ 6) ništa od prethodno navedenog

5 • Napisati $\vec{x}=(0,0,2)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(0,1,1)$ i $\vec{c}=(1,1,0)$: $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

4 • Za prave $m:\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{5}$ i $n:\frac{x-4}{-6}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-4}{-1}$ važi: a) mimoilazne su $(m\cap n=\emptyset\wedge m\nparallel n)$ b) paralelne su i različite $(m\parallel n\wedge m\neq n)$ c) poklapaju se $(m=n)$ d) seku se $(m\cap n=\{M\})$

ALGEBRA **21.02.2021.**



1. Napisati $SDNF$, sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0

2. Naći količnik i ostatak pri delenju polinoma $p(x) = x^5 + 5x^4 + 6x^3 - x^2 - 5x - 6$ polinomom $q(x) = x^2 + x + 1$, i faktorisati polinom p nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

3. U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačinu $z^3 = i\overline{z}$.

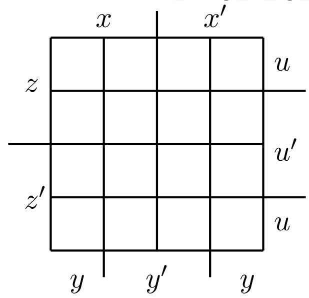
4. Prava p je određena tačkom P i vektorom pravca $\vec{p}$. Tačke $A \notin p$ i $B \notin p$ su takve da $AB \nparallel p$. U funkciji od $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja tačaka C i D, tako da $ABCD$ bude pravougaonik čiji presek dijagonala AC i BD pripada pravoj p.

5. Neka je V vektorski prostor koji je generisan skupom vektora $\{a, b, c, d, e\}$, čije **sve** zavisnosti su date sledećim jednakostima i njihovim linearnim kombinacijama:
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & + & b & - & 15c & + & 10d & - & e & = & 0 \\ 2a & + & b & + & 18c & - & 12d & + & e & = & 0 \\ a & & & + & 33c & - & 22d & + & 2e & = & 0 \end{array}$$

   (a) Odrediti dimenziju vektorskog prostora V.
   (b) Naći sve podskupove skupa $\{a, b, c, d, e\}$ koji su baze prostora V.

6. Za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je poznato da je $f(1,0) = (1, a, 0)$ i $f(1,1) = (1, b, b)$, gde je $a, b \in \mathbb{R}$. **(a)** Izračunati $f(x, y)$ za $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i napisati matricu M_f linearne transformacije f. **(b)** Ispitati za koje vrednosti $a, b \in \mathbb{R}$ je linearna transformacija f injektivna, za koje je sirjektivna, i za koje je izomorfizam.

ALGEBRA **21.02.2021.**



1. Napisati $SDNF$, sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0

2. Naći količnik i ostatak pri delenju polinoma $p(x) = x^5 + 5x^4 + 6x^3 - x^2 - 5x - 6$ polinomom $q(x) = x^2 + x + 1$, i faktorisati polinom p nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

3. U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačinu $z^3 = i\overline{z}$.

4. Prava p je određena tačkom P i vektorom pravca $\vec{p}$. Tačke $A \notin p$ i $B \notin p$ su takve da $AB \nparallel p$. U funkciji od $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja tačaka C i D, tako da $ABCD$ bude pravougaonik čiji presek dijagonala AC i BD pripada pravoj p.

5. Neka je V vektorski prostor koji je generisan skupom vektora $\{a, b, c, d, e\}$, čije **sve** zavisnosti su date sledećim jednakostima i njihovim linearnim kombinacijama:
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & + & b & - & 15c & + & 10d & - & e & = & 0 \\ 2a & + & b & + & 18c & - & 12d & + & e & = & 0 \\ a & & & + & 33c & - & 22d & + & 2e & = & 0 \end{array}$$

   (a) Odrediti dimenziju vektorskog prostora V.
   (b) Naći sve podskupove skupa $\{a, b, c, d, e\}$ koji su baze prostora V.

6. Za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je poznato da je $f(1,0) = (1, a, 0)$ i $f(1,1) = (1, b, b)$, gde je $a, b \in \mathbb{R}$. **(a)** Izračunati $f(x, y)$ za $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i napisati matricu M_f linearne transformacije f. **(b)** Ispitati za koje vrednosti $a, b \in \mathbb{R}$ je linearna transformacija f injektivna, za koje je sirjektivna, i za koje je izomorfizam.

REŠENJA:

1. Proste implikante:

   yu', $y'zu$, $x'y'z$, $x'zu'$.

   $MDNF_1 = yu' + y'zu + x'y'z$,

   $MDNF_2 = yu' + y'zu + x'zu'$.

	x	x	x'	x'	
z		$*$	$*$		u
z	$*$		$*$	$*$	u'
z'	$*$			$*$	u'
z'					u
	y	y'	y'	y	

2.
$$\begin{array}{rrrrrl}
(x^5+ & 5x^4+ & 6x^3- & x^2-5x-6) & :(x^2+x+1)=x^3+4x^2+x-6 \\
-(x^5+ & x^4+ & x^3 &) & \\ \hline
 & 4x^4+ & 5x^3- & x^2-5x-6 & \\
 & -(4x^4+ & 4x^3+ & 4x^2 \quad) & \\ \hline
 & & x^3- & 5x^2-5x-6 & \\
 & & -(x^3+ & x^2+x \quad) & \\ \hline
 & & & -6x^2-6x-6 & \\
 & & & -(-6x^2-6x-6) & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad p(x) = (x^2+x+1)(x^3+4x^2+x-6)$.

Kompleksni koreni polinoma x^2+x+1 su $x_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \left\{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i, -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$, a kandidati za racionalne korene polinoma x^3+4x^2+x-6 su $\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$. Hornerovom šemom proveravamo koji od njih jesu koreni:

	1	4	1	-6
1	1	5	6	0
1	1	6	12	
-1	1	4	2	
2	1	7	20	
-2	1	3	0	

$\Rightarrow \quad p(x) = (x^2+x+1)(x-1)(x+2)(x+3) \quad \leftarrow \quad$ faktorizacija nad $\mathbb{R}$,

$$= \left(x-\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x-\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)(x-1)(x+2)(x+3) \quad \leftarrow \quad \text{faktorizacija nad } \mathbb{C}.$$

3. Jednačina $z^3 = i\overline{z}$ je definisana za svako $z\in\mathbb{C}$, i rešavamo je smenom $z=\rho e^{i\varphi}$, $\rho\ge 0$, $\varphi\in[-\pi,\pi)$.

$$\left(z^3 = i\overline{z} \ \wedge\ z=\rho e^{i\varphi}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \left(\rho^3\rho e^{i3\varphi} = e^{i\frac{\pi}{2}}\rho e^{-i\varphi} = \rho e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)} \ \wedge\ z=\rho e^{i\varphi}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\left(\rho=0 \ \vee\ \left(\rho=1 \ \wedge\ 3\varphi = -\varphi+\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right) \ \wedge\ z=\rho e^{i\varphi}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\left(\rho=0 \ \vee\ \left(\rho=1 \ \wedge\ \varphi = \frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\{-2,-1,0,1\}\right)\right) \ \wedge\ z=\rho e^{i\varphi}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\left(\rho=0 \ \vee\ \left(\rho=1 \ \wedge\ \varphi\in\left\{-\frac{7\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right\}\right)\right) \ \wedge\ z=\rho e^{i\varphi}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z\in\left\{0, e^{-\frac{7\pi}{8}i}, e^{-\frac{3\pi}{8}i}, e^{\frac{\pi}{8}i}, e^{\frac{5\pi}{8}i}\right\}.$$

4. Neka je $T = AC\cap BD$ (presek dijagonala). Tačka S sa vektorom položaja $\vec{r}_S = \dfrac{1}{2}(\vec{r}_A+\vec{r}_B)$ je sredina duži AB. Ravan α koja sadrži S i normalna je na $\overrightarrow{AB}$ sadrži i tačku T, te je $T=\alpha\cap p$. Sledi da je $\vec{r}_T = \vec{r}_P + \dfrac{(\vec{r}_S-\vec{r}_P)\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}\vec{p}}\vec{p}$. Iz $\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{TC}$ i $\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{TD}$ dobijamo $\vec{r}_C = 2\vec{r}_T-\vec{r}_A$ i $\vec{r}_D = 2\vec{r}_T-\vec{r}_B$.

5. **(a)**
$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
a & + & b & - & 15c & + & 10d & - & e & = 0\\
2a & + & b & + & 18c & - & 12d & + & e & = 0\\
a & & & + & 33c & - & 22d & + & 2e & = 0
\end{array}
\quad\Leftrightarrow\quad
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
a & + & b & - & 15c & + & 10d & - & e & = 0\\
 & - & b & + & 48c & - & 32d & + & 3e & = 0\\
 & - & b & + & 48c & - & 32d & + & 3e & = 0
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rrrrrrrrrr}
a & + & b & - & 15c & + & 10d & - & e & = 0\\
 & - & b & + & 48c & - & 32d & + & 3e & = 0
\end{array}$$

Iz trougaonog oblika sistema vidimo da se a i b mogu izraziti preko c, d i e, a da se pri tome ni jedan od c, d i e ne može izraziti preko preostala dva. Sledi da je $\{c,d,e\}$ jedna baza prostora V i da je $\dim V = 3$.

(b) Kako je

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & c \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 48 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & d \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -32 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & e \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} b & c \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -15 \\ -1 & 48 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} b & d \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -1 & -32 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0,$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} b & e \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c & d \end{array} \\ \begin{vmatrix} -15 & 10 \\ 48 & -32 \end{vmatrix} \end{array} = 0, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c & e \end{array} \\ \begin{vmatrix} -15 & 10 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} d & e \end{array} \\ \begin{vmatrix} 10 & 10 \\ -32 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0,$$

sledi da $\{c, d, e\}$, $\{b, d, e\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, d, e\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, b, d\}$ i $\{a, b, c\}$ jesu baze, a $\{a, b, e\}$ nije baza.

6. Iz $(x, y) = \alpha(1, 0) + \beta(1, 1) = (\alpha + \beta, \beta)$ dobijamo $\beta = y$ i $\alpha = x - y$, te sledi

$f(x, y) = f((x - y)(1, 0) + y(1, 1)) = (x - y)f(1, 0) + yf(1, 1) = (x - y)f(1, 0) + yf(1, 1) = (x - y)(1, a, 0) + y(1, b, b) = (x - y, ax - ay, 0) + (y, by, by) = (x, ax + (b - a)y, by)$,

te iz oblika funkcije f vidimo da je ona linearna transformacija sa matricom $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b - a \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

Linearna transformacija f ne može biti sirjektivna ni za koje vrednosti parametara jer joj je dimenzija domena manja od dimenzije kodomena. Injektivna je u slučaju $rang\, M_f = 2$, a to je očigledno u slučaju kada je $(b \neq 0 \ \vee \ (b = 0 \ \wedge \ a \neq b = 0))$.