A **Prezime, ime, br. indeksa:** LJUBO **04.12.2022.**

Studijski program E1 E2 PR SW IT IN (zaokruži) KOLOKVIJUM 1

U zadacima dato je više odgovora, a treba zaokružiti brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora. Na kraju testa su tri zadatka koji se rade u datoj svesci. Obavezno se predaje ovaj test i sveska.

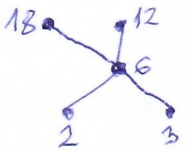
6×1
- Ispitati da li relacija „deli" skupa $A = \{2, 3, 6, 12, 18\}$ jeste relacija poretka: DA NE (zaokruži), i ako jeste, nacrtati Haseov dijagram, i napisati

  minimalne el. { 2, 3 }

  maksimalne el. { 12, 18 }

  najveći el. { }

  najmanji el. { }



5×1
- Neka je $\mathcal{F}$ skup svih bijektivnih funkcija skupa F u samog sebe i neka je operacija kompozicije funkcija $\circ$ definisana sa $(\forall x \in F)\quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$ za svako f i g iz skupa $\mathcal{F}$. Tada je

  1) $(\mathcal{F}, \circ)$ asocijativni grupoid. 2) $(\mathcal{F}, \circ)$ grupoid sa neutralnim elementom.
  3) $(\mathcal{F}, \circ)$ grupa. 4) $(\mathcal{F}, \circ)$ komutativna grupa. 5) $(\mathcal{F}, \circ)$ grupoid.

5×1
- Neka je $\mathcal{R}$ skup svih funkcija skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ u samog sebe koje nemaju korene (nule) u skupu $\mathbb{R}$, odnosno $\mathcal{R} = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \wedge (\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \neq 0\}$ i neka je operacija množenja funkcija $\cdot$ definisana sa $(\forall x \in \mathbb{R})\quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ za sve f i g iz $\mathcal{R}$. Tada je

  1) $(\mathcal{R}, \cdot)$ asocijativni grupoid. 2) $(\mathcal{R}, \cdot)$ grupoid sa neutralnim elementom.
  3) $(\mathcal{R}, \cdot)$ grupa. 4) $(\mathcal{R}, \cdot)$ komutativna grupa. 5) $(\mathcal{R}, \cdot)$ grupoid.

5×1
- Neka su $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ i $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definisane sa $f(x) = \frac{1}{2x}$ i $g(x) = e^x - 1$. Izračunati:

  1) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x}$ 2) $g^{-1}(x) = \ln(x+1)$ 3) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2(e^x-1)}$ 4) $(f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{2x}+1\right)$ 5) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \ln\left(\frac{1}{2x}+1\right)$

5 4 3 2 0
- Injektivne funkcije su:

  1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^3$ 2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \text{arctg}\, x$ 3) $f : [-3, -1] \to (1, 9],\ f(x) = x^2$
  4) $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to [0, \infty),\ f(x) = \text{tg}\, x$ 5) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin x$

5 4 2 0
- Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$: 1) $ab = 1 \Rightarrow a = 1$
  2) $(a')' = a + 1'$ 3) $aa' = 1$ 4) $a \cdot 0 = 1'$ 5) $1 + a = a$ 6) $bc + a = (a + b)(a + c)$ 7) $(ab)' = a'b'$

5..0
- $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(2 - i) = 0$. Tačno je : 1) $x - \sqrt{5}e^{-i\,\text{arctg}\, 2} \,|\, f(x)$ 2) $x - 2 + i \,|\, f(x)$ 3) $x - 2 - i \,|\, f(x)$ 4) $x - \sqrt{5}e^{i} \,|\, f(x)$
  5) $x - \sqrt{5}e^{i\,\text{arctg}\, \frac{1}{2}} \,|\, f(x)$ 6) $x^2 + 4x + 5 \,|\, f(x)$; 7) $x + 2 + i \,|\, f(x)$ 8) $x^2 - 4x + 5 \,|\, f(x)$; 9) $x - \sqrt{5}e^{-i\,\text{arctg}\, \frac{1}{2}} \,|\, f(x)$

5 4 2 0
- Ako je $A = \{w | w \in \mathbb{C} \wedge w^2 \geq 0\}$, tada je: 1) $A = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ 2) $A = \{z | \arg z \in \{0, \pi\} \vee z = 0\}$ 3) $A = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
  4) $A = \mathbb{R}$ 5) $A = \{\rho e^{i\varphi} | \rho \geq 0 \wedge \varphi \in (-\pi, \pi)\}$ 6) $A = \{\rho e^{i\varphi} | \rho \geq 0 \wedge \varphi \in (-\pi, \pi]\}$ 7) $A = \{\rho e^{i\varphi} | \rho \geq 0 \wedge \varphi \in \mathbb{R}\}$.

3×1
- Neka je $z = 1$, $u = 2i$ i $w = 2 + 3i$. Rotacijom tačke z oko tačke w za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $5+2i$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $3+3i$, $\measuredangle zwu = -\pi/4$.

5..0
- Za sve $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i sve $\varphi \in (-\pi, \pi]$: 1) $z = e^{i\varphi} \Leftrightarrow |z| = 1$ 2) $\overline{e^{-i\varphi}} = e^{-i\overline{\varphi}}$ 3) $\overline{e^{-i\varphi}} = e^{-\overline{i\varphi}}$
  4) $e^{i(\arg z - \arg z^{-1})} = z^2|z|^{-2} = z(\overline{z})^{-1}$ 5) $e^{i(\arg z + \arg z^{-1})} = 1$ 6) $1 = z\overline{z}|z|^{-2}$ 7) $\arg z > 0 \Leftrightarrow \arg z - \arg(-z) = \pi$

5..0
- U skupu $\mathbb{C} \setminus \{0\}$: 1) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow z^{-1} = \overline{z}$ 2) $|z_1 z_2| = |z_2||z_1|$ 3) $R_e(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$ 4) $\overline{z_2 - z_1} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$ ne
  5) $z\overline{z} = |z\overline{z}|$ 6) $|z| = 1 \Leftrightarrow z^{-3} = \overline{z}^3$ 7) $|z_1 - z_2| \geq |z_2| + |z_1|$ 8) $z_1|z_2| = z_2|z_1| \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2$

5 4 2 0
- Ako je $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je:

  1) $dg(P) = 4$, 2) $dg(P) \in \{0, 2, 4\}$, 3) $dg(P) \in \{0, 1, 2, 4\}$, 4) $dg(P) \in \{4, 3, 2, 1, 0\}$

2×1
- Pri deljenju polinoma $x^4 + 2x^2 + 2$ sa $x^2 + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je x^2+1, a ostatak je 1.

6..0 • Grupe su: 1) $(\{0,1\},\cdot)$ 2) $(\{e^{i\theta}|\theta\in(-\pi,\pi]\},\cdot)$ 3) $(\{-1,1\},\cdot)$ 4) $\{i,-1,-i,1\},\cdot)$ 5) $(\{1,e^{i\frac{2\pi}{3}},e^{-i\frac{2\pi}{3}}\},\cdot)$

6) $(\mathbb{C},\cdot)$ 7) $(\{-1,0,1\},\cdot)$ 8) $((0,\infty),\cdot)$ 9) $([0,\infty),+)$ 10) $\left(\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\},\circ\right)$ 11) 3,4 i 5 su podgrupe grupe 2.

5420 • 1) $\arg z<0 \Leftrightarrow I_m(z)\le 0$ 2) $\arg z<0 \Rightarrow I_m(z)\le 0$ 3) $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2} \Rightarrow I_m(z)\in\mathbb{R}$

me

4) $\arg z>0 \Rightarrow I_m(z)>0$ 5) $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow R_e(z)>0$ 6) $-\frac{\pi}{2}\le\arg z\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow R_e(z)\ge 0$

65310 • U grupi $(G,\cdot)$, gde je e neutralni, a x^{-1} inverzni za x važi: 1) $a\cdot y=b\Rightarrow y=a^{-1}\cdot b$ 2) $a\cdot y=b\Rightarrow y=b\cdot a^{-1}$

3) $a\cdot e=e$ 4) $a^{-1}\cdot a=e$ 5) $e\cdot e=e$ 6) $e^{-1}=e$ 7) $(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}$ 8) $(a\cdot b)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}$

7×1 • Za kompleksni broj $z=e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{6}}=|z|e^{i\arg z}$, naći: (Može i korišćenjem $e^{i\alpha}\pm e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\pm e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}})$.)

$R_e(z)=\cancel{0}$ $-\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $I_m(z)=\cancel{2\sin\frac{\pi}{12}}$ $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|z|=2\sin\frac{\pi}{12}$, $\arg z=\frac{3\pi}{4}$, $\overline{z}=$ $2\sin\frac{\pi}{12}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, $z^2=$ $-4\sin^2\frac{\pi}{12}e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $R_e(z^2)=\cancel{1}$ 0.

8×1 • Neka je $A=\{1,2,3,4\}$ i $B=\{1,2,3\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f\nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f\underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:

$\left|\{f|f:A\longrightarrow B\}\right|=3^4=81$, $\left|\{f|f:A\xrightarrow{1-1}B\}\right|=0$, $\left|\{f|f:A\longrightarrow B\wedge f\nearrow\}\right|=0$, $\left|\{f|f:B\xrightarrow{na}A\}\right|=0$,

$\left|\{f|f:B\to A\}\wedge f\nearrow\right|=4$, $\left|\{f|f:A\xrightarrow{1-1}A\}\right|=4!=24$, $\left|\{f|f:B\to A\wedge f\underline{\nearrow}\}\right|=20$, $\left|\{f|f:A\xrightarrow{na}B\}\right|=36$.

7 (14×0.5) • $\arg(e^{i\frac{\pi}{2}})=+\frac{\pi}{2}$, $\arg(e^{-i\pi})=\pi$, $\arg(-3\pi)=\pi$, $\arg(2\pi)=0$, $\arg(3e^{3i})=3$, $\arg(5e^{5i})=5-2\pi$, $\arg(-2e^{i\frac{\pi}{2}})=-\frac{\pi}{2}$

$\arg(-13i)=-\frac{\pi}{2}$, $\arg(6)=0$, $\arg(-9)=\pi$, $\arg(2i)=\frac{\pi}{2}$, $\arg(-1+i)=\frac{3\pi}{4}$, $\arg(-\sqrt{3}+i)=\frac{5\pi}{6}$, $\arg(0)=/$

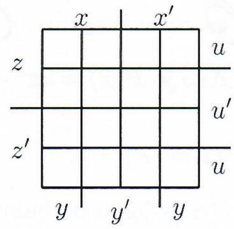
$\boxed{A}$ ALGEBRA - KOLOKVIJUM 1 04.12.2022.

1. Za $a,b\in\mathbb{R}$, neka je funkcija $f_{a,b}:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ definisana sa $f_{a,b}(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$. Neka je $\mathcal{F}=\{f_{a,b}\mid a,b\in\mathbb{R}\}$. Za funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, neka su operacije $\oplus$ i $\odot$ definisane sa $(f\oplus g)(x)=f(x)+g(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $\quad(f\odot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
   (a) Dokazati da je $(\mathcal{F},\oplus)$ komutativna grupa.
   (b) Ispitati da li je $(\mathcal{F},\odot)$ komutativna grupa.

$e^{i\frac{\pi}{4}}(e^{i\frac{\pi}{12}}-e^{-i\frac{\pi}{12}})=$
$=e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot 2i\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\pi}{12}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2. Napisati $SDNF$, sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0



3. Odrediti $a,b\in\mathbb{R}$ tako da 2 i -3 budu koreni polinoma
   $p(x)=x^5-3x^4-x^3+ax^2+bx+60$,
   a zatim za te a i b faktorisati polinom p nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

$\boxed{\text{A}}$ REŠENJA

1. (a) Zapazimo da je za sve $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ i svako $x \in \mathbb{R}$

$$(f_{a,b} \oplus f_{c,d})(x) = f_{a,b}(x) + f_{c,d}(x) = \frac{ax+b}{x-1} + \frac{cx+d}{x-1}$$
$$= \frac{(a+c)x+(b+d)}{x-1} = f_{a+c,b+d}(x),$$

dakle $f_{a,b} \oplus f_{c,d} = f_{a+c,b+d}$. [$*$]

Operacija $\oplus$ je komutativna i asocijativna jer je

$f_{a,b} \oplus f_{c,d} = f_{a+c,b+d} = f_{c+a,d+b} = f_{c,d} \oplus f_{a,b}$,

$(f_{a,b} \oplus f_{c,d}) \oplus f_{e,f} = f_{a+c,b+d} \oplus f_{e,f} = f_{a+c+e,b+d+f}$
$= f_{a,b} \oplus f_{c+e,d+f} = f_{a,b} \oplus (f_{c,d} \oplus f_{e,f})$.

Neutralni element je $f_{0,0} \in \mathcal{F}$ jer zbog [$*$] vai

$f_{0,0} \oplus f_{a,b} = f_{0+a,0+b} = f_{a,b}, \quad f_{a,b} \oplus f_{0,0} = f_{a+0,b+0} = f_{a,b}$.

Za proizvoljno $f_{a,b} \in \mathcal{F}$, inverzni element je $f_{-a,-b} \in \mathcal{F}$ jer zbog [$*$] vai

$f_{a,b} \oplus f_{-a,-b} = f_{a+(-a),b+(-b)} = f_{0,0}, \quad f_{-a,-b} \oplus f_{a,b} = f_{-a+a,-b+b} = f_{0,0}$.

Dakle, $(\mathcal{F}, \oplus)$ je komutativna grupa.

(b) $(\mathcal{F}, \odot)$ nije komutativna grupa jer nije ni grupoid. Naime, npr. za $f_{1,2} \in \mathcal{F}$ i $f_{3,4} \in \mathcal{F}$ imamo da je

$$(f_{1,2} \odot f_{3,4})(x) = f_{1,2}(x) \cdot f_{3,4}(x) = \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{3x+4}{x-1} = \frac{3x^2+10x+8}{(x-1)^2}$$

za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, gde 1 nije koren polinoma $3x^2+10x+8$ te stoga izraz $\frac{3x^2+10x+8}{(x-1)^2}$ nije oblika $\frac{ax+b}{x-1}$ za neke $a,b \in \mathbb{R}$, dakle $f_{1,2} \odot f_{3,4} \notin \mathcal{F}$.

2. $\mathsf{SDNF} = xyz'u + xyz'u' + xy'zu' + xy'z'u' + xy'z'u + x'y'zu' + x'y'z'u' + x'yz'u' + x'yz'u$.

Proste implikante: xz', $y'u'$, yz', $z'u'$.

$\mathsf{MDNF} = xz' + y'u' + yz'$.

3.

	1	-3	-1	a	b	60
2	1	-1	-3	$a-6$	$2a+b-12$	$\underline{4a+2b+36}$
-3	1	-4	9	$a-33$	$\underline{-a+b+87}$	

$$\Rightarrow \begin{array}{r} 4a+2b=-36 \\ -a+b=-87 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 6a=138 \\ -a+b=-87 \end{array} \quad \begin{array}{l} a=23 \\ b=-64 \end{array},$$

$p(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + ax^2 + bx + 60 = x^5 - 3x^4 - x^3 + 23x^2 - 64x + 60$
$= (x-2)(x+3)(x^3 - 4x^2 + 9x - 10)$.

Kandidati za racionalne korene polinoma $x^3 - 4x^2 + 9x - 10$ su ±1, ±2, ±5 i ±10, te Hornerovom šemom dobijamo

	1	-4	9	-10
2	1	-2	5	$\underline{0}$

odakle je

$p(x) = (x-2)^2(x+3)(x^2-2x+5)$,

a koreni polinoma x^2-2x+5 su $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2i \notin \mathbb{R}$.

Sledi da je

$p(x) = (x-2)^2(x+3)(x^2-2x+5)$

faktorizacija polinoma p nad $\mathbb{R}$, a faktorizacija polinoma p nad $\mathbb{C}$ glasi

$p(x) = (x-2)^2(x+3)(x-(1+2i))(x-(1-2i))$.