A Prezime, ime, br. indeksa: LJUBO 23.01.2021.

Studijski program E1 E2 PR SV IT IN (zaokruži) KOLOKVIJUM 2

U zadatku je dato više odgovora, a treba zaokružiti brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

4 • Za koje koeficijente α su vektori $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ kolinearni, ako vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. $\alpha =$ -15 3

4 • Izraziti vektor $\vec{x} = (3, 1, -4)$ na bar jedan način kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, -1, 1)$ i $\vec{c} = (1, -1, 0)$. $\vec{x} = 2\ \vec{a} + -2\ \vec{b} + 1 \cdot \vec{c}$ $\gamma = t$, $\beta = -t - 1$, $\alpha = -t + 3$ 3

3,2,1,0 • Ako su $\vec{s}$ i $\vec{t}$ jedinični nekolinearni vektori, a $\vec{p} = \vec{s} + \vec{t}$ i $\vec{q} = \alpha\vec{s} + \beta\vec{t}$ uzajamno normalni, tada ugao $\sphericalangle(\vec{s}, \vec{t})$ može biti: 1) $\sphericalangle(\vec{s}, \vec{t}) = \frac{\pi}{6}$ 2) $\sphericalangle(\vec{s}, \vec{t}) = \frac{\pi}{4}$ 3) $\sphericalangle(\vec{s}, \vec{t}) = \frac{\pi}{3}$ 4) $\sphericalangle(\vec{s}, \vec{t}) = \frac{\pi}{2}$ 5) $\sphericalangle(\vec{s}, \vec{t}) = \pi$ 6) $\sphericalangle(\vec{s}, \vec{t}) = 0$ 3

3 • Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačka T težište trougla ABC (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{AT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{AT} =$ $\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ 3

4..1 • Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje je sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} ax \ + \ ay &= 0 \\ -\ (a-1)y &= a-1 \end{aligned}$$

1) kontradiktoran: /
2) određen: $a \notin \{0, 1\}$
3) 1 puta neodređen: $a \in \{0, 1\}$
4) 2 puta neodređen: / 3

2+2 • Za pravu $a: \ x = 2y + 4 = z - 1$ napisati jedan vektor $\vec{a} = (1, \frac{1}{2}, 1) \parallel a$ i koordinate jedne njene tačke $A(0, -2, 1)$ 4

8,6,4,2,1,0 • Za vektore $\vec{a} = (-1, 1, 0)$ i $\vec{b} = (-1, 0, 1)$ izračunati: 1) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ 2) $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ 3) $\vec{a} - 2\vec{b} = (1, 1, -2)$ 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ 5) $\vec{a} \times \vec{b} = (1, 1, 1)$ 6) $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$ 8

4,2,0 • Koje od sledećih uređenih n-torki **nisu** generatorne za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: **1)** $\big((0,0,-1),(0,4,0),(9,0,0)\big)$ 2) $\big((1,0,0),(0,-1,0)\big)$ 3) $\big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,2,3)\big)$ 4) $\big((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\big)$ 4

4x3 • $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [7]$ $\begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -729$ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ 8

4 • Koordinate tačke A' projekcije tačke $A(1, 1, 2)$ na pravu određenu sa $x = y = z$ je: $A'(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ 4

4 • Vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke prodora prave $p: \vec{r} = \vec{r}_Q + t\vec{l}$ kroz ravan $\alpha: \ \vec{m}\vec{r} = \vec{m}\vec{r}_W$ je $\vec{r}_T = \vec{r}_Q + \frac{(\vec{r}_W - \vec{r}_Q)\vec{m}}{\vec{l} \cdot \vec{m}} \cdot \vec{l}$ 4

4 • Normalna projekcija vetora $\vec{x} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ na ravan $\alpha: \ x + 2y + z = 0$ je: $\mathbf{pr}_\alpha(\vec{x}) = (1, -1, 1)$ 4

4,3,2,0 • Koje od sledećih uređenih n-torki **su zavisne** za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: 1) $\big((0,0,-1),(0,4,0),(9,0,0)\big)$ 2) $\big((1,3,-2),(-2,-6,4)\big)$ 3) $\big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,2,3)\big)$ 4) $\big((1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)\big)$ 4

6..0 • Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang. 5

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 0 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$ 1

7,6,5,3,0 • Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 2 i svaki skalar λ: 7

1) $det(A + B) = det(A) + det(B)$ 2) $det(\lambda A) = \lambda^3 det(A)$ 3) $det(AB) = det(A)det(B)$
4) $rang(A + B) = rang(A) + rang(B)$ 5) $rang(AB) = rang(A)rang(B)$ 6) $A(BC) = (AB)C$
7) $A(B + C) = AB + AC$ 8) $AB = BA$ 9) $A + B = B + A$

4x2 • **Napisati bar jednu**, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da 8

1) je injektivna $f(x, y, z) = ($ nema $)$ 2) nije injektivna $f(x, y, z) = (0, 0)$
3) je sirjektivna $f(x, y, z) = (x, y)$ 4) nije sirjektivna $f(x, y, z) = (0, 0)$

85

- Ako su vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ **kolinearni** tada je: **1)** $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ **2)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 7

765310 **3)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ **4)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ **5)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ **6)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nezavisni **7)** $(\exists\lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda\vec{b}$ **8)** $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ **9)** $(\forall\lambda \in \mathbb{R})\ (\vec{a} \neq \lambda\vec{b} \wedge \lambda\vec{a} \neq \vec{b})$ **10)** $(\exists\alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **nekomplanarni** ako je: 7

75310 **1)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 2$ **2)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ **3)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$ **4)** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ **5)** $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ **6)** $(\exists\alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ **7)** $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ **8)** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

2 - Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x - y, 2x + ay)$ je izomorfizam akko $a \in$ $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ 2

- Neka su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični vektori, $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k} \perp \vec{i}$ i $\vec{a} \neq 0$. Tada je **1)** $\vec{x} = (\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k}$ **2)** $(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k})$ je trijedar vektora **3)** Projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{i}$ je vektor $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}$ **4)** $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ 6

65420 **5)** Algebarska projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{i}$ je broj $\vec{x}\vec{i}$ **6)** $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$ **7)** $|\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})| = \frac{|\vec{a}\vec{x}|}{|\vec{a}|}$

- Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ generatorna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ zavisna za prostor V i $\dim V = k$. Tada je 3

3,1,0 / 1,1 **1)** $m \leq k \leq n$ **2)** $n \leq k \leq m$ **3)** $k \leq n$ **4)** $k \leq m \leq n$ **5)** $k \leq n \leq m$ **6)** $n \leq m \leq k$

~~ništa od navedenog~~

25

$\boxed{\text{A}}$ **ALGEBRA - KOLOKVIJUM 2** **23.01.2022.**

1. Date su tačke $A(0, 1, 1)$ i $B(1, 1, 0)$, i ravan $\alpha : x + y + z = 0$. Odrediti tačku C tako da trougao ABC bude jednakostraničan i ravan trougla ABC bude paralelna sa ravni α.

2. Dokazati da je skup rešenja $\mathcal{R}$ sistema linearnih jednačina
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 6z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}$$
potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, i odrediti jednu bazu tog potprostora.

3. Data je ravan $\alpha : x - y - z = 0$. Neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projekcija na ravan α, i neka je $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ravanska simetrija u odnosu na ravan α. Dokazati da su f i g linearne transformacije, i izračunati rangove njihovih matrica.

1. Date su tačke $A(0,1,1)$ i $B(1,1,0)$, i ravan $\alpha: x+y+z=0$. Odrediti tačku C tako da trougao ABC bude jednakostraničan i ravan trougla ABC bude paralelna sa ravni α.

2. Dokazati da je skup rešenja $\mathcal{R}$ sistema linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 6z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, i odrediti jednu bazu tog potprostora.

3. Data je ravan $\alpha: x-y-z=0$. Neka je $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ projekcija na ravan α, i neka je $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ravanska simetrija u odnosu na na ravan α. Dokazati da su f i g linearne transformacije, i izračunati rangove njihovih matrica.

REŠENJA

1. Vektor normale ravni α je $\vec{n}_\alpha=(1,1,1)$. Kako je
$\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=(1,1,0)-(0,1,1)=(1,0,-1)$,
$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_\alpha=(1,0,-1)\cdot(1,1,1)=0$,
sledi da je $\overrightarrow{AB}\parallel\alpha$, te postoji rešenje zadatka. Neka je S sredina duži AB. Kako je ravan trougla ABC paralelna sa ravni α, sledi da je $\overrightarrow{SC}\parallel\alpha$ odnosno $\overrightarrow{SC}\perp\vec{n}_\alpha$. S druge strane je $\overrightarrow{SC}\perp\overrightarrow{AB}$, te je

$$\overrightarrow{SC}\parallel\vec{m}=\vec{n}_\alpha\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\1&0&-1\end{vmatrix}=(-1,2,-1).$$

SC je visina jednakostraničnog trougla stranice AB, te je $|\overrightarrow{SC}|=\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{AB}|$. Tako dobijamo

$$\vec{r}_S=\frac{1}{2}(\vec{r}_A+\vec{r}_B)=\frac{1}{2}((0,1,1)+(1,1,0))=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}),$$

$$\vec{r}_{C_1,C_2}=\vec{r}_S\pm\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})\pm\frac{\sqrt{3}}{2}|(1,0,-1)|\frac{(-1,2,-1)}{|(-1,2,-1)|}$$

$$=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}\frac{(-1,2,-1)}{\sqrt{6}}=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})\pm\frac{1}{2}(-1,2,-1)=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})\pm(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}),$$

$$\vec{r}_{C_1}=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})=(0,2,0),$$

$$\vec{r}_{C_2}=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})-(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})=(1,0,1)$$

(zadatak ima dva rešenja).

2. Nakon što prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dodamo na drugu, prvu jednačinu dodamo na treću, a zatim drugu jednačinu dodamo na treću, dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \\ & & y & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

čiji je skup rešenja

$\mathcal{R}=\{(0,2\alpha,\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}=\{\alpha(0,2,1)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Lin}((0,2,1))$.

Sledi da je $\mathcal{R}$, kao lineal, potorostor prostora $\mathbb{R}^3$ (teorema). Jedna baza mu je $\{(0,2,1)\}$ jer je, kao lineal nad $(0,2,1)$, skup $\mathcal{R}$ generisan sa $(0,2,1)$, a vektor $(0,2,1)\neq\vec{0}$ je i linearno nezavisan.

3. Ravan α sadrži tačku $O(0,0,0)$ i normalna je na vektor $\vec{n}=(1,-1,-1)$. Za proizvoljno $\vec{r}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, primenom formule za projekciju tačke (x,y,z) na ravan α dobijamo

$$f(x,y,z)=\vec{r}+\frac{(\vec{r}_O-\vec{r})\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n}=(x,y,z)+\frac{((0,0,0)-(x,y,z))\cdot(1,-1,-1)}{(1,-1,-1)\cdot(1,-1,-1)}(1,-1,-1)$$

$$= (x,y,z) + \frac{(-x,-y,-z)\cdot(1,-1,-1)}{3}(1,-1,-1) = (x,y,z) + \frac{-x+y+z}{3}(1,-1,-1)$$
$$= (x,y,z) + \left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z\right)$$
$$= \left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z\right).$$

Za ravansku simetriju g imamo da je $\overrightarrow{(x,y,z)f(x,y,z)} = \overrightarrow{f(x,y,z)g(x,y,z)}$, te je

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= 2f(x,y,z) - (x,y,z) \\ &= \left(\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y-\frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z\right) - (x,y,z) \\ &= \left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z\right). \end{aligned}$$

Iz izraza kojima su funkcije f i g definisane vidimo da jesu linearne transformacije sa matricama

$$M_f = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \qquad M_g = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Kako je

$$M_f \overset{[1]}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{[2]}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \overset{[3]}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sledi da je $\text{rang}(M_f) = 2$. Kako je

$$M_g \overset{[1]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{[4]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -2 \end{bmatrix} \overset{[5]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

sledi da je $\text{rang}(M_g) = 3$.

[1] - Matricu množimo sa 3.

[2] - Prvu vrstu dodamo na drugu, i prvu vrstu pomnoženu sa -2 dodamo na treću.

[3] - Drugu vrstu dodamo na treću.

[4] - Prvu vrstu pomnoženu sa -2 dodamo na drugu i treću.

[5] - Drugu vrstu pomnoženu sa -2 dodamo na treću.