RELACIJE

26. septembar 2022

Pojmovi skupa i relacija, kao i operacija sa skupovima i relacijama su definisani pomoću logičkih iskaza i logičkih operacija. Sledi pregled definicija osnovnih logičkih operacija.

Negacija: $\begin{array}{c\|c} \rceil & \\ \hline \bot & \top \\ \top & \bot \end{array}$	***Konjunkcija***: $\begin{array}{c\|cc} \wedge & \bot & \top \\ \hline \bot & \bot & \bot \\ \top & \bot & \top \end{array}$	***Disjunkcija***: $\begin{array}{c\|cc} \vee & \bot & \top \\ \hline \bot & \bot & \top \\ \top & \top & \top \end{array}$
Ekskluzivna (isključna) disjunkcija: $\begin{array}{c\|cc} \veebar & \bot & \top \\ \hline \bot & \bot & \top \\ \top & \top & \bot \end{array}$	***Implikacija***: $\begin{array}{c\|cc} \Rightarrow & \bot & \top \\ \hline \bot & \top & \top \\ \top & \bot & \top \end{array}$	***Ekvivalencija***: $\begin{array}{c\|cc} \Leftrightarrow & \bot & \top \\ \hline \bot & \top & \bot \\ \top & \bot & \top \end{array}$

Uočimo da je implikacija netačna samo ako je prvi operand (premisa) $\top$ a drugi (zaključak) $\bot$. U svim ostalim slučajevima je implikacija tačna. Na primer, implikacija $1+1=3 \Rightarrow 1+1=4$ je tačna.

Za iskazivanje raznih tvrđenja nam nisu dovoljne samo logičke operacije, već se moramo služiti i ***kvantifikatorima*** $\exists$ (čitamo „postoji”) i $\forall$ (čitamo „svaki”). Na primer, iskaz $\forall x,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2+1 \neq 0$ se ne može zapisati bez kvantifikatora.

Ukoliko ispred iskaza koji sadrži neku promenljivu x ne stoji ni jedan kvantifikator, tada ispred iskaza podrazumevamo $\forall x$. Na primer, ukoliko razmatramo neke osobine skupa realnih brojeva, tada umesto $\forall x,\ x^2+1 \neq 0$ skraćeno pišemo $x^2+1 \neq 0$.

Pojam ***skupa*** se u matematici formalno definiše na vrlo složen način. Mi ćemo usvojiti intuitivno poimanje skupa kao neke „kolekcije” objekata u najširem smislu reči. Pri tome se, u odnosu na oblast kojojm se bavimo, opredeljujemo za određeni ***univerzalni*** skup u okviru kojeg su svi objekti od interesa, te su svi ostali skupovi kolekcije nekih objekata iz univerzalnog skupa. Neka je nadalje X pomenuti univerzalni skup. Skupovne relacije i definicije definišemo pomoću odgovarajućih logičkih operacija.

➢ ***Unija*** skupova:

$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}.$

➢ ***Presek*** skupova:

$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$

➢ Skupovni ***komplement*** (u odnosu na univerzalni skup X):

$\overline{A} \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid x \notin A\}.$

➢ ***Razlika*** skupova:

$A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}.$

➢ ***Simetrična razlika*** skupova:

$A \triangle B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \veebar \ x \in B\}.$

➤ ***Jednakost*** skupova:

$A = B$ akko $\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B.$

➤ Skupovna ***inkluzija*** (relacija „biti podskup"):

$A \subseteq B$ akko $\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B.$

☞ Uvek vodimo računa o tome u odnosu na koji referentni skup posmatramo operaciju skupovnog komplementa. Na primer, u odnosu na referentni skup $X = \mathbb{R}$ je $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{I}$, dok u odnosu na referentni skup $X = \mathbb{C}$ imamo da je $\overline{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{C} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$ skup svih kompleksnih brojeva koji nisu realni racionalni brojevi.

Slede definicije još nekih osnovnih pojmova tesno povezanih sa pojmom skupa.

➥ ***Partitivni skup*** skupa X je skup svih podskupova skupa X:

$\mathcal{P}(X) \overset{\text{def}}{=} \{A \mid A \subseteq X\}.$

➥ ***Dekartov proizvod*** dva skupa A i B:

$A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$

Specijalno, u slučaju $A = B$ koristimo oznaku $A^2 \overset{\text{def}}{=} A \times A$.

Dekartov proizvod $n \in \mathbb{N}$ skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \overset{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \ \wedge \ a_2 \in A_2 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ a_n \in A_n\}.$

U slučaju $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ koristimo oznaku $A^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ puta}}$.

Relacije se matematički definišu kao skupovi uređenih n-orki. U najopštijem slučaju, za neke skupove $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ***n-arna relacija*** je definisana kao

$\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n,$

dakle, skup nekih uređenih n-torki sa komponentama iz odgovarajućih skupova. U slučaju $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ govorimo o ***n-arnoj relaciji skupa*** A, dakle $\rho \subseteq A^n$. Nama se od najvećeg interesa binarne relacije skupa A.

Definicija 1 *ρ je* ***binarna relaciji skupa*** *A ako je $\rho \subseteq A^2$. Pri tome se $\emptyset \subseteq A^2$ naziva* ***prazna relacija****, a $A^2 \subseteq A^2$ naziva* ***puna relacija****.* ◃

✎ Ako je ρ binarna relaciji skupa A, tada za $x, y \in A$ iskaz $(x, y) \in \rho$ čitamo „x je u relaciji sa y”.

☞ Redosled elemenata u uređenom paru je bitan, te $(x, y) \in \rho$ nije isto što i $(y, x) \in \rho$.

✎ Za mnoge matematičke relacije je uobičajeno da se iskaz $(x, y) \in \rho$ zapisuje sa $x\rho y$. Na primer, da je broj 5 manji od broja 8 zapisujemo sa $5 < 8$ a ne sa $(5, 8) \in <$. Takođe, da je prava a paralelna sa pravom b pišemo $a \parallel b$ a ne $(a, b) \in \parallel$. Da je skup A podskup skupa B pišemo $A \subseteq B$ a ne $(A, B) \in \subseteq$.

Neki načini definisanja i predstavljanja binarnih relacija

Za određene tipove skupa A, određene tipove elemenata skupa A, kao i određene tipove relacija mogu biti pogodni različiti načini definisanja i opisnog predstavljanja. U sledećim primerima se navode neki od njih.

Primer 1 *Neka je npr. $A = \{a, b, c, d\}$. U ovakvom slučaju, kada je A konačan skup, relaciju možemo definisati (zadati) nabrajanjem njenih elemenata, tj. uređenih parova elemenata skupa A koji su u relaciji. Na primer,*

$\rho_1 = \{(a,a),(b,b),(d,d),(a,b),(a,c),(c,a),(c,d)\}$,

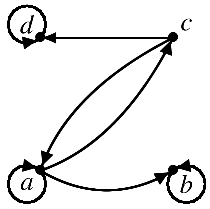
$\rho_2 = \{(a,a),(b,b),(d,d)\}$,

$\rho_3 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,c),(a,c)\}$,

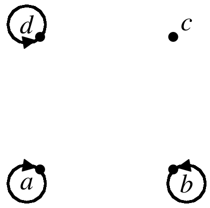
su binarne relacije skupa A. ✔

Primer 2 *U slučaju konačnog skupa A, relaciju $\rho \subseteq A^2$ možemo zadati tj. definisati „grafovski”. Elemente skupa A crtamo kao „tačke”, a da je element $x \in A$ u relaciji sa elementom $y \in A$, dakle $(x, y) \in A^2$ predstavljamo kao strelicu koja počinje u tački x i završava se u tački y. Pri tome, $(x, x) \in A^2$ crtamo kao petlju kod čvora x. Na primer, relacije ρ_1, ρ_2 i ρ_3 iz primera* 1 *bismo grafovski predstavili na način prikazan na slikama* 1, 2 *i* 3. *Kao što ćemo videti, neke značajne osobine relacije se mogu lako uočiti vizualno sa grafovske prezentacije relacije.* ✔

Primer 3 *U slučaju konačnog skupa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, relaciju $\rho \subseteq A^2$ možemo zadati, tj. definisati, tj. opisati „matricom pripadnosti” M_ρ. U kvadratnoj matrici pripadnosti $M_\rho = \left[m_{i,j}\right]_{n\times n}$ svakom elementu skupa A pridružujemo jednu vrstu matrice i istim redom jednu kolonu matrice, tj. ako elementu $x_i \in A$ pridružujemo i-tu vrstu, tada tom*



Slika 1: Relacija ρ_1 iz primera 1.

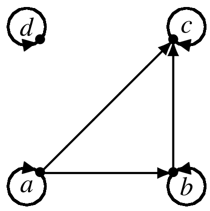


Slika 2: Relacija ρ_2 iz primera 1.

elementu $x_i \in A$ pridružujemo takođe i i-tu kolonu. Elementi matrice $M_\rho = \left[m_{i,j}\right]_{n\times n}$ se zatim definišu na sledeći način:

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \quad x_i \rho x_j \\ 0 & , \quad \neg x_i \rho x_j \end{cases} \qquad i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dakle, vrednost 1 u i-toj vrsti i j-toj koloni matrice M_ρ predstavlja indikator da element x_i jeste u relaciji sa elementom x_j, a vrednost 0 u i-toj vrsti i j-toj koloni matrice M_ρ predstavlja indikator da element x_i nije u relaciji sa elementom x_j. Na primer, relacije ρ_1, ρ_2 i ρ_3 iz primera 1 bismo matricom pripadnosti predstavili na sledeći način, gde redom prva vrsta i kolona matrice odgovaraju elementu a, druga vrsta i kolona matrice odgovaraju elementu b, treća vrsta i kolona matrice odgovaraju elementu c, i četvrta vrsta i kolona matrice odgovaraju elementu d:



Slika 3: Relacija ρ_3 iz primera 1.

$$M_{\rho_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{\rho_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{\rho_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kao što ćemo videti, neke značajne osobine relacije se mogu lako uočiti vizualno sa matrične prezentacije relacije. Takođe, matrična reprezentacija relacije je pogodna za zapis u računarskoj memoriji, kao i za efikasno ispitivanje osobina relacije putem računarskih algoritama. ✔

Primer 4 *Na proizvoljnom skupu A, binarna relacija ρ može biti definisana koristeći prethodno definisane relacije i operacije na elementima skupa A. Sledi nekoliko primera ovako definisanih relacija.*

(a) *Neka je A skup svih „računarskih stringova", i neka je binarna relacija ρ skupa A definisana sa*

$\forall s_1, s_2 \in A, \quad s_1 \rho s_2 \;\Leftrightarrow\; \mathsf{ACounter}(s_1) \leq \mathsf{ACounter}(s_2),$

gde je $\mathsf{ACounter}(s)$ *računarska funkcija (podprogram) koja kao pezultat vraća broj pojavljivanja karaktera* A *u stringu s.*

(b) *Neka je* $\mathcal{P}$ *skup svih pravih u prostoru, i neka je* $\rho \subseteq \mathcal{A}^2$ *binarna relacija skupa* $\mathcal{P}$ *definisana sa*

$\forall p, q \in \mathcal{P}, \quad p\rho q \;\Leftrightarrow\; (p \neq q \wedge p \cap q \neq \emptyset),$

gde je u skupu tačaka u prostoru na odgovarajući način prethodno definisan pojam prave u prostoru, a relacija jednakosti skupova i operacija preseka skupova su definisani u teoriji skupova. Binarnu relaciju skupa $\mathcal{P}$ *možemo interpretirati na sledeći način: prava p je u relaciji ρ sa pravom q ako i samo ako prava p ima tačno jednu zajedničku tačku sa pravom q.*

(c) *Neka je* $\mathcal{L}$ *skup svih živih ljudi, i neka* $\rho \subseteq \mathcal{L}^2$ *binarna relacija skupa* $\mathcal{L}$ *definisana sa*

$\forall p, q \in \mathcal{L}, \quad p\rho q \;\Leftrightarrow\;$ *osoba p je istog pola kao osoba q,*

ge je na odgovarajući način jednoznačno definisana „polnost" nekog elementa skupa ljudu $\mathcal{L}$.

(d) *Neka je na skupu realnih brojeva* $\mathbb{R}$ *binarna relacija ρ definisana sa*

$\rho = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \cdot y \geq 0 \wedge y \in [x-1, x+2] \right\},$

gde su prethodno definisani množenje realnih brojeva, relacije ≤ i ≥ na skupu realnih brojeva, kao i pojam intervala realnih brojeva. Pri tome je

$y \in [x-1, x+2] \;\Leftrightarrow\; (x-1 \leq y \wedge y \leq x+2).$

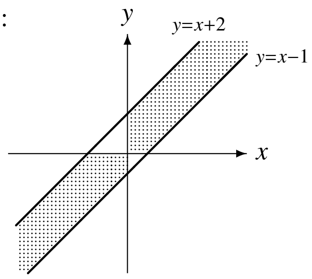
Ovako definisane relacije na $\mathbb{R}^2$ *možemo u nekim slučajevima i jednostavno grafički predstaviti u realnoj ravni senčenjem oblasti tačaka* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *koje pripadaju relaciji. Ovakva grafička prezentacija prethodno navedene relacije ρ je prikazana na slici* 4, *gde se zasenčena oblast dobija u preseku sledećih oblasti:*

(1) $S_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \cdot y \geq 0\right\}$, *a to je unija prvog i trećeg kvadranta, uključujući x i y osu,*

(2) $S_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - 1 \leq y\right\}$, *a to je gornja poluravan u odnosu na pravu* $y = x - 1$, *uključujući i samu pravu* $y = x - 1$,

(3) $S_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \leq x + 2\right\}$, *a to je gornja poluravan u odnosu na pravu* $y = x + 2$, *uključujući i samu pravu* $y = x + 2$.

. *Kao što ćemo videti, neke značajne osobine ovako grafički predstavljene rela-*



Slika 4: Relacija ρ iz primera 4 pod (d).

cije se mogu vuzualno uočiti. ✔

Neke važne osobine binarnih relacija skupa

Od raznih osobina koje neka relacija može da ima, izdvajaju se sledeće najvažnije.

Definicija 2 *Neka je ρ binarna relacija skupa A.*

(R) *Relacija ρ je* **refleksivna***, što označavamo sa* (R)*, ako važi*

$\forall x \in A, \quad x\rho x.$

(S) *Relacija ρ je* **simetrična***, što označavamo sa* (S)*, ako važi*

$\forall x, y \in A, \quad x\rho y \;\Rightarrow\; y\rho x.$

(A) *Relacija ρ je* **antisimetrična***, što označavamo sa* (A)*, ako važi*

$\forall x, y \in A, \quad (x\rho y \,\wedge\, y\rho x) \;\Rightarrow\; x = y.$

(T) *Relacija ρ je* **tranzitivna***, što označavamo sa* (T)*, ako važi*

$\forall x, y, z \in A, \quad (x\rho y \,\wedge\, y\rho z) \;\Rightarrow\; x\rho z.$

◁

Simetričnost i antisimetričnost nisu uzajamno komplementarne osobine, što bi nam se moglo učiniti na osnovu naziva ovih osobina. Kao što ćemo videti na primerima, postoje relacije koje imaju obe navedene osobine, kao i relacije koje nemaju ni jednu od te dve osobine.

☞ Navedene osobine je u načelu najlakše ispitivati tako što na neki sistematski način ispitujemo da li postoji ijedna „smetnja" za razmatranu osobinu. Ako pri sistematskom ispitivanju utvrdimo da ne postoji ni jedna takva „smetnja", tada zaključujemo da relacija ima razmatranu osobinu, a ako pronađemo bar jednu takvu „smetnju", tada zaključujemo da relacija nema razmatranu osobinu.

Pri ispitivanju ovih osobina neke relacije, mogu biti pogodne i neke druge ekvivalentne definicije ili interpretacije tih osobina. Takođe, ako je relacija definisana

(n) nabrajanjem njenih elemenata kao u primeru 1,

(g) ili grafovski kao u primeru 2,

(m) ili matricom pripadnosti kao u primeru 3,

(s) ili senčenjem odgovarajuće oblastu u $\mathbb{R}^2$ kao u primeru 4 pod (d),

pri ispitivanju osobina relacije možemo koristiti još neke odgovarajuće kriterijume.

(R) Relacija ρ je refleksivna ako i samo ako

$\neg\exists x \in A, \quad \neg x\rho x.$

- (n) Kada je relacija ρ definisana na konačnom skupu $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ navođenjem uređenih parova kao u primeru 1, tada kod refleksivne relacije ρ u skupu navedenih parova ne sme da nedostaje ni jedan od parova (x_i, x_i), $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- (g) Kada je relacija ρ definisana na konačnom skupu $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i zadana grafom kao u primeru 2, svaki čvor $x_i \in A$ grafa mora da ima „petlju".
- (m) Kada je relacija ρ definisana na konačnom skupu $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i zadana matricom pripadnosti $M_\rho = \left[m_{i,j}\right]_{n\times n}$ kao u primeru 3, svi elementi na glavnoj dijagonali matrice moraju imati vrednost 1. Na računaru je lako iskodirati proveru refleksivnosti, npr.

```
FOR i=1 TO n
   IF m(i,i)=0
     THEN Print("nije refleksivna"); Break;
   ENDIF
ENDFOR
Print("jeste refleksivna");
```

- (s) Kada je relacija ρ zadana na skupu $\mathbb{R}$ i predstavljena grafički - senčenjem odgovarajuće oblastu u $\mathbb{R}^2$ kao u primeru 4 pod (d), tada zasenčenoj oblasti (grafiku) moraju pripadati sve tačke (x, y) kod kojih je $y = x$, dakle cela prava $y = x$ mora da leži u grafiku relacije.

(S) Relacija ρ je simetrična ako i samo ako

$\forall x, y \in A, \quad x \neq y \Rightarrow \neg(x\rho y \wedge \neg y\rho x).$

(n) Kada je relacija ρ definisana na konačnom skupu $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ navođenjem uređenih parova kao u primeru 1, u skupu navedenih parova ne smeju da postoje $x_i \neq x_j$ takvi da jeste $x_i \rho x_j$ a nije $x_j \rho x_i$.

(g) Kada je relacija ρ definisana na konačnom skupu $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i zadana grafom kao u primeru 2, ne smeju da postoje različiti čvorovi $x_i \in A$ i $x_j \in A$ koji su povezani samo sa jednom od strelica $x_i \longrightarrow x_j$ i $x_i \longleftarrow x_j$. Dakle, između svaka dva različita čvora mogu da postoje ili obe ili ni jedna od strelica $x_i \longrightarrow x_j$ i $x_i \longleftarrow x_j$.

(m) Kada je relacija ρ definisana na konačnom skupu $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i zadana matricom pripadnosti $M_\rho = \left[m_{i,j}\right]_{n \times n}$ kao u primeru 3, tada se za $x_i \neq x_j$ elementi $m_{i,j}$ i $m_{j,i}$ (koji vrednostima 0 ili 1 „signaliziraju" da nije ili jeste $x_i \rho x_j$, odnosno nije ili jeste $x_j \rho x_i$) u matrici nalaze na simetričnim pozicijama u odnosu na glavnu dijagonalu. Kako kod simetrične relacije za različite $x_i, x_j \in A$ ne sme biti da jeste $x_i \rho x_j$ a nije $x_j \rho x_i$, to znači da u matrici M_ρ ni na koje dve simetrične pozicije ne smeju biti različite vrednosti. Na računaru je lako iskodirati proveru simetričnosti, npr.

```
FOR i=1 TO n
   FOR j=i+1 TO n
     IF m(i,j) NEQ m(j,i)
       THEN Print("nije simetrična"); Break;
     ENDIF
   ENDFOR
ENDFOR
Print("jeste simetrična");
```

(s) Kada je relacija ρ zadana na skupu $\mathbb{R}$ i predstavljena grafički - senčenjem odgovarajuće oblastu u $\mathbb{R}^2$ kao u primeru 4 pod (d), tada za $x \neq y$ uređenim parovima (x, y) i (y, x) odgovaraju u ravni tačke koje su simetrične u odnosu na pravu $y = x$. Kako kod simetrične relacije za $x \neq y$ ne sme biti da jeste $x\rho y$ a nije $y\rho x$, to znači da kod simetrične relacije na grafiku ne smeju da postoje dve tačke koje su na simetričnim pozicijama u odnosu na pravu $y = x$, a od kojih tačno jedna (a druga ne) pripada grafiku.

(A) Relacija ρ je antisimetrična ako i samo ako

$\forall x, y \in A, \quad x \neq y \Rightarrow \neg(x\rho y \wedge y\rho x).$

(n) Kada je relacija ρ definisana na konačnom skupu $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ navođenjem uređenih parova kao u primeru 1, u skupu navedenih parova kod antisimetrične relacije ρ ne smeju da postoje $x_i \neq x_j$ takvi da je i $x_i \rho x_j$ i $x_j \rho x_i$.

(g) Kada je relacija ρ definisana na konačnom skupu $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i zadana grafom kao u primeru 2, tada kod antisimetrične relacije ρ ne smeju da postoje različiti čvorovi $x_i \in A$ i $x_j \in A$ koji su povezani sa obe strelice $x_i \to x_j$ i $x_i \leftarrow x_j$.

(m) Kada je relacija ρ definisana na konačnom skupu $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i zadana matricom pripadnosti $M_\rho = \left[m_{i,j}\right]_{n \times n}$ kao u primeru 3, tada se za $x_i \neq x_j$ elementi $m_{i,j}$ i $m_{j,i}$ (koji vrednostima 0 ili 1 „signaliziraju" da nije ili jeste $x_i \rho x_j$, odnosno nije ili jeste $x_j \rho x_i$) u matrici nalaze na simetričnim pozicijama u odnosu na glavnu dijagonalu. Kako kod antisimetrične relacije za različite $x_i, x_j \in A$ ne sme biti i $x_i \rho x_j$ i $x_j \rho x_i$, to znači da u matrici M_ρ ni na koje dve simetrične pozicije ne smeju biti 1-ice na obema pozicijama. Na računaru je lako iskodirati proveru antisimetričnosti, npr.

```
FOR i=1 TO n
   FOR j=i+1 TO n
     IF m(i,j)=1 AND m(j,i)=1
       THEN Print("nije antisimetrična"); Break;
     ENDIF
   ENDFOR
ENDFOR
Print("jeste antisimetrična");
```

(s) Kada je relacija ρ zadana na skupu $\mathbb{R}$ i predstavljena grafički - senčenjem odgovarajuće oblastu u $\mathbb{R}^2$ kao u primeru 4 pod (d), tada za $x \neq y$ uređenim parovima (x, y) i (y, x) odgovaraju u ravni tačke koje su simetrične u odnosu na pravu $y = x$. Kako kod antisimetrične relacije za $x \neq y$ ne sme biti i $x \rho y$ i $y \rho x$, to znači da kod antisimetrične relacije na grafiku ne smeju da postoje dve tačke koje su na simetričnim pozicijama u odnosu na pravu $y = x$, a koje obe pripadaju grafiku.

(T) Relacija ρ je tranzitivna, što označavamo sa (T), ako važi

$$\forall x, y, z \in A, \quad \neg(x\rho y \ \wedge \ y\rho z \ \wedge \ \neg x\rho z).$$

U pogledu tranzitivnosti relacije ρ, vizualni opisi i kriterijumi tranzitivnosti relacija zadanih na neki od načina navedenih u primerima 1, 2, 3, i 4 nisu jednostavni kao kriterijumi i opisi osobina (R), (S) i (A).

(n) Kada je relacija ρ definisana na konačnom skupu $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ navođenjem uređenih parova kao u primeru 1, u skupu navedenih parova kod tranzitivne relacije ρ ne smeju da postoje različiti elementi x_i, x_j i x_k takvi da jeste $x_i \rho x_j$ i $x_j \rho x_k$, a nije $x_i \rho x_k$.

(g) Kada je relacija ρ definisana na konačnom skupu $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i zadana grafom kao u primeru 2, tada kod tranzitivne relacije ρ ne smeju da postoje različiti čvorovi x_i, x_j i x_k takvi da postoje strelice $x_i \to x_j$ i $x_j \to x_k$, a pri tome ne postoji strelica $x_i \to x_k$. Govornim jezikom osobinu tranzitivnosti možemo interpretirati i na sledeći način: ako su različiti čvorovi x_i i x_k povezani indirektno preko čvora x_j, tada čvorovi x_i i x_k moraju biti i direktno povezani.

(m) Kada je relacija ρ definisana na konačnom skupu $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i zadana matricom pripadnosti $M_\rho = \left[m_{i,j}\right]_{n \times n}$ kao u primeru 3, nemoguće je formulisati neki jednostavan (vizualan) kriterijum za proveru tranzitivnosti relacije ρ na osnovu elemenata matrice, tj. na osnovu rasporeda 0-la i 1-ica u matrici. Ipak, na računaru je metodom „brut-force” lako iskodirati podprogram za proveru tranzitivnosti, npr.

```
FOR i=1 TO n
   FOR j=1 TO n
     FOR k=1 TO n
       IF m(i,j)=1 AND m(j,k)=1 AND m(i,k)=0
         THEN Print("nije tranzitivna"); Break;
       ENDIF
     ENDFOR
   ENDFOR
ENDFOR
Print("jeste tranzitivna");
```

(s) Kada je relacija ρ zadana na skupu $\mathbb{R}$ i predstavljena grafički - senčenjem odgovarajuće oblastu u $\mathbb{R}^2$ kao u primeru 4 pod (d), nemoguće je formirati jednostavan vizualan kriterijum za proveru tranzitivnosti kao kod osobina (R), (S) i (A).

Ilustracija prethodno navedenih kriterijuma (n), (g), (m) i (n) sledi u sledećim primerima.

Primer 5 *Ispitajmo osobine relacija iz primera* 1*, gde je* $A = \{a,b,c,d\}$ *i relacije su definisane sa*

$\rho_1 = \{(a,a),(b,b),(d,d),(a,b),(a,c),(c,a),(c,d)\}$,

$\rho_2 = \{(a,a),(b,b),(d,d)\}$,

$\rho_3 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,c),(a,c)\}$.

(R) (1) *Relacija* ρ_1 *nije refleksivna jer nije* $c\rho_1 c$*. Na grafu relacije* ρ_1 *sa slike* 1 *se to vidi po tome što čvor c nema petlju. U matrici pripadnosti* M_{ρ_1} *relacije* ρ_1 *iz primera* 3 *se to vidi po tome što je* $m_{3,3} = 0$ *(treći element na glavnoj dijagonali).*

(2) *Relacija* ρ_2 *nije refleksivna jer takođe nije* $c\rho_2 c$*, na njenom grafu sa slike* 2 *čvor c takođe nema petlju, i u njenoj matrici pripadnosti* M_{ρ_2} *iz primera* 3 *je takođe* $m_{3,3} = 0$.

(3) *Relacija* ρ_3 *jeste refleksivna jer* $(a,a),(b,b),(c,c),(d,d) \in \rho_3$*, na njenom grafu sa slike* 3 *svaki čvor ima petlju, i u njenoj matrici pripadnosti* M_{ρ_3} *iz primera* 3 *je svaki element na glavnoj dijagonali jednak* 1*-ici.*

(S) (1) *Relacija* ρ_1 *nije simetrična jer npr. jeste* $a\rho_1 b$ *a nije* $b\rho_1 a$*. Na grafu relacije* ρ_1 *sa slike* 1 *se to vidi po tome što postoji strelica od a ka b, a ne postoji strelica od b ka a. U matrici pripadnosti* M_{ρ_1} *relacije* ρ_1 *iz primera* 3 *se to vidi po tome što se na simetričnim (u odnosu na glavnu dijagonalu) pozicijama* $(1,2)$ *i* $(2,1)$ *nalaze različiti elementi.*

(2) *Relacija* ρ_2 *jeste simetrična iz istih razloga kao i relacija* ρ_1.

(3) *Relacija ρ_3 nije simetrična jer je npr. $a\rho_3 b$, a pri tome nije $b\rho_3 a$. Na grafu relacije ρ_3 sa slike 3 se to vidi npr. po tome što su čvorovi a i b povezani samo strelicom $a \to b$, a ne i $a \leftarrow b$. U matrici pripadnosti M_{ρ_3} relacije ρ_3 iz primera 3 se to vidi npr. po tome što je $m_{1,2} = 1$ i $m_{2,1} = 0$ (elementi na simetričnim pozicijama u odnosu na glavnu dijagonalu matrice).*

(A) (1) *Relacija ρ_1 nije antisimetrična jer je $a\rho_1 c$ i $c\rho_1 a$. Na grafu relacije ρ_1 sa slike 1 se to vidi po tome što su čvorovi a i c povezani sa obe strelice. U matrici pripadnosti M_{ρ_1} relacije ρ_1 iz primera 3 se to vidi po tome što je $m_{1,3} = m_{3,1} = 1$, tj. na pozicijama $(1,3)$ i $(3,1)$ koje su simetrične u odnosu na glavnu dijagonalu se nalaze dve 1-ice.*

(2) *Relacija ρ_2 jeste antisimetrična jer ne postoje različiti x i y takvi da je i $x\rho_2 y$ i $y\rho_2 x$. Na grafu relacije ρ_2 sa slike 2 se to vidi po tome što nikoja dva čvora x i y nisu povezana sa obe strelice $x \to y$ i $x \leftarrow y$. U matrici pripadnosti M_{ρ_2} relacije ρ_2 iz primera 3 se to vidi po tome što ni za koje dve simetrične (u odnosu na glavnu dijagonalu) pozicije (i,j) i (j,i) nije $m_{i,j} = m_{j,i} = 1$.*

(3) *Relacija ρ_3 jeste antisimetrična iz istih razloga kao i relacija ρ_2.*

(T) (1) *Relacija ρ_1 nije tranzitivna jer npr. jeste $a\rho_1 c$, jeste $c\rho_1 d$, a nije $a\rho_1 d$ (takođe imamo i da jeste $c\rho_1 a$, jeste $a\rho_1 b$, a nije $c\rho_1 b$). Na grafu relacije ρ_1 sa slike 1 se to vidi po tome što su čvorovi a i d povezani indirektno preko čvora c, a nisu direktno povezani (takođe, čvorovi c i b su povezani indirektno preko čvora a, a nisu direktno povezani).*

(2) *Relacija ρ_2 jeste tranzitivna. Naime, kod ρ_2 i ne postoje različiti $x,y,z \in A$ takvi da je $x\rho_2 y$ i $y\rho_2 z$. Na grafu relacije ρ_2 sa slike 2 se to vidi po tome što i ne postoje dva različita čvora koja su indirektno povezana.*

(3) *Relacija ρ_3 jeste tranzitivna. Naime, jedini različiti elementi x, y i z takvi da je $x\rho_3 y$ i $y\rho_3 z$ su $x = a$, $y = b$ i $z = c$, ali pri tome jeste i $x\rho_3 z$. Na grafu relacije ρ_3 sa slike 3 se to vidi po tome što je indirektno povezan samo čvor a sa čvorom c preko čvora b, ali je pri tome čvor a i direktno povezan sa čvorom c.*

Pogledom na matricu pripadnosti se ne može utvrditi (na jednostavan način) da li neka relacija ima ili nema osobinu tranzitivnosti. ✔

Primer 6 *Ispitajmo osobine relacije iz primera 4 pod (R), gde je na skupu $\mathbb{R}$ relacija definisana sa*

$$\rho = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \cdot y \geq 0 \land y \in [x-1, x+2]\right\},$$

i grafički predstavljena na slici 4.

(R) *Relacija ρ jeste refleksivna jer za svako $x \in \mathbb{R}$ važi $x \cdot x = x^2 \geq 0$ i $x \in [x-1, x+2]$. Na slici 4 to vidimo po tome što cela prava $y = x$ leži unutar grafika relacije.*

(S) *Relacija ρ nije simetrična jer npr. za $x = 1$ i $y = \frac{5}{2}$ važi da*

- *jeste* $1\rho\frac{5}{2}$ *jer je* $1\cdot\frac{5}{2}\geq 0$ *i* $\frac{5}{2}\in[1-1,1+2]=[0,3]$,
- *nije* $\frac{5}{2}\rho 1$ *jer* $1\notin\left[\frac{5}{2}-1,\frac{5}{2}+2\right]=\left[\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right]$.

Na slici 4 *to vidimo po tome što tačka* $\left(1,\frac{5}{2}\right)$ *leži u grafiku, a tačka* $\left(\frac{5}{2},1\right)$ *ne leži u grafiku relacije, pri čemu su tačke* $\left(1,\frac{5}{2}\right)$ *i* $\left(\frac{5}{2},1\right)$ *simetrične u odnosu na pravu* $y=x$.

(A) *Relacija* ρ *nije antisimetrična jer npr. za* $x=1$ *i* $y=\frac{3}{2}$ *važi da*

- *jeste* $1\rho\frac{3}{2}$ *jer je* $1\cdot\frac{3}{2}\geq 0$ *i* $\frac{3}{2}\in[1-1,1+2]=[0,3]$,
- *jeste* $\frac{3}{2}\rho 1$ *jer je* $\frac{3}{2}\cdot 1\geq 0$ *i* $1\in\left[\frac{3}{2}-1,\frac{3}{2}+2\right]=\left[\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$.

Na slici 4 *to vidimo po tome što obe tačke* $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ *i* $\left(\frac{3}{2},1\right)$ *leže u grafiku relacije, pri čemu su tačke* $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ *i* $\left(\frac{3}{2},1\right)$ *simetrične u odnosu na pravu* $y=x$.

(T) *Relacija* ρ *nije tranzitivna jer npr. za* $x=1$, $y=3$ *i* $y=5$ *važi da*

- *jeste* $1\rho 3$ *jer je* $1\cdot 3\geq 0$ *i* $3\in[1-1,1+2]=[0,3]$,
- *jeste* $3\rho 5$ *jer je* $3\cdot 5\geq 0$ *i* $5\in[3-1,3+2]=[2,5]$,
- *nije* $1\rho 5$ *jer* $5\notin[1-1,1+2]=[0,3]$.

Na slici 4 *(grafiku relacije* ρ*) je nemoguće na jednostavan način uočiti da li relacija jeste ili nije tranzitivna.* ✔

Osobine (R), (S), (A) i (T) su najvažnije od osobina ke neka binarna relacija skupa može da ima. Posebno se izdvajaju dve vrste relacija koje imaju određenu kombinaciju navedenih osobina.

Relacije ekvivalencije

Neka je ρ binarna relacija skupa A.

Definicija 3 *Relacija* ρ *je* ***relacija ekvivalencije*** *(skraćeno* RST*) na skupu* A *ako je i refleksivna, i simetrična i tranzitivna.* ◁

Ako je ρ je relacija ekvivalencije skupa A, tada su, vezano za nju, od interesa sledeći pojmovi.

Definicija 4 *Neka je* ρ *relacija ekvivalencije skupa* A.

(a) *Za element* $x\in A$, ***klasa ekvivalencije*** *elementa* x *(u odnosu na relaciju ekvivalencije* ρ*) je skup*

$C_x=\{y\in A\mid x\rho y\}$.

(b) ***Faktor-skup*** *skupa A u odnosu na relaciju ekvivalencije ρ je skup*

$$A/\rho = \{C_x \mid x \in A\}.$$ ◃

☞ Klase ekvivalencije i faktor-skup se definišu samo u odnosu relacije ekvivalencije.

Iz R, S i T osobina relacije ekvivalencije sledi da klase ekvivalencije imaju sledeće osobine koje karakterišu i faktor-skup.

(1) $\forall x \in A, \quad x \in C_x.$

(2) $\forall x, y \in A, \quad C_x = C_y \ \vee \ C_x \cap C_y = \emptyset.$

(3) $\bigcup\limits_{x \in A} C_x = A.$

Dakle, svaki element skupa A pripada bar svojoj klasi, i svake dve klase su ili disjunktne ili se poklapaju. To znači da faktor-skup predstavlja podelu skupa A na disjunktne delove. Drugim rečima, relacija ekvivalencije ρ vrši ujednačavanje elemenata skupa A po „kriterijumu ρ", i u jednoj klasi ekvivalencije se nalaze svi elementi koji su „uzajamno jednaki po kriterijumu ρ". Matematički rečeno, unutar jedne klase su svaka dva elementa u relaciji, a elementi različitih klasa nisu u relaciji.

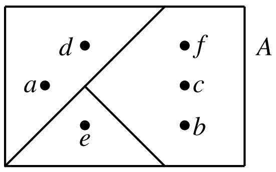
Primer 7 *Neka je $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, i neka je*

$$\rho = \{(x, x) \mid x \in A\} \cup \{(a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (c, f), (f, c), (b, f), (f, b)\}.$$

Proverom osobina se lakoutvrđuje da ρ jeste relacija ekvivalencije. Pri tome je

$$C_a = \{a, d\}, \quad C_b = \{b, c, f\}, \quad C_c = C_b, \quad C_d = C_a, \quad C_e = \{e\}, \quad C_f = C_b,$$

i pri tome je $A/\rho = \{C_a, C_b, C_e\}$. Dakle, relacija ekvivalencije ρ vrši podelu skupa A na delove prikazane na slici 5. ✔



Slika 5: Particija skupa A iz primera 7.

Primer 8 *Neka je $\mathcal{L}$ skup svih ljudi na svetu, i neka su na $\mathcal{L}$ binarne relacije α i β definisane na sledeći način.*

(a) $\forall x, y \in \mathcal{L}, \quad x \alpha y \Leftrightarrow$ *osoba x je istog pola kao osoba y.*

(b) $\forall x, y \in \mathcal{L}, \quad x \beta y \Leftrightarrow$ *osoba x je rođena iste godine kao osoba y.*

Očigledno je (lako se proverava) da su α i β relacije ekvivalencije. Razmotrimo šta su klase ekvivalencije i faktor-skupovi u odnosu na relacije ekvivalencije α i β.

(a) *Posmatrajmo neku konkretnu osobu, npr. nekog jednoznačno određenog Petra Petrovića kojeg ćemo označiti sa l_1, a koji je muškog pola. Kako je*

$C_{l_1} = \{o \in \mathcal{L} \mid l_1 \alpha o\}$,

sledi da je $M = C_{l_1}$ skup svih ljudi koji su muškog pola. S druge strane, posmatrajmo neku jednoznačno određenu Tijanu Tijanić koju ćemo označiti sa l_2, a koja je ženskog pola. Kako je

$C_{l_2} = \{o \in \mathcal{L} \mid l_2 \alpha o\}$,

sledi da je $Z = C_{l_2}$ skup svih ljudi koji su ženskog pola. Kako je $M \cap Z = \emptyset$ i $M \cup Z = \mathcal{L}$, relacija α vrši podelu skupa ljudi na dve klase, klasu ljudi muškog pola i klasu ljudi ženskog pola, tj. ujednačava ljude (samo) po kriterijumu polnosti.

(b) *Posmatrajmo neku konkretnu osobu, npr. nekog jednoznačno određenog Petra Petrovića kojeg ćemo označiti sa l_1, a koji je rođen npr. 2008-e godine. Kako je*

$C_{l_1} = \{o \in \mathcal{L} \mid l_1 \beta o\}$,

sledi da je $G_{2008} = C_{l_1}$ skup svih ljudi koji su rođeni 2008-e godine. Analogno, za svaku osobu $l \in \mathcal{L}$ rođenu godine g, njena klasa ekvivalencije je

$G_g = C_l = \{o \in \mathcal{L} \mid l \beta o\}$,

tj. skup svih ljudi rođenih g-te godine. Dakle, relacija β vrši podelu skupa ljudi na klase „godišta”, tj. ujednačava ljude (samo) po kriterijumu godine njihovog rođenja. ✔

Primer 9 *Na skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$ posmatrajmo relacije α i β definisane sa*

(a) $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x \alpha y \quad \Leftrightarrow \quad (x = y = 0 \ \vee \ xy > 0)$,

(b) $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x \beta y \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = 4k$.

Relacije α i β možemo interpretirati i na sledeći način.

(a) *Broj 0 je u relaciji α sa samim sobom, i u relaciji α su svaka dva cela broja koja su istog znaka, dakle ako su oba pozitivna ili oba negativna.*

(b) *Kako je $x - y = 4k$ ekvivalentno sa $x = y + 4k$ odnosno $4|(x - y)$ (4 deli razliku brojeva x i y), ceo broj x je u relaciji sa celim brojem y ako brojevi x i y imaju isti ostatak pri deljenju sa 4.*

Dokažimo da su α i β relacije ekvivalencije, i razmotrimo i opišimo klase ekvivalencije i faktor-skupove u odnosu na α i β.

(a) *Dokažimo da relacija α ima osobine* (R), (S) *i* (T).

  (R) *Po definiciji je $0 \alpha 0$, a za sve $x \neq 0$ je $x \alpha x$ jer je $x \cdot x = x^2 > 0$.*

  (S) *Za svako $x, y \in \mathbb{Z}$ iz $x \cdot y > 0$ očigledno sledi $y \cdot x > 0$.*

(T) *Neka je* $x\alpha y$ *i* $y\alpha z$. *Slučajevi* $x = y = 0$ *i* $y = z = 0$ *su trivijalni, te neka* $x\alpha y$ *i* $y\alpha z$ *znači da je* $x\cdot y > 0$ *i* $y\cdot z > 0$. *To znači da su brojevi* x *i* y *istog znaka (oba su pozitivna ili oba negativna), kao i da su brojevi* y *i* z *istog znaka. Odatle očigledno sledi da su sva tri broja* x, y *i* z *istog znaka te je* $x\cdot z > 0$ *odnosno* $x\alpha z$.

Kako je α *relacija ekvivalencija, to postoje klase ekvivalencije i faktor-skup. Sa elementom* 0 *je u relaciji samo* 0 *te je* $C_0 = \{0\}$. *Za svako* $x > 0$ *je*

$C_x = \{y \in \mathbb{Z} \mid x\cdot y > 0\} = \{1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}$

(skup svih pozitivnih celih, tj. prirodnih brojeva $\mathbb{N}$*), a za svako* $x < 0$ *je*

$C_x = \{y \in \mathbb{Z} \mid x\cdot y > 0\} = \{-1,-2,-3,\ldots\} = N$

(skup svih negativnih celih brojeva). Dakle, relacijom α *je izvršena podela skupa celih brojeva na* $\{0\}$, *pozitivne cele brojeve* $\mathbb{N}$ *i negativne cele brojeve* N, *odnosno, relacija* α *ujednačava cele brojeve (samo) po kriterijumu znaka. Faktor-skup je* $\mathbb{Z}/\alpha = \{\{0\},\mathbb{N},N\}$.

(b) *Dokažimo da relacija* β *ima osobine* (R), (S) *i* (T).

(R) *Za svako* $x \in \mathbb{Z}$ *je* $x\beta x$ *jer je* $x - x = 4\cdot 0$.

(S) *Neka je* $x\beta y$ *za neke* $x,y \in \mathbb{Z}$. *Po definiciji relacije to znači da postoji* $k \in \mathbb{Z}$ *takvo da je* $x - y = 4k$. *Odatle, množeći jednakost sa* -1 *dobijamo da postoji* $k \in \mathbb{Z}$ *takvo da je* $y - x = 4(-k)$, *gde je takođe* $-k \in \mathbb{Z}$ *te je* $y\beta x$.

(T) *Neka je* $x\alpha y$ *i* $y\alpha z$. *Po definiciji relacije to znači da postoje* $k_1,k_2 \in \mathbb{Z}$ *takvi da je* $x - y = 4k_1$ *i* $y - z = 4k_2$. *Sabirajući ove dve jednakosti dobijamo da je* $x - z = (x - y) + (y - z) = 4k_1 + 4k_2 = 4(k_1 + k_2)$ *za neke* $k_1,k_2 \in \mathbb{Z}$, *pri čemu je takođe* $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, *te je (po definiciji relacije* β*)* $x\alpha z$.

Kako su elementi x *i* y *u relaciji* β *ako i samo ako imaju isti ostatak pri deljenju sa* 4, *relacija* β *ujednačava cele brojeve po njihovom ostatku pri delenju sa* 4. *Mogući ostaci pri deljenju sa* 4 *su* 0, 1, 2 *i* 3, *te stoga dobijamo ukupno* 4 *različite klase*

$O_0 = \{\ldots,-8,-4,0,4,8,\ldots\}$, *a to su celi brojevi deljivi sa* 4,

$O_1 = \{\ldots,-7,-3,1,5,9,\ldots\}$, *a to su brojevi sa ostatkom* 1 *pri deljenju sa* 4,

$O_2 = \{\ldots,-6,-2,2,6,10,\ldots\}$, *a to su brojevi sa ostatkom* 2 *pri deljenju sa* 4,

$O_3 = \{\ldots,-5,-1,3,7,11,\ldots\}$, *a to su brojevi sa ostatkom* 3 *pri deljenju sa* 4,

i faktor-skup $\mathbb{Z}/\beta = \{O_0,O_1,O_2,O_3\}$. ✔

✎ Relacija β iz primera 9 je u matematici poznata pod imenom „kongruentno po modulu 4” i oznakom $\equiv_4$.

Relacije poretka

Neka je ρ binarna relacija skupa A.

Definicija 5 *Relacija ρ je* **relacija poretka** *(skraćeno* RAT*) na skupu A ako je i refleksivna, i antisimetrična i tranzitivna.* ◁

Kao što nekom relacijom ekvivalencije ρ modeliramo ujednačavanje elemenata skupa A po kriterijumu ρ, nekom relacijom poretka ρ modeliramo hijerarhiju (poredak) među elementima skupa A po kriterijumu ρ.

✎ Ako je ρ relacija poretka na skupu A, iskaz $x\rho y$ ćemo rečima govornog jezika formulisati sa „x je manji od y" (u smislu manji ili jednak, jer je relacija poretka refleksivna) ili „y je veće od x" (u smislu veće ili jednako).

Ako je ρ je relacija poretka skupa A, tada su, vezano za nju, od interesa sledeći pojmovi.

Definicija 6 *Neka je ρ relacija poretka skupa A.*

(a) **Haseov dijagram** *je „pojednostavljen" graf relacije poretka opisan u primeru* 2*, uz sledeća pojednostavljenja koja graf tj. sliku čine preglednijom:*

- ($\circlearrowleft$) *petlje kod čvorova ne crtamo nego ih podrazumevamo kod svakog čvora jer je relacija poretka refleksivna;*
- ($\uparrow$) *kako na grafu između svaka dva čvora postoji najviše jedna od dve strelice jer je relacija antisimetrična, čvorove možemo na slici postaviti tako da su sve strelice na slici usmerene na „gore", te stoga vrhove strelica ne crtamo već podrazumevamo da su strelice prema „gore";*
- ($\leadsto$) *kako je relacija tranzitivna, svaka dva čvora koja su indirektno povezana preko nekog trećeg čvora moraju biti i direktno povezana, direktnu vezu između ta dva čvora ne crtamo već je podrazumevamo.*

(b) *Element $a \in A$ je* **najveći** *element (u odnosu na relaciju poretka ρ) ako*

$\forall x \in A, \quad x\rho a.$

(c) *Element $a \in A$ je* **najmanji** *element (u odnosu na relaciju poretka ρ) ako*

$\forall x \in A, \quad a\rho x.$

(d) *Element $a \in A$ je* **maksimalan** *element (u odnosu na relaciju poretka ρ) ako*

$\nexists x \in A, \quad x \neq a \wedge a\rho x.$

(e) *Element $a \in A$ je* **minimalan** *element (u odnosu na relaciju poretka ρ) ako*

$\nexists x \in A, \quad x \neq a \wedge x\rho a.$ ◁

☞ Pojmovi najvećeg, najmanjeg, maksimalnih i minimalnih elemenata, kao i Haseov dijagram, se definišu samo u odnosu relacije poretka.

Pojmove najvećeg, najmanjeg, maksimalnog i minimalnog elementa relacije poretka ρ skupa A možemo opisati i na sledeći način.

(b) Element $a \in A$ je najveći element ako je a veći od svih, tj. ako na Haseovom dijagramu od njega vodi put na dole ka svim elementima skupa A.

(c) Element $a \in A$ je najmanji element ako je a manji od svih, tj. ako na Haseovom dijagramu od njega vodi put na gore ka svim elementima skupa A.

(d) Element $a \in A$ je maksimalan element ako a nije manji ni od jednog drugog elementa, tj. ako na Haseovom dijagramu od njega ne vodi put na gore ni ka jednom drugom elementu skupa A.

(e) Element $a \in A$ je minimalan element ako a nije veći ni od jednog drugog elementa, tj. ako na Haseovom dijagramu od njega ne vodi put na dole ni ka jednom drugom elementu skupa A.

Kao što ćemo videti na primerima, ni jedan od pomenutih „ekstremnih" elemenata relacije poretka ne mora da postoji, a maksimalnih i minimalnih elemenata može da bude i više. Takođe ćemo videti da jedan isti element može da bude ujedno i maksimalan i minimalan element. Međutim, u pogledu najvećeg i najmanjeg elementa važi sledeće.

Teorema 1 *Za relaciju poretka ρ skupa A,*

- *ako postoji najveći element, tada je on jedistven i ujedno je jedini maksimalan element, i*
- *ako postoji najmanji element, tada je on jedistven i ujedno je jedini minimalan element.* ◃

☞ Dakle, kod svake relacije poretka može da postoji najviše jedan najveći, i najviše jedan najmanji element.

Primer 10 *Razmotrimo standardnu relaciju poretka $\leq$ na nekim skupovima brojeva.*

(a) *Na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, vidi sliku* 6a*,*

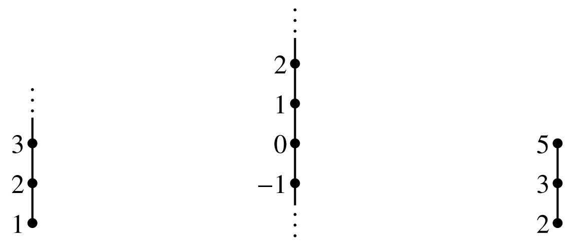
- ☞ *najveći element ne postoji,*
- ☞ *najmanji element je* 1*,*
- ☞ *ne postoji ni jedan maksimalan element,*
- ☞ *element je* 1 *je jedini minimalan element.*

(b) *Na skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$, vidi sliku* 6b*,*

- ☞ *najveći element ne postoji,*
- ☞ *najmanji element ne postoji,*
- ☞ *ne postoji ni jedan maksimalan element,*
- ☞ *ne postoji ni jedan minimalan element.*

(c) *Na skupu $A = \{2, 3, 5\}$, vidi sliku* 6c*,*

- ☞ *najveći element je* 5*,*



(a) Na skupu $\mathbb{N}$. (b) Na skupu $\mathbb{Z}$. (c) Na skupu $\{2, 3, 5\}$.

Slika 6: Relacije poretka $\leq$ iz primera 10.

- ☞ *najmanji element je* 2*,*
- ☞ *element* 5 *je jedini maksimalan element,*
- ☞ *element* 2 *je jedini minimalan element.*

✔

Primer 11 *Za standardnu relaciju poretka* $\geq$ *na skupu* $\{2, 3, 5\}$*, vidi sliku* 7*,*

- ☞ *najveći element je* 2*,*
- ☞ *najmanji element je* 5*,*
- ☞ *element* 2 *je jedini maksimalan element,*
- ☞ *element* 5 *je jedini minimalan element.*

✔

Slika 7: Relacija poretka iz primera 11.

Primer 12 *Razmotrimo relaciju poretka* $\cdot|\cdot$ *tj. relaciju „deli” na nekim skupovima brojeva* $A \subseteq \mathbb{N}$*. Relacija* $\cdot|\cdot$ *je na svakom skupu* $A \subseteq \mathbb{N}$ *definisana sa*

$$x|y \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N},\ y = kx$$

za sve $x, y \in A$*. Dokažimo najpre da ona zaista jeste relacija poretka na proizvoljnom skupu* $A \subseteq \mathbb{N}$*.*

(R) *Za svako* $x \in A$ *je* $x|x$ *jer je* $x = 1 \cdot x$*.*

(A) *Za* $x, y \in A$*, neka je* $x|y$ *i* $y|x$*, što znači da je* $y = k_1 x$ *i* $x = k_2 y$ *za neke* $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$*. Iz* $y = k_1 x = k_1(k_2 y) = (k_1 k_2)y$ *sledi* $k_1 k_2 = 1$ *i* $k_1 = k_2 = 1$ *jer* $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$*, te zbog* $y = k_1 x$ *dobijamo* $x = y$*.*

(T) *Neka je $x|y$ i $y|z$ za neke $x, y, z \in A$, što znači da je $y = k_1 x$ i $z = k_2 y$ za neke $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Iz $z = k_2 y = k_2(k_1 x) = (k_1 k_2)x$ sledi da je $z = kx$ za $k = k_1 k_2 \in \mathbb{N}$ jer $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, što znači da $x|z$.*

Razmotrimo sada ekstremne elemente relacije $\cdot|\cdot$ na nekim skupovima $A \subseteq \mathbb{N}$.

(a) *Na skupu $A = \{1, 2, 12\}$, vidi sliku* 8a*,*

- ☞ *najveći element je* 12*,*
- ☞ *najmanji element je* 1*,*
- ☞ *element* 12 *je jedini maksimalan element,*
- ☞ *element* 1 *je jedini minimalan element.*

(b) *Na skupu $B = \{1, 2, 3, 12\}$, vidi sliku* 8b*,*

- ☞ *najveći element je* 12*,*
- ☞ *najmanji element je* 1*,*
- ☞ *element* 12 *je jedini maksimalan element,*
- ☞ *element* 1 *je jedini minimalan element.*

(c) *Na skupu $C = \{1, 2, 5, 12\}$, vidi sliku* 8c*,*

- ☞ *najveći element ne postoji,*
- ☞ *najmanji element je* 1*,*
- ☞ *elementi* 5 *i* 12 *su maksimalni elementi,*
- ☞ *element* 1 *je jedini minimalan element.*

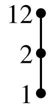
(d) *Na skupu $D = \{2, 4, 5, 12\}$, vidi sliku* 8d*,*

- ☞ *najveći element ne postoji,*
- ☞ *najmanji element ne postoji,*
- ☞ *elementi* 5 *i* 12 *su maksimalni elementi,*
- ☞ *elementi* 5 *i* 2 *su minimalni elementi.*

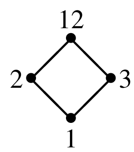
Uočimo da je u ovom primeru element 5 *ujedno i minimalan i maksimalan element. Generalno, kod neke relacije poretka je a ujedno i minimalan i maksimalan element ako i samo ako na grafiku nije povezan ni sa jednim drugim elementom.*

(e) *Neka je $P = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$ skup svih prostih brojeva. Na skupu $E = \{1\} \cup P$, vidi sliku* 8e*,*

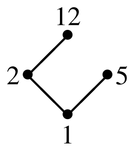
- ☞ *najveći element ne postoji,*
- ☞ *najmanji element je* 1*,*
- ☞ *svi prosti brojevi su maksimalni elementi,*
- ☞ *element* 1 *je jedini minimalni element.*



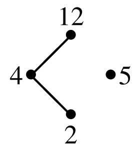
(a) Na skupu $A = \{1,2,12\}$.



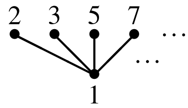
(b) Na skupu $B = \{1,2,3,12\}$.



(c) Na skupu $C = \{1,2,5,12\}$.



(d) Na skupu $D = \{2,4,5,12\}$.



(e) Na skupu $E = \{1\} \cup P$.

Slika 8: Relacija poretka $\cdot|\cdot$ iz primera 12.

✓

☞ U primeru 10, primeru 11, kao i primeru 12 pod (a) je u pitanju tzv. „linearan poredak” kod kojeg su svi elementi linijski povezani (u jednu liniju), dok u primeru 12 pod (b), (c), (d) i (e) to nije slučaj. „Linearan poredak” je relacija poretka sa kojom su svaka dva elementa uporediva.

Definicija 7 *Relacija poretka ρ skupa A je* ***lieamo uređenje*** *skupa A ako*

$$\forall x, y \in A, \quad x\rho y \vee y\rho x.$$ ◃