FTN, Informacioni inženjering, Matematička analiza 1 **KOLOKVIJUM 1**

Prezime, ime, br. indeksa: ______________________________ **21.04.2018.**

PREDISPITNE OBAVEZE 1

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n} =$ ______________ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-23n+5}{4n^2+25} =$ ______________
- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+2} =$ ______________ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2+1} =$ ______________
- Napisati jednačinu tangente na grafik funkcije $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x+1}$ u tački 1:
- Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left|x^2-4\right|$ je diferencijabilna u tačkama $x\in$ ______________
- Zaokružiti tačne iskaze, za proizvoljne realne funkcije f, g i h, i $a,b\in\mathbb{R}$:
  1) $(f\circ g)'(x)=\left(f'\circ g'\right)(x)$ **2)** $(f\circ g)'(x)=\left(f'\circ g\right)(x)\cdot g'(x)$ **3)** $(xf(x))'=f'(x)$
  4) $f(x)\equiv a\ \Rightarrow\ f'(x)=0$ **5)** $\left(f\left(x^2\right)\right)'=f'\left(x^2\right)$ **6)** $\left(f\left(x^2\right)\right)'=2xf'\left(x^2\right)$
- Napisati prve izvode datih funkcija

  $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2}-5,\quad f'(x)=$ ______________

  $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\sin(5-2x),\quad g'(x)=$ ______________
- Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-Ax+4 & ,\ x\le 2\\ Ax-2 & ,\ x>2\end{cases}$ je neprekidna na skupu $\mathbb{R}$ za $A\in$ __________
- Prava $y=1$ je desna horizontalna asimptota funkcije $f(x)$ ako je (izraziti limesom): ______________
- Napisati formulu za razvoj funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ u beskonačni Maklorenov red:

  $f(x)=$
- Stacionarne tačke funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-5x+6$ su: ______________
- Ako je $f'(x)<0$ za sve $x\in(0,1)$, tada je funkcija f na intervalu $(0,1)$:
  1) monotono rastuća **2)** monotono neopadajuća **3)** monotono opadajuća
  4) monotono nerastuća **5)** konstantna **6)** neprekidna **7)** konveksna
  8) konkavna **9)** parna **10)** neparna **11)** pozitivna **12)** nenegativna
- Prvi parcijalni izvodi funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=2x^2y-3y$ su

  $f_x(x,y)=$ ______________ $f_y(x,y)=$ ______________

ZADACI

1. Neka je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definisana sa $f(x)=\begin{cases}x^2\ln^2 x & ,\ x>0\\ (A-x)^2-9 & ,\ x\le 0\end{cases}$.
   (a) Ispitati za koje $A\in\mathbb{R}$ je funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}$.
   (b) Ispitati za koje $A\in\mathbb{R}$ funkcija f ima prvi izvod na $\mathbb{R}$.
2. Ispitati funkciju $f(x)=\frac{1-\ln x}{x}$ i nacrtati njen grafik.
3. Koliko članova u razvoju funkcije $f(x)=\ln(1+x)$ u Maklorenov red treba uzeti da bi vrednost $\ln(0.5)$ izračunali sa greškom manjom od 0.01?

REŠENJA ZADATAKA - KOLOKVIJUM 1

1. Neka je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definisana sa $f(x)=\begin{cases} x^2\ln^2 x & , \quad x>0 \\ (A-x)^2-9 & , \quad x\le 0 \end{cases}$.

   (a) Ispitati za koje $A\in\mathbb{R}$ je funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}$.

   (b) Ispitati za koje $A\in\mathbb{R}$ funkcija f ima prvi izvod na $\mathbb{R}$.

   Rešenje:

   (a) Kvadrata funkcija $f_1(x)=(A-x)^2-9$, $x\le 0$ je neprekidna na $(-\infty,0]$, i pri tome je $f_1(0)=A^2-9$. Funkcija $f_2(x)=x^2\ln^2 x$, $x>0$ je, kao kompozicija neprekidnih funkcija, neprekidna na $(0,\infty)$, i pri tome je
   $\lim\limits_{x\to0^+} f_2(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln^2 x=0\cdot(-\infty)$,
   što je neodređen izraz. Primenom Lopitalovog pravila (2 puta) dobijamo
   $$\lim_{x\to0^+} f_2(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln^2 x}{x^{-2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{\left(x^{-2}\right)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-2}}=-\frac{-\infty}{\infty}$$
   $$=-\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-2}\right)'}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}x^2=0.$$
   Funkcija f je neprekidna ako i samo ako je $f_1(0)=\lim\limits_{x\to0^+} f_2(x)$ odnosno $A^2-9=0$, dakle za $A\in\{-3,3\}$.

   (b) Da bi funkcija imala izvod, mora biti neprekidna. Dakle, u tački 0 može da ima izvod samo za vrednosti $A\in\{-3,3\}$. Za svako $A\in\mathbb{R}$, funkcija $f_1(x)=(A-x)^2-9$, $x\le0$ ima izvod
   $f_1'(x)=-2(A-x)=2x-2A$
   na intervalu $(-\infty,0)$ i levi izvod
   $f_{1,-}'(0)=-2(A-0)=-2A$
   u tački 0. Funkcija $f_2(x)=x^2\ln^2 x$, $x>0$ ima izvod
   $f_2'(x)=2x\ln^2 x+2x^2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=2x\ln x(\ln x+1)$
   na intervalu $(0,\infty)$ za svako $A\in\mathbb{R}$. Desni izvod funkcija f može da ima samo za $A\in\{-3,3\}$, i tada je
   $$f_{2,+}'(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\ln^2 x-\left(A^2-9\right)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln^2 x}{x^{-1}}=\frac{\infty}{\infty}.$$
   Primenom Lopitalovog pravila (2 puta) dobijamo
   $$f_{2,+}'(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{\left(x^{-1}\right)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-x^{-2}}=-2\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}=-2\frac{-\infty}{\infty}=-2\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-1}\right)'}$$
   $$=-2\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}=2\lim_{x\to0^+}x=0.$$
   Dakle, za $A\in\{-3,3\}$ je
   $f_-'(0)=f_{1,-}'(0)=-2A=\pm6\ne f_+'(0)=f_{2,+}'(0)=0$,
   te za sve $A\in\mathbb{R}$ funkcija f ima prvi izvod na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, a u tački 0 nema prvi izvod ni za jednu vrednost parametra A.

2. Ispitati funkciju $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{x}$ i nacrtati njen grafik.

   Rešenje:

   (a) *Domen funkcije* je skup $\mathcal{D}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\wedge x\ne0\}=(0,\infty)$.

   (b) *Nule funkcije*:
   $$f(x)=0\quad\Leftrightarrow\quad 1-\ln x=0\quad\Leftrightarrow\quad \ln x=1\quad\Leftrightarrow\quad x=e.$$

   (c) *Znak funkcije*: kako je $x>0$, $x\in\mathcal{D}$, imamo da je
   $f(x)>0\quad\Leftrightarrow\quad\ln x<1\quad\Leftrightarrow\quad x<e\quad\Leftrightarrow\quad x\in(0,e)$
   i
   $f(x)<0\quad\Leftrightarrow\quad x>e.$

(d) *Monotonost i lokalni ekstremi funkcije*:

$$f'(x) = \left(\frac{1-\ln x}{x}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x - (1-\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{\ln x - 2}{x^2};$$

$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x = 2 \quad\Leftrightarrow\quad x = e^2,$

pri čemu je $x^2 > 0$, $x \in \mathcal{D}$, te je

$f'(x) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x - 2 > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x > 2 \quad\Leftrightarrow\quad x > e^2$

i

$f'(x) < 0 \quad\Leftrightarrow\quad x < e^2 \quad\Leftrightarrow\quad x \in \left(0, e^2\right).$

Dakle, funkcija f je monotono rastuća na skupu $\left(e^2, \infty\right)$, monotono opadajuća na skupu $\left(0, e^2\right)$, i ima lokalni minimum u tački $x = e^2$.

(e) *Drugi izvod funkcije, konveksnost i konkavnost*:

$$f''(x) = \left(\frac{\ln x - 2}{x^2}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - (\ln x - 2)\cdot 2x}{x^4} = \frac{5 - 2\ln x}{x^3}.$$

Kako je za $x \in \mathcal{D}$

$f''(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 5 - 2\ln x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x = \frac{5}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x = e^{\frac{5}{2}},$

$f''(x) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad 5 - 2\ln x > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x < \frac{5}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x < e^{\frac{5}{2}},$

$f''(x) < 0 \quad\Leftrightarrow\quad 5 - 2\ln x < 0 \quad\Leftrightarrow\quad x > e^{\frac{5}{2}},$

sledi da je funkcija konkavna na $\left(e^{\frac{5}{2}}, \infty\right)$, konveksna na skupu $\left(0, e^{\frac{5}{2}}\right)$, i ima prevojnu tačku $x = e^{\frac{5}{2}}$.

(f) *Vertikalne asimptote funkcije*: s obzirom na domen $\mathcal{D} = (0, \infty)$ funkcije f, jedina moguća vertikalna asimptota je prava $x = 0$. Kako je

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln x}{x} = \frac{1-(-\infty)}{+0} = \frac{\infty}{+0} = \infty,$$

sledi da je prava $x = 0$ leva vertikalna asimptota funkcije f.

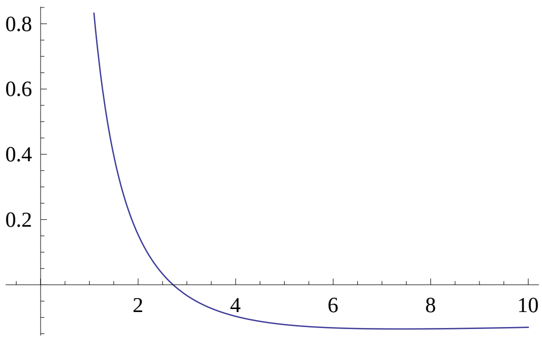
(g) *Horizontalna / kosa asimptota funkcije*: kako je (primenom Lopitalovog pravila)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = ?,$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\ln x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{0}{1} = 0,$$

sledi da funkcija f ima za desnu horizontalnu asimptotu pravu $y = 0$ (x-osa).

(h) *Grafik funkcije*:



3. Koliko članova u razvoju funkcije $f(x) = \ln(1+x)$ u Maklorenov red treba uzeti da bi vrednost $\ln(0.5)$ izračunali sa greškom manjom od 0.01?

Rešenje: Imamo da je $\ln(0.5) = \ln(1+(-0.5)) = f(-0.5)$, te posmatramo razvoj funkcije $f(x) = \ln(1+x)$ u tački $x = -0.5$. Kako je (vidi tablice)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \qquad x \in (-1, 1],$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ za neko } \xi \in (x, 0),$$

to za $x = -0.5$ treba da bude

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < 0.01,$$

pri čemu za $f(x) = \ln(1+x)$ induktivno dobijamo

$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4},$
$f^{(5)}(x) = \frac{4!}{(1+x)^5}, \quad f^{(6)}(x) = -\frac{5!}{(1+x)^6}, \ldots$

odnosno

$$f^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(1+x)^{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$f^{(2n)}(x) = -\frac{(2n-1)!}{(1+x)^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

Tako, za $\xi \in (-0.5, 0)$, za sve $x \in \mathbb{R}$ dobijamo

$$|r_n(-0.5)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (-0.5)^{n+1} \right| = \left| \frac{\pm \frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}}}{(n+1)!} (-0.5)^{n+1} \right| =$$

$$= \left| \frac{0.5^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \right| < \frac{0.5^{n+1}}{(n+1)0.5^{n+1}} = \frac{1}{n+1} < 0.01,$$

pri čemu je

$$\frac{1}{n+1} < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad 100 < n+1 \quad \Leftrightarrow \quad 99 < n.$$

Dakle, za traženu aproksimaciju je dovoljno uzeti $n = 100$, odnosno polinom 100-tog stepena.