FTN, Informacioni inženjering, Matematička analiza 1 $\boxed{\textbf{KOLOKVIJUM 2}}$

Prezime, ime, br. indeksa: ______________________________ **09.06.2018.**

PREDISPITNE OBAVEZE 2

- Zaokružiti osobine integrala (za proizvoljne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

  1) $\int f(x)dx = F(x) + c \;\Leftrightarrow\; F'(x) = f(x)$ **2)** $\int f(x)dx = F(x) + c \;\Leftrightarrow\; f'(x) = \int F(x)dx$

  3) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ **4)** $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$

  5) $\int \alpha f(x)dx = (\alpha + 1)\int f(x)dx$ **6)** $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$

- Izračunati:

  1) $\int \left(\sqrt{1-2x} + \frac{2}{x^3}\right)dx =$ ______________ **2)** $\int x \sin\left(x^2+3\right)dx =$ ______________

  3) $\int \frac{5}{\sqrt{x^2+16}}dx =$ ______________ **4)** $\int \frac{x^2 - \sqrt[3]{x}}{x}dx =$ ______________

- Ako je $\int f(x) = \ln\left(x^2+1\right) + c$, tada je $f(x) =$ ______________

- Izračunati:

  1) $\int\limits_0^1 (1 - e^x)dx =$ ______________ **2)** $\int\limits_0^\pi \sin\frac{x}{2}dx =$ ______________

- Ako je $f(x) < g(x)$, $x \in [a,b)$ i $f(x) \geq g(x)$, $x \in [b,c]$, napisati formulu za zatvorenu površinu koju zaklapaju krive $f(x)$ i $g(x)$, i prave $x = a$ i $x = b$:

  ____

- Napisati formulu za površinu koju parametarski zadana kriva $(x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$, gde je $y(t) > 0$ i $x'(t) > 0$, $t \in [a,b]$, zaklapa sa x-osom i pravama $x = a$ i $x = b$:

  $P =$

- Zaokruži rešenja diferencijalne jednačine $y'' + y' + y = x^2 + 3x + 4$:

  1) $y(x) = \sin x$ **2)** $y(x) = e^x$ **3)** $y(x) = x^2 + x + 1$ **4)** $y(x) = x^2$ **5)** $y(x) = x + 1$

- Diferencijalnu jednačinu oblika $y' + f(x)y = g(x)y^\alpha$ rešavamo uvođenjem smene: ______________

- Karakteristični koreni diferencijalne jednačine $y'' + 5y' + 6y = 0$ su: ______________

ZADACI 2

1. (a) Izračunati $\int \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx$.

   (b) Izračunati $I = \int \frac{5 + 6\sin x}{\sin x(4 + 3\cos x)}dx$.

2. Izračunati dužinu luka parametarski zadane krive $x(t) = \frac{1}{6}t^6$, $y(t) = 2 - \frac{1}{4}t^4$ između presečnih tačaka sa koordinatnim osama.

3. Dokazati da je $\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 dx + \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 dy = 0$ jednačina totalnog diferencijala i rešiti je.

REŠENJA ZADATAKA - KOLOKVIJUM 1

1. (a) Izračunati $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$.

   (b) Izračunati $I=\int \frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)}dx$.

   Rešenje:

   (a) Parcijalnom integracijom sa

   $$u=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\quad du=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

   $dv=dx,\quad v=\int dx=x$ dobijamo

   $$I=\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\dots$$

   smenom $x^2+1=t$, $xdx=\frac{1}{2}dt$

   $$I=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int t^{-\frac{1}{2}}dt=$$
   $$=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-2t^{\frac{1}{2}}+c=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-2\sqrt{x^2+1}+c.$$

   (b) Uvođenjem opšte trigonometrijske smene

   $$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\quad\to\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

   dobijamo

   $$I=\int\frac{5+6\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(4+3\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{\frac{5t^2+12t+5}{1+t^2}}{t\frac{t^2+7}{1+t^2}}dt=\int\frac{5t^2+12t+5}{t(t^2+7)}dt.$$

   Kako je

   $$\frac{5t^2+12t+5}{t(t^2+7)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+7}=\frac{A\left(t^2+7\right)+(Bt+C)t}{t(t^2+7)}=\frac{(A+B)t^2+Ct+7A}{t(t^2+7)},$$

   iz $5t^2+12t+5=(A+B)t^2+Ct+7A$ dobijamo

   $$(A+B=5\ \wedge\ C=12\ \wedge\ 7A=5)\quad\Rightarrow\quad\left(A=\frac{5}{7}\ \wedge\ B=\frac{30}{7}\ \wedge\ C=12\right).$$

   Dakle,

   $$I=\int\frac{5}{7}\frac{1}{t}+\frac{\frac{30}{7}t+12}{t^2+7}dt=\frac{5}{7}\int\frac{dt}{t}+\frac{30}{7}\int\frac{t}{t^2+7}dt+12\int\frac{dt}{t^2+7}.$$

   Prvi i treći integral su tablični integrali, dok kod drugog ovođenjem smene $t^2+7=z$, $tdt=\frac{1}{2}dz$ dobijamo

   $$\int\frac{t}{t^2+7}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\ln|z|=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+7\right|.$$

   Dakle,

   $$I=\frac{5}{7}\ln|t|+\frac{15}{7}\ln\left(t^2+7\right)+\frac{12}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt7}+c$$
   $$=\frac{5}{7}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{15}{7}\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+7\right)+\frac{12}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt7}+c.$$

2. Izračunati dužinu luka parametarski zadane krive $x(t)=\frac{1}{6}t^6$, $y(t)=2-\frac{1}{4}t^4$ između presečnih tačaka sa koordinatnim osama.

   Rešenje: Za vrednosti parametra t za koje kriva seče koordinatne ose dobijamo $x=0\ \Rightarrow\ t=0$ i $y=0\ \Rightarrow\ t=\sqrt[4]{8}$, pri čemu je $x'_t(t)=t^5$ i $y(t)=-t^3$, te je

   $$\ell=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{(t^5)^2+(-t^3)^2}dt=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^{10}+t^6}dt=\int_0^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{t^4+1}dt=\dots$$

   smenom $t^4+1=z$, $t^3dt=\frac{1}{4}dz$, uz promenu granica

$t=0 \mapsto z=0^4+1=1$ i $t=\sqrt[4]{8} \mapsto z=\left(\sqrt[4]{8}\right)^4+1=9$:

$$\ell=\frac{1}{4}\int\limits_0^9 \sqrt{z}dz=\frac{1}{4}\int\limits_0^9 z^{\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\Big|_0^9=\frac{1}{6}\left(9^{\frac{3}{2}}-0\right)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}.$$

3. Dokazati da je $\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 dx+\left(\frac{x}{x+y}\right)^2 dy=0$ jednačina totalnog diferencijala i rešiti je.

Rešenje: Kako je

$$\frac{\partial}{\partial y}P\left(x,y\right)=\frac{\partial}{\partial x}Q\left(x,y\right)=\frac{2xy}{\left(x+y\right)^3},$$

sledi da u pitanju jeste jednačina totalnog diferencijala. Stoga je

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad F(x,y)=\int\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 dx=-\frac{y^2}{x+y}+S(y).$$

Dalje je

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=\left(\frac{x}{x+y}\right)^2=\frac{-2xy-y^2}{(x+y)^2}+S'(y),$$

te dobijamo $S'(y)=1$, odnosno $S(y)=y$, te je

$$F(x,y)=-\frac{y^2}{x+y}+y=\frac{xy}{x+y}.$$

Dakle, rešenje posmatrane diferencijalne jednačine glasi $\frac{xy}{x+y}=c$.