# BULOVE ALGEBRE

Ljubo Nedović

6. mart 2019

## Sadržaj

# 1 Osnovni pojmovi

**Definicija 1** *Neka je B skup koji sadrži bar dva različita elementa* $0$ *i* $1$*, neka su* $+$ *i* $\cdot$ *binarne operacije skupa B, i neka je* $'$ *unarna operacija skupa B. Uređena šestorka* $(B,+,\cdot,',0,1)$ *je Bulova algebra ukoliko važe sledeće aksiome.*

(B1) ***komutativnost****:*

$\forall x,y \in B,\ x+y = y+x,$

$\forall x,y \in B,\ x\cdot y = y\cdot x,$

(B2) ***distributivnost****:*

$\forall x,y,z \in B,\ x+(y\cdot z) = (x+y)\cdot(x+z),$

$\forall x,y,z \in B,\ x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z),$

(B3) $0$ *i* $1$ *su* ***neutralni elementi*** *redom operacija* $+$ *i* $\cdot$*:*

$\forall x \in B,\ x+0 = x,$

$\forall x \in B,\ x\cdot 1 = x,$

(B4) ***komplementarnost****:*

$\forall x \in B,\ x+x' = 1,$

$\forall x \in B,\ x\cdot x' = 0.$

**Princip dualnosti**

Formule $F_1$ i $F_2$ su **dualne** ako se $F_2$ od $F_1$ može dobiti tako što se svako $+$ u $F_1$ zameni sa $\cdot$, svako $\cdot$ zameni sa $+$, svaka 0 zameni sa 1, i svako 1 zameni sa 0. Kako se u definiciji Bulove algebre aksiomame pojavljuju u dualnim parovima, sledi da za svaku teoremu u Bulovoj algebri automatski mora važiti i njoj dualna teorema, tj. teorema koja sadrži dualnu formulu.

**Teorema 1** *U svakoj Bulovoj algebri* $(B,+,\cdot,',0,1)$*, za sve* $x,y,z \in B$ *važe sledeća tvrđenja.*

(T1) ***Idempotentnost****:*

$x+x = x,$

$xx = x.$

(T2) ***Ograničenost****:*

$x+1 = 1,$

$x\cdot 0 = 0.$

(T3) ***Apsorbcija****:*

$x+xy = x,$

$x(x+y) = x.$

(T4) $x+x'y = x+y,$

$x(x'+y) = xy.$

(T5) ***Asocijativnost:***

$(x+y)+z = x+(y+z)$,

$(xy)z = x(yz)$.

(T6) *Za svako $a \in B$, sistem jednačina*

$a+t = 1 \ \wedge \ at = 0$

*ima jedinstveno rešenje po nepoznatoj $t \in B$.*

(T7) $0' = 1 \ \wedge \ 1' = 0$.

(T8) ***Involutornost:***

$x'' = x$.

(T9) ***De-Morganovi zakoni:***

$(x+y)' = x'y'$,

$(xy)' = x'+y'$.

**Primer 1** *Za proizvoljan skup $A \neq \emptyset$, uređena šestorka $\big(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \overline{\phantom{x}}, \emptyset, A\big)$ je Bulova algebra. Ako je $A$ konačan skup i $|A| = n$ za neko $n \in \mathbb{N}$, tada je $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.*

**Teorema 2** *Svaka konačna Bulova algebra $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ je izomorfna sa nekom Bulovom algebrom $\big(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \overline{\phantom{x}}, \emptyset, A\big)$ za neki skup $A$, i broj njenih elemenata je oblika $2^n$ za neko $n \in \mathbb{N}$.*

U Bulovoj algebri se definiše jedna specijalna relacija poretka koja je od velikog značaja, i u određenom smislu kompatibilna sa operacijama Bulove algebre.

**Definicija 2** *Neka je $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Bulova algebra.* ***Standarna poredak u Bulovoj algebri*** *je binarna relacija $\leq$ skupa $B$ definisana sa*

$$\forall x, y \in B, \ x \leq y \ \Leftrightarrow \ x+y = y.$$

**Teorema 3** *U Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$, relacija $\leq$ se može definisati i na neke od sledećih ekvivalentnih načina.*

(a) $\forall x, y \in B, \ x \leq y \ \Leftrightarrow \ xy = x$.

(b) $\forall x, y \in B, \ x \leq y \ \Leftrightarrow \ x'+y = 1$.

(c) $\forall x, y \in B, \ x \leq y \ \Leftrightarrow \ xy' = 0$.

**Teorema 4** *U Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$, relacija $\leq$ iz definicije 2 je relacija poretka, i za nju važe sledeće osobine.*

(a) *Element 0 je najmanji element Bulove algebre.*

(b) *Element 1 je najveći element Bulove algebre.*

(c) $\forall x, y \in B, \ \sup\{x, y\} = x+y$.

(d) $\forall x, y \in B, \ \inf\{x, y\} = xy$.

(e) $\forall x, y \in B, \ \sup\{x, x'\} = 1$.

(f) $\forall x, y \in B, \ \inf\{x, x'\} = 0$.

# 2 Bulove mreže

## 2.1 Parcijalno uređen skup i mreža

Neka je $\leq$ relacija poretka skupa $S \neq \emptyset$, tj. binarna relacija skupa $S$ koja ima sledeće osobine:

(R) **refleksivnost**: $\forall x \in S,\ x \leq x$,

(A) **antisimetričnost**: $\forall x, y \in S,\ (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$,

(T) **tranzitivnost**: $\forall x, y, z \in S,\ (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

Uređeni par $(S, \leq)$ se tada naziva *parcijalno uređen skup*, a relacija $\leq$ je *poredak* na skupu $S$. U odnosu na poredak $\leq$ skupa $S$, definišu se sledeći važni pojmovi.

(a.1) Element $a \in S$ je **najveći element** u $(S, \leq)$ ako

$$\forall x \in S,\ x \leq a.$$

Ako postoji, najveći element u $(S, \leq)$ je jedinstven.

(a.2) Element $a \in S$ je **maksimalan element** u $(S, \leq)$ ako

$$\neg \exists x \in S,\ a \leq x \wedge x \neq a.$$

Maksimalnih elemenata u u $(S, \leq)$ može biti $0, 1, 2, \ldots$. Ako u konačnom skupu $S$ postoji tačno jedan maksimalan element, tada on mora biti i najveći element.

(b.1) Element $a \in S$ je **najmanji element** u $(S, \leq)$ ako

$$\forall x \in S,\ a \leq x.$$

Ako postoji, najmanji element u $(S, \leq)$ je jedinstven.

(b.2) Element $a \in S$ je **minimalan element** u $(S, \leq)$ ako

$$\neg \exists x \in S,\ x \leq a \wedge x \neq a.$$

Minimalnih elemenata u u $(S, \leq)$ može biti $0, 1, 2, \ldots$. Ako u konačnom skupu $S$ postoji tačno jedan minimalan element, tada on mora biti i najmanji element.

U parcijalno uređenenom skupu se definišu sledeći važni pojmovi

**Definicija 3** *Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup. Neka je $\neq\subseteq A \subseteq S$.*

(a) ***Gornje ograničenje skupa**: element $g \in S$ je gornje ograničenje skupa $A$ ako je*

$$\forall x \in A,\ \ x \leq g.$$

(b) ***Donje ograničenje skupa**: element $g \in S$ je donje ograničenje skupa $A$ ako je*

$$\forall x \in A,\ \ g \leq x.$$

Gornje i donje ograničenje skupa može a ne mora da postoji, može ih biti više, i može a ne mora pripadati skupu $A$. Označimo redom sa $\mathcal{G}(A)$ i $\mathcal{D}(A)$ skup gornjih ograničenja skupa $A$. Pri tome je npr. $\mathcal{G}(A) \subseteq A$, i $\mathcal{G}(A) = \emptyset$ ako ne postoji ni jedno gornje ograničenje skupa $A$. Ukoliko je $\mathcal{G}(A) \neq \emptyset$, tada može a ne mora postojati najmanji element $\overline{g} \in \mathcal{G}(A)$ skupa $\mathcal{G}(A)$. Analogno važi za donja ograničenja skupa $A$, tj. može a ne mora da postoji najveće donje ograničenje $\underline{g} \in \mathcal{D}(A)$ skupa $\mathcal{D}(A)$.

**Definicija 4** *Neka je $(S,\leq)$ parcijalno uređen skup. Neka je $\mathcal{G}(A)$ skup svih gornjih, a $\mathcal{D}(A)$ skup svih donjih ograničenja skupa $A$.*

(a) *Ako je $\mathcal{G}(A) \neq \emptyset$ i ako postoji najmanji element $\overline{g} \in \mathcal{G}(A)$ skupa $\mathcal{G}(A)$, tada se $\overline{g}$ naziva **supremum skupa** $A$, i pišemo $\overline{g} = \sup A$.*

(b) *Ako je $\mathcal{D}(A) \neq \emptyset$ i ako postoji najveći element $\underline{g} \in \mathcal{D}(A)$ skupa $\mathcal{D}(A)$, tada se $\underline{g}$ naziva **infimum skupa** $A$, i pišemo $\overline{g} = \inf A$.*

Dakle,

(a) $\overline{g} = \sup A \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \leq \overline{g} \;\wedge\; \forall g \in A,\, \forall a \in A,\, a \leq g \;\Rightarrow\; \overline{g} \leq g.$

(b) $\underline{g} = \inf A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \overline{g} \leq a \;\wedge\; \forall g \in A,\, \forall a \in A,\, g \leq a \;\Rightarrow\; g \leq \underline{g}.$

**Definicija 5** *Parcijalno uređen skup $(S,\leq)$ je **mreža** ako za svaki dvoelementni skup $\{a,b\} \subseteq L$ postoje $\sup\{a,b\}$ i $\inf\{a,b\}$. Mreža $(S,\leq)$ je **kompletna** ako za svaku skup $A \subseteq L$ postoje $\sup A$ i $\inf A$.*

Induktivno zaključujemo da u mreži, za svaki konačan skup $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$ postoje $\sup A$ i $\inf A$. Uobičajen je i zapis $a \vee b = \sup\{a,b\}$ i $a \wedge b = \inf\{a,b\}$, kao i $\bigvee A = \sup A$ i $\bigwedge A = \inf A$. Dakle, nadalje je

$$a \vee b = \sup\{a,b\}, \qquad a \wedge b = \inf\{a,b\}.$$

**Definicija 6** *Mreža $(S,\leq)$ je **distributivna** ukoliko za sve $a,b,c \in S$ važi distributivnost $\wedge$ prema $\vee$:*

$$a \wedge (b \vee z) = (a \wedge b) \vee (a \wedge z),$$

*i distributivnost $\vee$ prema $\wedge$:*

$$a \vee (b \wedge z) = (a \vee b) \wedge (a \vee z).$$

**Definicija 7** *Mreža $(S,\leq)$ je **ograničena** ako postoje fiksni elementi $0,1 \in S$ takvi da je $0 \leq a \leq 1$ za sve $a \in S$. Pri tome je $0$ **najmanji** a $1$ **najveći** element mreže $(S,\leq)$.*

**Definicija 8** *Ograničena mreža $(S,\leq)$ sa najmanjim elementom $0$ i najvećim elementom $1$ je **komplementarna** ako za svaki element $a \in S$ postoji **komplement** $a' \in S$ takav da je*

$$a \vee a' = 1, \qquad a \wedge a' = 0,$$

*pri čemu se tada $a'$ naziva **komplement** elementa $a \in S$.*

**Teorema 5** *U distributivnoj mreži $(S,\leq)$, komplement $x' \in S$ elementa $x \in S$, ako postoji, je jedinstven.*

## 2.2 Bulova mreža i Bulova algebra

**Definicija 9** ***Bulova mreža** je komplementarna distributivna mreža sa bar dva elementa.*

Dakle,

(a) u svakoj Bulovoj mreži $(S, \leq)$, za svaka dva elementa $a, b \in S$ postoje $\sup\{a, b\}$ i $\inf\{a, b\}$, te su sa

$a + b = \sup\{a, b\}, \qquad ab = \inf\{a, b\}$

definisane dve binarne operacije $+ : S^2 \to S$ i $\cdot : S^2 \to S$ skupa $S$,

(b) na osnovu teoreme 5, sledi da je $' : S \to S$ unarna operacija skupa $S$,

(c) postoje različiti najmanji 0 i najveći element 1 u skupu $S$.

**Teorema 6** *Ako je $(S, \leq)$ Bulova mreža, tada je $(S, +, \cdot, ', 0, 1)$ Bulova algebra, gde su $+$, $\cdot$, $'$, 0 i 1 gore navedene i definisane operacije i konstante. Pri tome, standardna relacija poretka Bulove algebre je upravo relacija poretka $\leq$ Bulove mreže $(S, \leq)$.*

# Literatura

[1] R. Doroslovački, *Principi algebre opšte, diskretne i linearne*, FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2015.

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Distributive_lattice`

[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/Boolean_ring`

[4] `https://proofwiki.org/wiki/Definition:Boolean_Lattice`

[5] `https://proofwiki.org/wiki/Definition:Lattice`

[6] `https://proofwiki.org/wiki/Definition:Distributive_Lattice`

[7] `https://proofwiki.org/wiki/Definition:Complemented_Lattice`

[8] `https://en.wikipedia.org/wiki/Lattice_(order)`