Merenje i regulacija - Matematika 1, IIS-Algebra	2023/2024	Vežbanje za Kol 2

Prezime, ime, br. indeksa: ______________________________

PREDISPITNE OBAVEZE PO2 (raditi na ovom papiru)

- Za vektore $\vec{a} = (1, 0, 1)$ i $\vec{b} = (1, 2, -1)$ izračunati:
  1) $4\vec{a} + 2\vec{b} =$ **2)** $\vec{a} \cdot \vec{b} =$
  3) $\vec{a} \times \vec{b} =$ **4)** $|\vec{b}| =$

- Neka je p prava čija je jednačina $x - 2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{5}$. Napisati jedan vektor pravca prave p: $\vec{p} = (\quad , \quad , \quad)$, i koordinate jedne tačke prave p: $(\quad , \quad , \quad)$.

- Zaokružiti brojeve ispred uređenih n-torki koje su BAZE vektorskog prostora $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$:
  1) $\big((1,3,1,1),(2,4,7,0),(0,0,1,5)\big)$ **2)** $\big((5,1,1,1),(0,1,2,4),(0,0,3,1),(0,0,0,9)\big)$
  3) $\big((1,0,0,0),(0,2,0,0),(0,0,3,0),(0,0,6,0)\big)$ **4)** $\big((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(1,7,1,1)\big)$

- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Matrice linearnih transformacija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, 0)$ i $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (0, x - y - z)$ su:
  $M_f =$ $M_g =$

- Zaokružiti brojeve ispred uređenih n-torki koje su linearno nezavisne u vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$:
  1) $\big((2,3,6)\big)$ **2)** $\big((2,4,0),(3,3,0),(2,-1,1)\big)$ **3)** $\big((1,2,0),(-2,-4,0)\big)$
  4) $\big((0,0,2),(0,3,0),(9,0,0)\big)$ **5)** $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,5,0),(2,6,0)\big)$

- Zaokružiti brojeve ispred uređenih n-torki koje su GENERATORNE u vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$:
  1) $\big((2,2,2)\big)$ **2)** $\big((1,2,0),(5,5,0),(2,-1,1)\big)$ **3)** $\big((1,0,0),(5,5,5)\big)$ **4)** $\big((0,0,2),(0,1,0),(8,0,0)\big)$
  5) $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,5,0),(1,2,0)\big)$ **6)** $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,2,0),(1,2,0),(8,8,0)\big)$

- Za date vektore $a = (1, 3, -1, 1)$, $b = (0, -2, 0, 2)$, $c = (-1, -2, 1, -2)$, $d = (1, 0, 0, 0)$ napisati dimenzije sledećih lineala:
  1) $V = L(a, b)$, **dim** V=_____
  2) $V = L(a, b, c)$, **dim** V=_____
  3) $V = L(a, b, c, d)$, **dim** V=_____

- Za prave $m : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ i $n : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ važi: **a)** mimoilazne su $(m \cap n = \emptyset \wedge m \nparallel n)$ **b)** paralelne su i različite $(m \parallel n \wedge m \neq n)$ **c)** poklapaju se $(m = n)$ **d)** seku se $(m \cap n = \{M\})$

- Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$? **1)** $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$.

- Prava $p : x = y = z$ i prava $q : \frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$ leže u ravni α.
  Napisati jedan vektor normale ravni $\alpha : n = (\quad , \quad , \quad)$.

- Za datu linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ napisati odgovarajuću matricu i odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje je f izomorfizam: $f(x, y, z) = (x + y + z, 2y - z, (1 + a)z)$.

ZADACI Z2 (raditi u ispitnoj svesci)

1. Data je prava a, svojom jednačinom $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ i data je tačka M svojim vektorom položaja $\vec{r}_M$, pri čemu $M \notin a$.

   a) U zavisnosti od $\vec{r}_M, \vec{r}_A, \vec{a}$ odrediti ortogonalnu projekciju tačke M na pravu a.
   b) U zavisnosti od $\vec{r}_M, \vec{r}_A, \vec{a}$ odrediti vektore položaja tačaka P i Q koje pripadaju pravoj a, tako da MPQ bude jednakostranični trougao.

2. Dat je sistem linearnih jednačina S: $\quad -x - 2y + z - 3u = 0$

$$-2x - 3y + 2z + u = 0.$$

   a) Naći skup rešenja R_S datog sistema S.
   b) Zapisati skup R_S u obliku lineala i odrediti njegovu dimenziju i jednu bazu.

3. Neka je $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x + y = 0\}$ i $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x + 2z = 0\}$. Zapisati S i T u formi lineala i odrediti baze ovih potprostora. Potprostor $S \cap T$ zapisati u obliku lineala i odrediti jednu njegovu bazu.

4. Za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je poznato da je $f(1, 1) = (-1, 0)$ i $f(1, 0) = (1, 3)$.
   a) Izračunati $f(x, y)$ i matricu M linearne transformacije f.
   b) Odrediti rang linearne transformacije f.
   c) Ispitati da li postoji inverzna linearna transformacija f^{-1} i, ako postoji, napisati matricu inverzne transformacije.

5. Neka je prava a određena jednačinom $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$ i neka koordinatni početak O ne pripada pravoj a. U zavisnosti od vektora $\vec{r}_A$ i $\vec{a}$ izraziti vektore položaja temena P i Q jednakostraničnog trougla POQ ako je $\vec{r}_P || \vec{a}$ i tačka Q pripada pravoj a.

6. Dat je sistem jednačina $\mathcal{S}$:
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \ . \\ 3x & + & y & + & z & = & 0 \\ -2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

   a) Odrediti skup rešenja $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ sistema $\mathcal{S}$ i pokazati da je on potprostor vektorskog prostora $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

   b) Napisati jednu bazu prostora $\mathcal{R}_\mathcal{S}$, a zatim ovu bazu dopuniti do baze prostora $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

7. Za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je poznato da je $f(1, 2) = (1, 1, 0)$ i $f(1, 1) = (1, 0, 0)$.
   a)Izračunati $f(x, y)$ i matricu M linearne transformacije f.
   b)Odrediti rang linearne transformacije f.

8. Neka je $\vec{v} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (1, 1, 1)$. Neka je linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $f(\vec{v}) = \vec{v} - 3(\vec{a} \times \vec{v})$.

   a) Odrediti $f(x, y, z)$ i matricu M_f linearne transformacije f.

   b) Odrediti dimenziju prostora slika $f(\mathbb{R}^3)$.